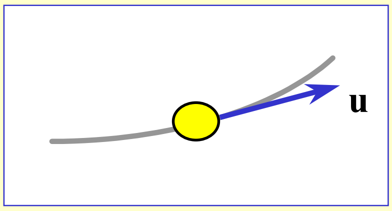
Totale Ableitung, Advektion

Die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - \mathbf{f} \wedge \mathbf{u}$$

stellt die Beschleunigung eines Luftteilchens dar



die Ableitung nach der Zeit d/dt **muß so ausgerechnet sein, daß man die Bahn eines einzelnen Luftpakets verfolgt**

Strömungsfelder

- **Im allgemeinen haben wir keine Interesse an das Schicksal eines einzelnen Luftpakets, denn dieses Luftpaket unterscheidet sich durch nichts von den anderen.**
- **Die abhängigen Variablen wie Temperatur** T, **Druck** p, **oder Geschwindigkeit** $\mathbf{u}$ **werden dann als Felder behandelt**

$$\Downarrow$$

- **Die Größen werden in den verschiedenen Raumpunkten skalare bzw. vektorielle Werte zugewiesen, die sich noch zeitlich verändern können:**

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t) \quad \text{etc.}$$

Für ein Teilchen in der Lage $[x(t), y(t), z(t)]$ **ist, z. B.**

$$T = T[x(t), y(t), z(t), t]$$

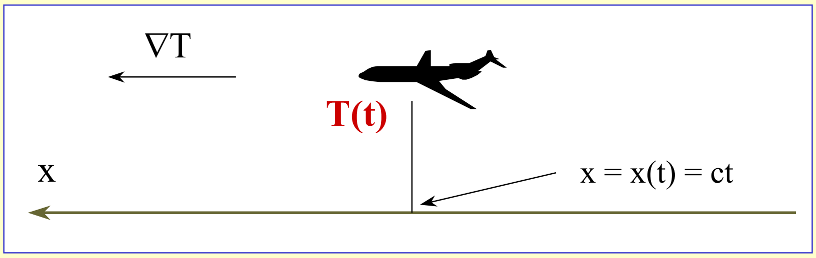
Wenn man an einem festen Punkt (x_0, y_0, z_0) **steht**

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{xo,\, yo,\, zo}$$

- **Man befindet sich an Bord eines Forschungsflugzeuges und registriert die Temperatur** T **während eines Meßfluges.**
- **Welche Temperaturänderung beobachtet man in diesem Fall?**
- **Es befindet sich einen horizontalen Temperaturgradient in Flugrichtung und die Temperatur andert sich mit der Zeit:** $T = T(x,t)$.

Advektion

Ein Flugzeug habe zur Zeit t **die Position** $x(t)$ **und bewege sich mit der Geschwindigkeit** $c(t) = dx/dt$**.**



Das Flugzeug legt in einem kleinen Zeitintervall dt **die Strecke** $dx = cdt$ **zurück und erreicht einen Nachbarpunkt** $x + dx$**.**

Das totale Differential dT **der Funktion** $T(x,y,z,t)$ **ergibt sich aus der Kettenregel zu**

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dT + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

Die totale (oder substantielle) Änderung von T **ist**

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} \quad + \nabla T \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} \quad + \mathbf{c} \cdot \nabla T \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla T$$

die lokale Änderung von T

die Temperaturänderung pro Zeiteinheit, die ein ortsfester Beobachter bei c = 0 mißt

-

z.B. in einem in der Luft stehende Hubschrauber.

die Änderung von T auf Grund der Bewegung mit einer Geschwindigkeit c

---

Wenn das Temperaturfeld T **nur räumliche Abhängigkeit besitzt, d.h.** $T = T(x,y,z)$**, ist**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \mathbf{c} \cdot \nabla T$$

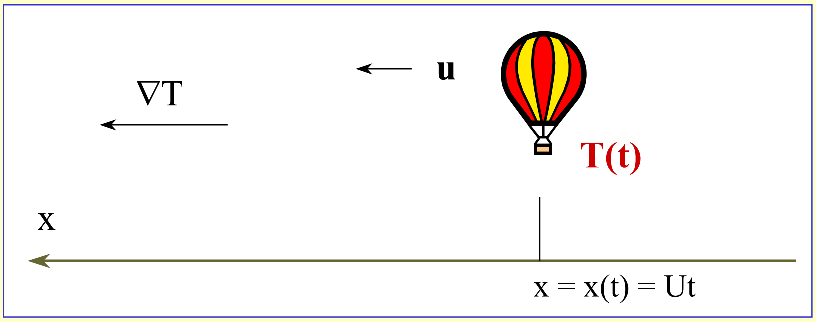
Diese Art der Temperaturänderung nennt man Advektion.

