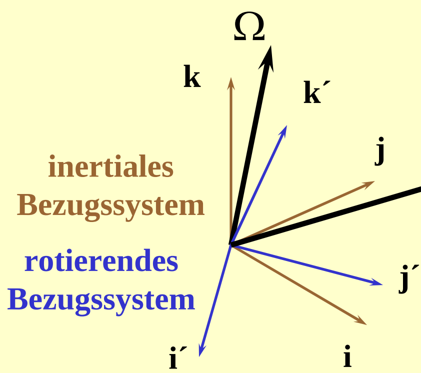
Mathematische Herleitung der Coriolisbeschleunigung

➢ Darstellung eines beliebigen Vektors **A(t)**



$$\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}(t) = A_{1'}(t)\mathbf{i}' + A_{2'}(t)\mathbf{j}' + A_{3'}(t)\mathbf{k}'$$

Die zeitliche Änderung eines beliebigen Vektors **A(t)**

Die Ableitung von A(t) nach der Zeit

$$\frac{d_a\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_1}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_2}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_3}{dt}$$

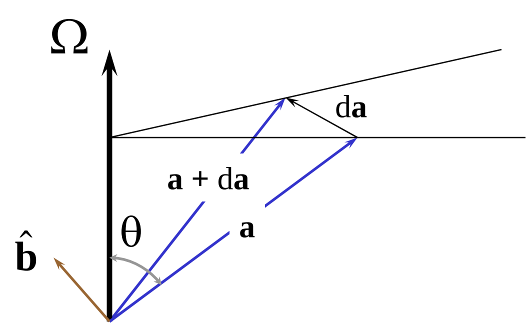
der Index „a“ soll daran erinnern, daß sich die Ableitung auf das Inertialsystem bezieht

im rotierenden Bezugssystem

$$\frac{d_a\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}'\frac{dA_1'}{dt} + A_1'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \ldots$$

$$= \mathbf{i}'\frac{dA_1'}{dt} + A_1'\left(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{i}'\right) + \ldots$$

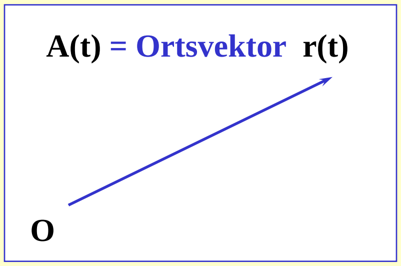
$$= \left[\frac{d}{dt} + \mathbf{\Omega}\wedge\right]\left(A_1'\mathbf{i}' + \ldots\right)$$



Einheitsvektor senkrecht zu Ω und a

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = |\mathbf{a}||\Omega|\sin\theta\,\hat{\mathbf{b}}$$

$$= \Omega\wedge\mathbf{a}$$



$\mathbf{u_a}$(t) = die absolute Geschwindigkeit eines Luftpakets = $\dfrac{d_a\mathbf{r}}{dt}$

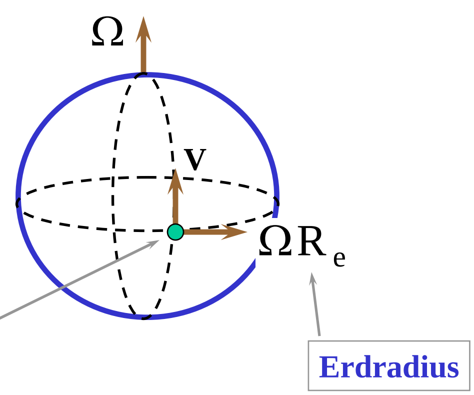
Die relative Geschwindigkeit in einem rotierenden Bezugs-system betrage

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_{1'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dr_{2'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dr_{3'}}{dt}\mathbf{k}'$$

und $\qquad \mathbf{u_a} = \mathbf{u} + \Omega \wedge \mathbf{r}$

Beispiel

$$\mathbf{u_a} = \mathbf{u} + \Omega \wedge \mathbf{r}$$



Dieser Luftkörper startet relativ zur Erde nur mit einer Geschwindigkeit **V** in Richtung Pol hin $\Rightarrow$

Er startet relativ zum Weltraum mit einer zusätzlichen Geschwindigkeitskomponente ΩR_e nach Osten.