Sie tritt auf, wenn bei der Bewegung mit der Geschwindigkeit c der räumliche Temperaturgradient ∇T **besteht.**

Im allgemeinen Fall setzt sich die totale Änderung aus der Summe der lokalen Änderung und der Advektion zusammen.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla T$$

Nun werde die Temperatur in einem Ballon gemessen, der sich mit der Windgeschindigkeit **u** bewegen soll.



Die totale Änderung der Temperatur ist

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

die Temperaturänderung, die ein Beobachter registriert, der sich mit den Luftpaketen mitbewegt

Um es deutlich zu machen, daβ sich dieTemperaturänderung auf einer bewegende Luftpaketen bezieht, verwendet man für die totale Ableitung das Symbol D/Dt anstelle von d/dt:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

Diese Ableitung läßt sich natürlich auch auf andere physikalische Größen anwenden.

z.B. sie kann auf die drei Windkomponenten u, v, w, des Windvektors **u** angewandt werden

Die Beschleunigung eines Luftpakets kann geschrieben werden

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv (\mathbf{u} \cdot \nabla u, \mathbf{u} \cdot \nabla v, \mathbf{u} \cdot \nabla w)$

Temperaturadvektion

Wir betracten eine Luftmasse in der ein in allen Höhen gleich großer Temperaturgradient besteht.

Die Luftmasse wird durch einen einheitlichen (horizontalen) Wind $\mathbf{u}$ verlagert.

Es sind keine Wärmequellen oder Wärmesänken vorhanden.

Die Temperatur bleibt in jedem Luftpaket konstant.

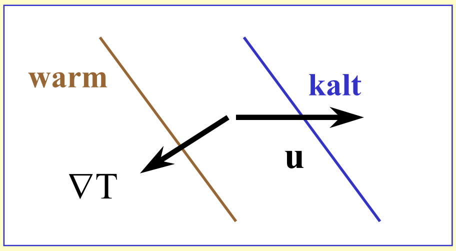
$$\frac{DT}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\,\mathbf{u}\cdot\nabla T$$

die Temperaturänderung an einem festen Ort

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\,\mathbf{u}\cdot\nabla T$$

Die lokale Temperaturänderung ist in diesem Fall gleich minus der advektiven Temperaturänderung.

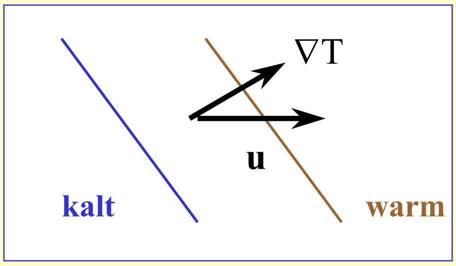
Warmluftadvektion



Der Wind bringt $\mathbf{u}$ wärmere Luft, denn die zu T parallele Windkomponente ist von der wärmeren zur kälteren Luft gerichtet.

Ein stationärer Beobachter wird eine Temperaturerhöhung messen.

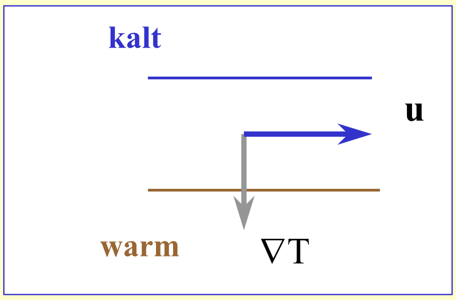
Kaltluftadvektion



Hier bringt der Wind **u** kältere Luft, denn die zu T parallele Windkomponente ist von der kälteren zur wärmeren Luft gerichtet.

Ein stationärer Beobachter eine wird Temperaturabnahme messen.

Keine Temperaturadvektion



$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = 0$$

Hier bläst der Wind **u** parallele zu den Isothermen. Ein stationärer Beobachter wird keine Temperaturänderung messen - die Temperatur bleibt überall konstant.