Um die Bewegung eines Luftpakets mit dem Gesetz von Newton beschreiben zu können, muß man die absolute Beschleunigung kennen

$$\Rightarrow \quad \frac{d_a \mathbf{u_a}}{dt}$$

Aus den Messungen auf der Erde nur die relative Windgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ und damit die relative Beschleunigung bekannt ist

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$$\mathbf{u_a} = \mathbf{u} + \Omega \wedge \mathbf{r}$$

Mit $\mathbf{A} = \mathbf{u_a}$

$$\frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} + \Omega \wedge \mathbf{u}_a$$

$$\frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})$$

$$\underbrace{\frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt}}_{\text{absolute Beschleunigung}} = \underbrace{\frac{d\mathbf{u}}{dt}}_{\text{relative Beschleunigung}} + \underbrace{2\Omega \wedge \mathbf{u}}_{\text{Coriolis-Beschleunigung}} + \underbrace{\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})}_{\text{Zentripetal-Beschleunigung}}$$

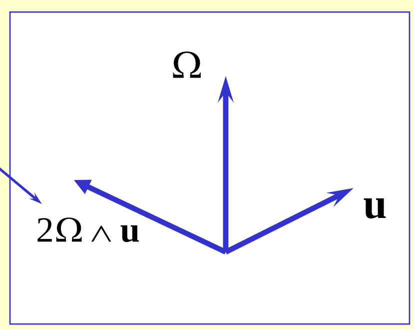
absolute Beschleunigung

relative Beschleunigung

Coriolis-Beschleunigung

Zentripetal-Beschleunigung

wirkt senkrecht zum Rotationsvektor und senkrecht zur Bewegungsrichtung und ist direkt proportional zum Betrag von $\mathbf{u}$ und Ω.

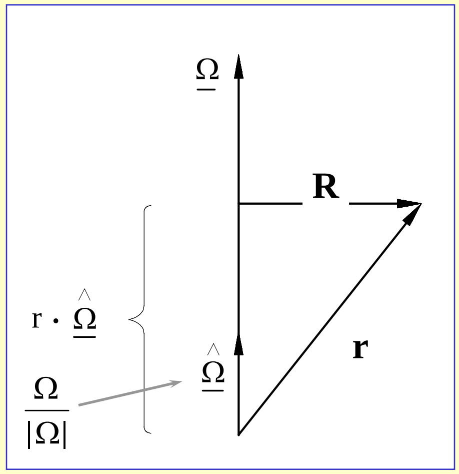


Zentripetalbeschleunigung

Ortsvektor r wird zerlegt

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}.\hat{\Omega})\hat{\Omega} + \mathbf{R}$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r}) = \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{R}) = -|\Omega|^2\,\mathbf{R}$$



Die Zentripetalbeschleunigung ist *nach innen*, zur Rotationsachse hin, gerichtet und hat den Betrag $|\Omega|^2 R$

Das zweites Gesetz von Newton in einem rotierenden Bezugssystem

In inertialen Bezugssystem:

$$\rho \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = \mathbf{F}$$

Dichte

Kraft pro Einheitsmasse

In rotierenden Bezugssystem:

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})\right) = \mathbf{F}$$

Entspricht ➡ $\rho\mathbf{a}' + \rho\mathbf{a}'' = \mathbf{F}$

Alternative Schreibweise

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \underbrace{2\rho\Omega \wedge \mathbf{u}}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{\rho\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

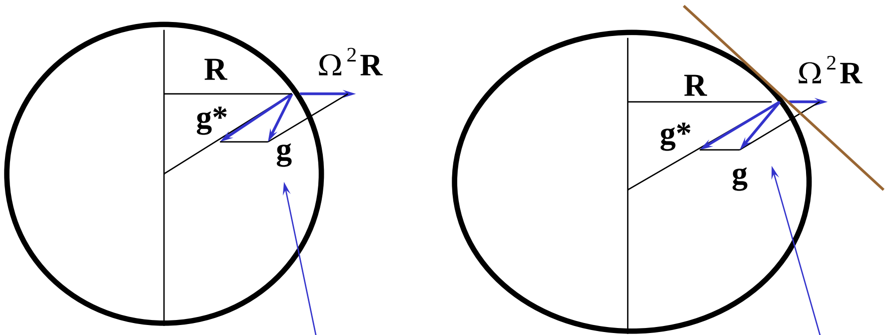
Effektive Schwerkraft

Wäre die Erde eine nicht-rotierende ideale Kugel, würde nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz nur die Gravitationskraft **g*** pro Masseneinheit wirken.

Wäre die Erde eine rotierende ideale Kugel, würde sich die effektive Schwerkraft **g** aus der Vektoraddition der Gravitationskraft **g*** und der Zentrifugalkraft $\Omega^2\mathbf{R}$ ergeben

$$\Rightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}$$

g steht überall senkrecht zur Erdoberfläche



effektive Schwerkraft **g** auf einer kugel-förmigen Erde

effektive Schwerkraft auf einer leicht abgeplatteten Erde:

Sei die Gesamtkraft **F = g* + F´** zerlegt

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}' + \mathbf{g}^* - 2\rho\Omega \wedge \mathbf{u} - \rho\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r}) = -|\Omega|^2 \, \mathbf{R}$$

Mit $\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}' + \rho\mathbf{g} - 2\rho\Omega \wedge \mathbf{u}$$

Die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation erscheint in der Gleichung nicht mehr explizit; sie ist in der effektiven Schwerkraft enthalten.

Wenn Reibungskräfte vernachlässigt werden können, wirkt auf ein Luftpaket neben der Schwerkraft vor allem die Druckgradientkraft

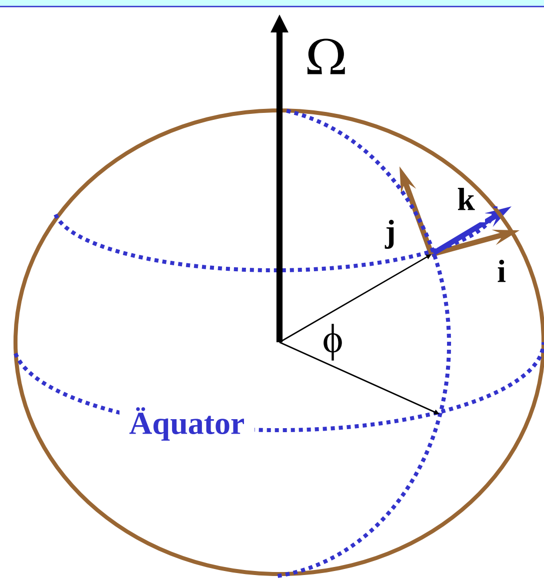
$$\mathbf{F}' = -\nabla p$$ **pro Volumeneinheit**

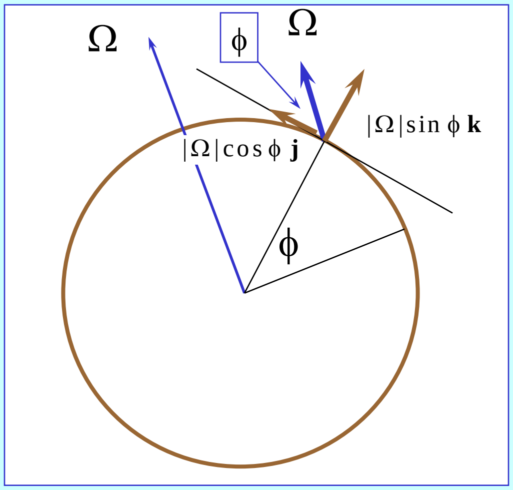
$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}' + \rho \mathbf{g} - 2\rho\Omega \wedge \mathbf{u}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - 2\Omega \wedge \mathbf{u}$$ **pro Masseneinheit**

In dieser Form beschreibt das 2. Newton'sche Gesetz die reibungsfreie Bewegung eines Luftpakets in einem Bezugssystem auf der rotierende Erde.