Schichtdickenadvektion

Annahmen:

- **der Wind soll geostrophisch sein.**
- **T soll unabhängig von der Höhe (oder vom Druck) sein.**
- **keine Wärmequellen oder -senken vorhanden sind.**

In Druckkoordinaten lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}(x;y,p) \cdot \nabla T = 0$$

Die Schichtdicke D **zwischen zwei Druckflächen** p_0 **und** p **beträgt**

$$D = \frac{R}{g} \int_p^{p_0} T \, d \ln p$$

Daraus ergibt sich für die zeitliche Änderung der Schichtdicke

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{R}{g} \int_p^{p_0} \frac{\partial T}{\partial t} d \ln p$$

$$= \frac{R}{g} \int_p^{p_0} [\mathbf{u}(x,y,p) \cdot \nabla T] \, d \ln p$$

Der geostrophische Wind $\mathbf{u} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u_T}$

der geostrophische Wind auf der Druckfläche p_0

der thermische Wind zwischen p_0 **und** p

$$\mathbf{u_T}(p) = \frac{g}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla_p D$$

läßt sich umformen zu

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{R}{g}\int_p^{p_o}\left[(\mathbf{u}_o + \mathbf{u}_T(p))\cdot\nabla T\right]\, d\ln p$$

$$= \frac{R}{g}\int_p^{p_o}(\mathbf{u}_o\cdot\nabla T)\, d\ln p + \frac{R}{g}\int_p^{p_o}(\mathbf{u}_T(p)\cdot\nabla T)\, d\ln p.$$

$\mathbf{u}_o$ ist unabhängig von p und nur annähernd horizontale Komponente besitzt