Koordinaten auf die Erde





$$\boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|\cos\,\mathbf{j} + |\boldsymbol{\Omega}|\sin\phi\,\mathbf{k}$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} = |\boldsymbol{\Omega}|\cos\phi\;\mathbf{j} \wedge \mathbf{u} + |\boldsymbol{\Omega}|\sin\phi\;\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} = 2\,|\boldsymbol{\Omega}|\cos\phi\;\mathbf{j} \wedge \mathbf{u} + \underline{2\,|\boldsymbol{\Omega}|\sin\phi\;\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}}$$

Für Luftbewegungen in Zusammenhang mit den Tiefdruck- und Hochdruckgebieten der mittleren Breiten zeigt eine Abschätzung, daß nur dieser Term von Bedeutung ist. (Siehe z. B. Holton, 1979, Kapitel 2,4)

In guter Näherung gilt daher

$$2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} = \underline{2\,|\boldsymbol{\Omega}|\sin\phi}\;\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}} \wedge \mathbf{u}$$

$$f = 2\,|\boldsymbol{\Omega}|\sin\phi \qquad \mathbf{f} = f\,\mathbf{k}$$

Coriolisparameter

Geostropische Bewegung

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}$$

$\mathbf{u} = (u,v,w)$
$\mathbf{u_h} = (u,v,0)$

$$\cancel{\frac{d\mathbf{u}_h}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p - \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}_h$$

dies ist relativ klein für großräumige Luftbewegung in der Atmosphäre

In erster Näherung gilt

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p - \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}_h$$

Die vertikale Komponent der Bewegungsgleichung ist

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

dies ist auch klein für großräumige Luftbewegung in der Atmosphäre

$\Rightarrow$ $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

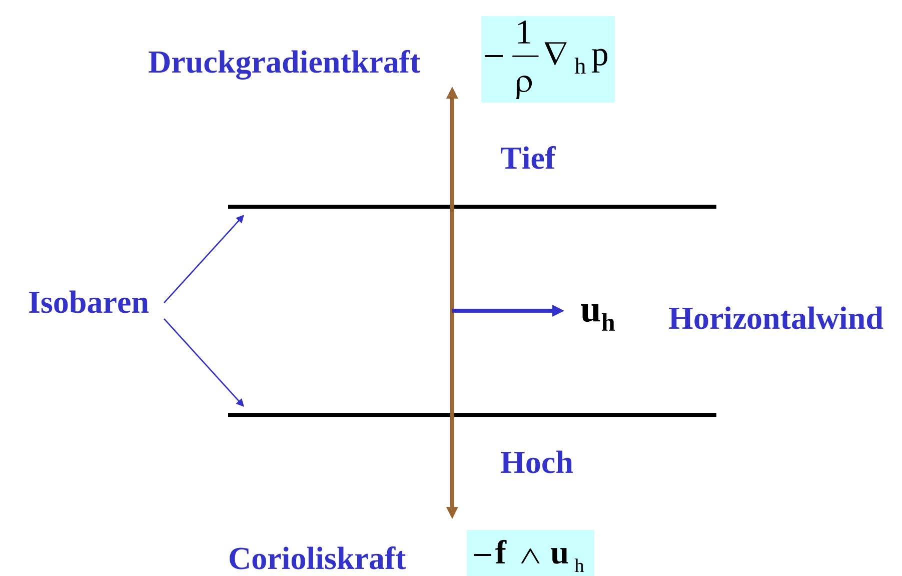
$\Rightarrow$ **hydrostatisches Gleichgewicht herrscht**

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p - \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}_h$$

Für den Fall einer großräumigen, reibungsfreien Luftströmung, besteht ein Gleichgewicht zwischen der horizontalen Druckgradientkraft und der Corioliskraft

Die Luftströmung befindet sich im geostropischen Gleichgewicht.

Geostropische Gleichgewicht



Lösung für den geostrophischen Wind

$$f\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_h = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p$$

Man bildet auf beiden Seiten das Vektorprodukt mit k

$$\underline{f\,\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_h)} = -\mathbf{k} \wedge \frac{1}{\rho}\nabla_h p$$

Für dreifache Vektorprodukte

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$f\,\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_h) = f\underbrace{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_h)\mathbf{k}}_{=0} - \underbrace{f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{u}_h}_{= f\mathbf{u}_h}$$

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{k} \wedge \frac{1}{\rho f}\nabla_h p$$

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{k} \wedge \frac{1}{\rho f}\nabla_h p = \frac{1}{\rho f}\left[-\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x}, 0\right]$$

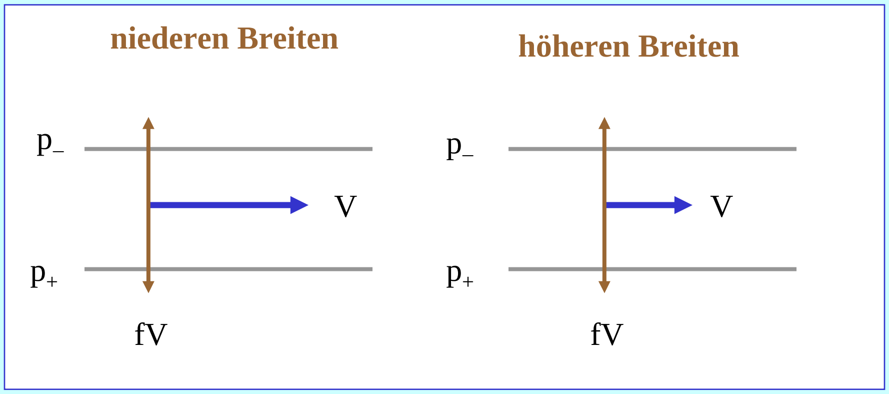
$$|\mathbf{u}_h| = \frac{1}{\rho f}|\nabla_h p|$$

Zwischen dem geostrophischen Wind $\mathbf{u_h}$ und dem Druckgradienten besteht eine lineare Abhängigkeit

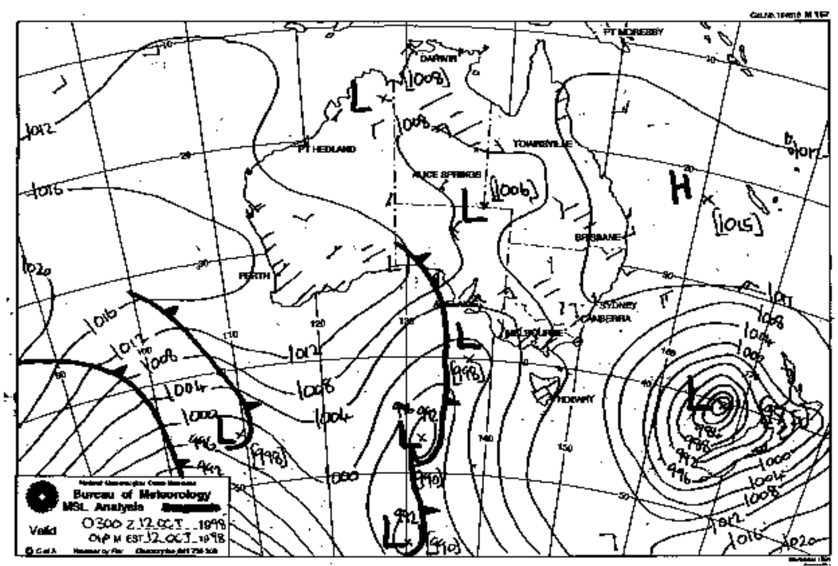
Ein Blick auf eine Wetterkarte bestätigt dieses Ergebnis: je kleiner der Isobarenabstand, desto stärker der Wind.

Die geostrophische Windgeschwindigkeit hängt durch f von der geographischen Breite ab.