($\mathbf{u}_o\cdot\nabla$) kann vor das Integralzeichen gestellt werden

$\mathbf{u}_T$(p) wirkt senkrecht zum Temperaturgradienten

$\mathbf{u}_T\cdot\nabla T = 0$

Es folgt daher $\frac{\partial D}{\partial t} = -\mathbf{u}_o\cdot\nabla D$

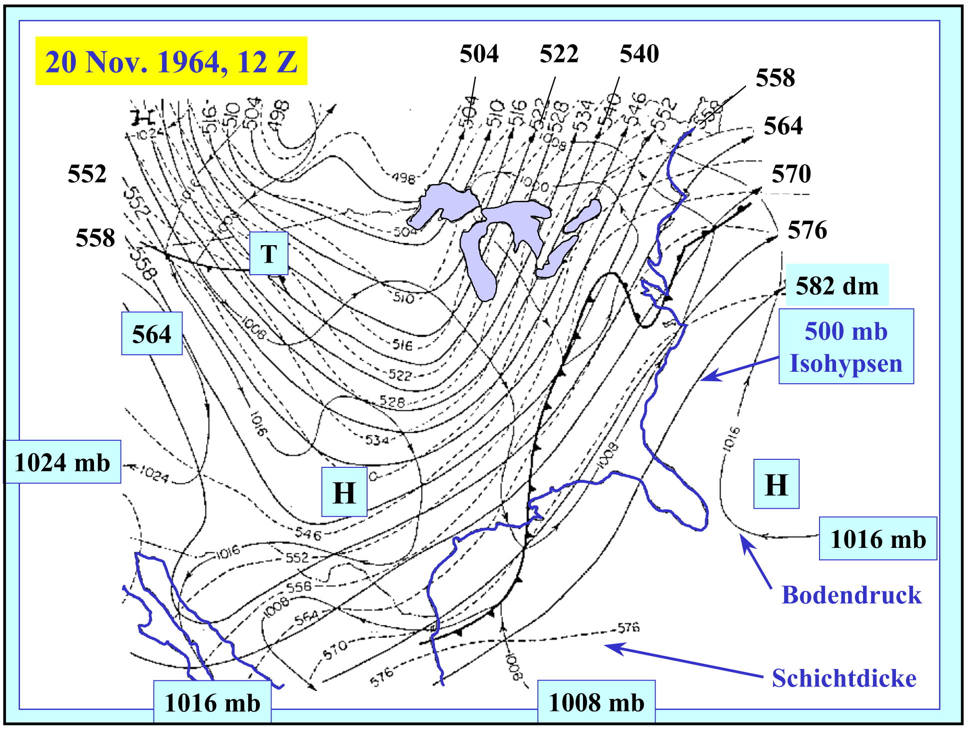
Wenn man p_o = 1000 mb wählt, bedeutet

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\mathbf{u}_o\cdot\nabla D$$

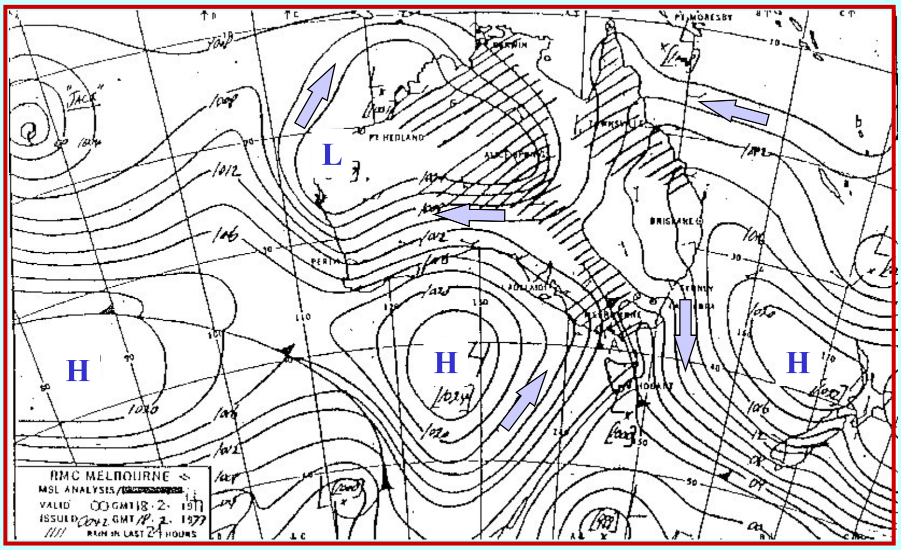
daß unter den angegebenen Bedingungen: - geostrophische Bewegung, Temperaturgradient unabhängig von der Höhe -, die Schichtdicke vom bodennahen geostrophischen Wind advehiert wird.

Dieses Ergebnis ist für praktische Anwendungen sehr nützlich. Wenn man einer Bodenkarte eine Schichtdickenkarte überlagert, lassen sich die Gebiete mit Kaltluftadvektion bzw. Warmluftadvektion identifizieren.

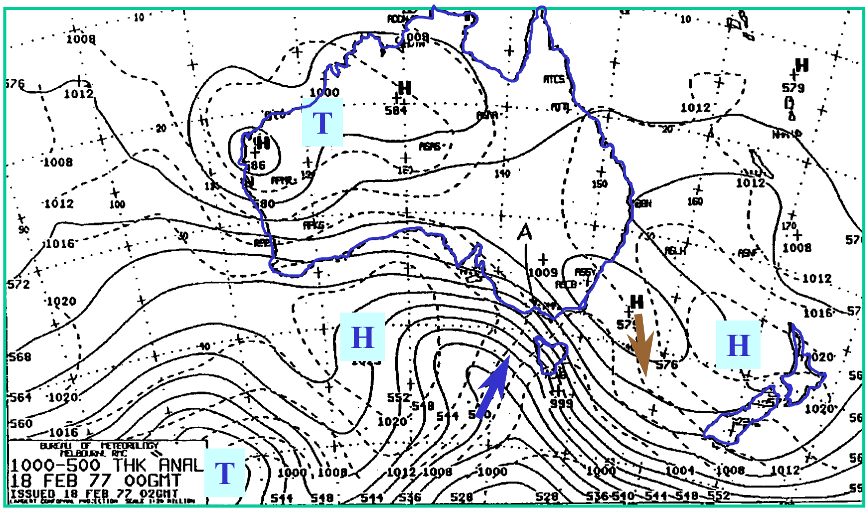
Es ist also nicht erforderlich, den mittleren Wind für die gesamte Schicht zu berechnen, es genügt das geostrophische Bodenwindfeld.



Bodenkarte über Australien



Boden/Schichtdickekarte vom australischen Gebiet 18 Feb 1977



Bodendruck

1000 - 500 mb Schichtdicken

Die thermodynamische Gleichung

Die potentielle Temperatur in einem Luftpaket bleibt erhalten, wenn die Bewegung adiabatisch verläuft, d.h. wenn kein Wärmeaustausch zwischen Luftpaket und Umgebungsluft stattfindet.

Mathematisch läßt sich die Erhaltung der potentiellen Temperatur in der sogenannten thermodynamischen Gleichung formulieren:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

sagt aus, daß der erste Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt ist.