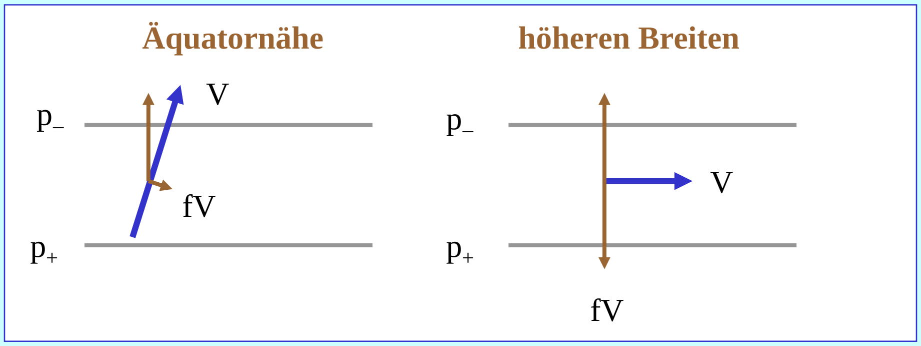
➢ **In niederen Breiten ist bei gleichem Druckgradienten der Wind stärker als in höheren Breiten.**



Ein Beispiel



- Direkt am Äquator, wo f null wird, wäre die Geschwindigkeit des geostrophischen Windes unendlich groß.
- In Äquatornähe kann man die geostrophische Näherung nicht anwenden. die Luftströmung in diesen Gebieten ist nicht parallel sondern quer zu den Isobaren vom höheren zum tieferen Druck gerichtet.

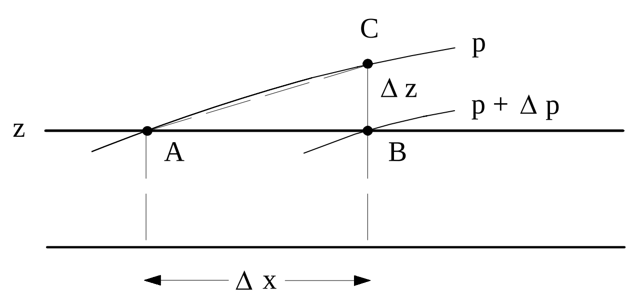


- Im Rechenbeispiel, daß wir von ein paar Wochen angeschaut haben, ergab sich bei einem Druckgradienten von 10 mb/1000 km und $\rho = 1$ kg/m^3 eine Beschleunigung von 10^{-3} m s^{-2}.
- Daraus ergibt sich für ein Luftpaket nach einem Tag (10^5s) die viel zu große Geschwindigkeit von 100 m s^{-1} .
- Nimmt man dagegen geostrophisches Gleichgewicht bei $\phi = 45°$ ($f = 10^{-4}$s^{-1}) an, errechnet sich eine Wind-geschwindigkeit von 10 m s^{-1}.
- Dieser Wert stimmt ungefähr mit der beobachteten Windstärke überein.

Der Druck als vertikale Koordinate

- **Auf Wetterkarten für die freie Atmosphäre analysiert man nicht die Druckverteilung auf bestimmten Niveaufläche (z. B. Meeresniveau) sondern man stellt die Höhenverteilung auf ausgewählten Druckflächen (z. B.** 300 mb**) dar.**
- **Diese Druckflächen sind nahezu horizontal.**
- **Die Frage ist: wie soll man das Newton'sche Gesetz anwenden, wenn definitionsgemäß auf einer Druckfläche kein Druck-gradient besteht?**

Transformation von Höhenkoordinaten (x, y, z) auf Druckkoordinaten (x, y, p)



$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=\text{const.}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{p_B - p_A}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{p_B - p_C}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad \text{weil } p_C = p_A$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x=\text{const.}}}_{-\rho g} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{p=\text{const.}} = -\rho g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{p=\text{const.}}$$

Es gibt also die Beziehung

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=\text{const.}} = -g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{p=\text{const.}}$$

- **bei der Transformation von Höhenkoordinaten** (x,y,z) **auf Druckkoordinaten** (x,y,p)**, der Druckgradient in der Bezugshöhe z übergeht in einen quasi-horizontalen Gradienten der geopotentiellen Höhe auf der jeweiligen Druckfläche.**

- **Beim Übergang von Höhenkoordinaten auf Druckkoordinaten muß man den horizontalen Druckgradient pro Masseneinheit durch die Neigung der Druckfläche, multipliziert mit** g**, ersetzen.**

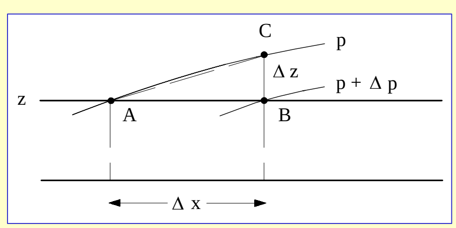
Die geostrophische Gleichung in Druckkoordinaten

$$f\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{V} = -g\nabla_p z$$

Ableitung bei konstantem p

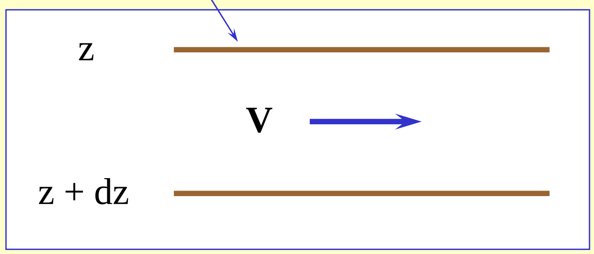
$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \wedge \frac{g}{f}\nabla_p z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z_c - z_A}{\Delta x}$$



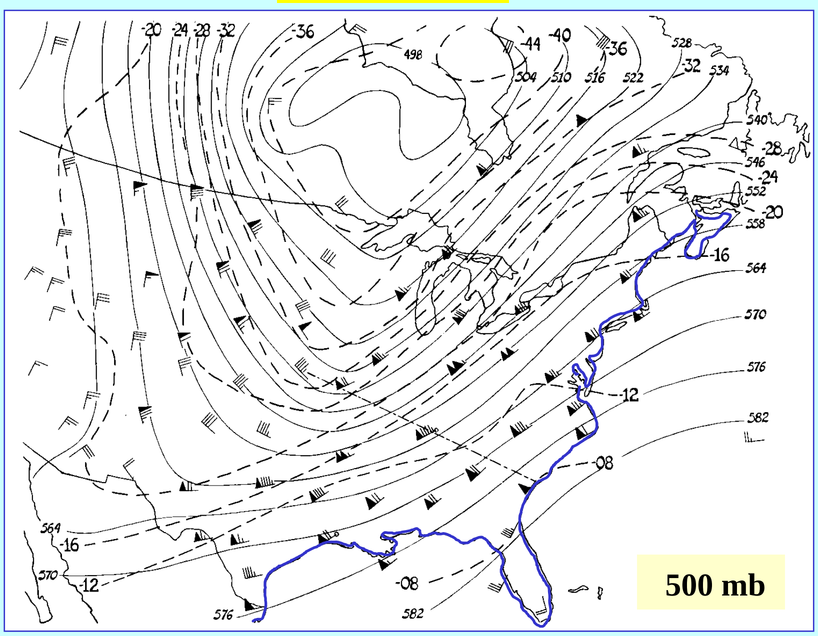
$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \wedge \frac{g}{f} \nabla_p z$$

der geostrophische Wind im p-System bläst parallel zu den Isohypsen.



die niedrigeren Geopotentialwerte auf der Nordhalbkugel liegen in Strömungsrichtung gesehen links

Ein Beispiel



Zusammenfassung 1

1. Reibungsfrei Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - 2\Omega \wedge \mathbf{u}$$

pro Masseneinheit

2. Geostrophische Bewegung

$$f\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_h = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

3. Lösung

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{k} \wedge \frac{1}{\rho f}\nabla_h p$$

Zusammenfassung 2

4. Geostrophische Gleichung in Druckkoordinaten

$$f\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{V} = -g\nabla_p z$$

5. Lösung

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \wedge \frac{g}{f}\nabla_p z$$


Ende