Wenn Wärmequellen oder Wärmesenken nicht vernachlässigt werden können, gilt der erste Hauptsatz in der differentiellen Form

$$dq = c_p dT - \alpha dp$$

In dT **und** dp **sind die Temperatur- und Druckänderung im Luftpaket infolge der Wärmezufuhr** dq **erhalten.**

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung $p\alpha = RT$**, ergibt sich**

$$\frac{dq}{T} = c_p \left(\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p}\frac{dp}{p} \right) = c_p \, d \ln \theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{D}{Dt} \ln \theta = \frac{1}{c_p T}\frac{Dq}{Dt} = \frac{\overset{\circ}{H}}{c_p T}$$

Aus $\frac{D}{Dt} \ln \theta = \frac{\overset{\circ}{H}}{c_p T}$ **läßt sich eine Gleichung für die Änderung der Temperatur im Zeitintervall** dt **ableiten:**

$$\theta = T\left(\frac{p^*}{p}\right)^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \ln \theta = \ln T + \kappa \ln p^* - \kappa \ln p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\theta}\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{DT}{Dt} - \frac{\kappa}{p}\frac{Dp}{Dt} = \frac{\dot{H}}{c_p T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\kappa T}{p}\omega + \frac{\overset{\circ}{H}}{c_p T}$$

$$\omega = \frac{Dp}{Dt}$$

Die Größe $\omega = \frac{Dp}{Dt}$ gibt die Druckänderung im Luftpaket an.

- Normalerweise nimmt der Druck in einem aufsteigenden Luftpaket ab (für hydrostatische Bewegung).
- In einem absinkenden Luftpaket nimmt er zu.

$\Downarrow$

- der Vertikalgeschwindigkeit w ist mit ω negativ korreliert.

$$\omega = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

- für hydrostatische Bewegungen gilt

$$\omega = \frac{D_h p}{Dt} - \rho g w$$

Interpretierung der Gleichung

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\kappa T}{p}\omega + \frac{\mathring{H}}{c_p T}$$

gibt die adiabatische Temperaturveränderung auf Grund einer Druckänderung während der Bewegung an

beschreibt die sogenannten diabatischen Prozesse, d.h. die Wirkung von direkter Erwärmung oder Abkühlung.

Lokale Temperaturänderung

Die Temperaturgleichung kann umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underline{-\mathbf{u} \cdot \nabla T} + \frac{\kappa T}{p}\omega + \frac{\overset{\circ}{H}}{c_p T}$$

Zusätzlich tritt in dieser Gleichung der Advektionsterm auf.

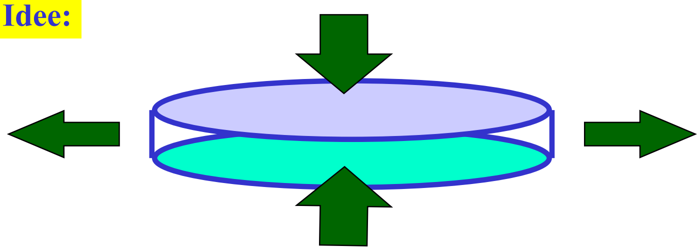
Zu lokaler Temperaturzunahme(abnahme) kommt es durch:

- **advektion wärmerer (kälterer) Luft**
- **adiabatische Absinkbewegung (Hebung) und/oder diabatische Wärmezufuhr (entzug).**

Die Kontinuitätsgleichung

- **Die Lösung der Bewegungsgleichung für Gasströmungen ist schwieriger als für Festkörper, weil zusätzlich eine Massen-erhaltungsgleichung (Kontinuitätsgleichung) erfüllt sein muß.**
- **Nun geht es um die mathematische Formulierung der Kontinuitätsgleichung in Druckkoordinaten** (x, y, p).
- **Wallace and Hobbs veranschaulichen das Prinzip der Kontinuitätsgleichung mit einem dicken, weichen Pfannkuchen.**
- **Wird der Pfannkuchen zwischen zwei flachen Tellern gequetscht, divergiert er in horizontaler Richtung, weil das ursprüngliche Volumen erhalten bleibt.**

die Idee:



- Luftpakete verhalten sich nicht viel anders, wenn sie durch ein großräumiges Strömungsfeld deformiert werden.
- Im Gegensatz zu einem weichen Pfannkuchen sind Luftpakete jedoch kompressibel, d.h. sie können ihr Volumen ändern.

Im allgemeinen lassen sich zwei Typen von Volumenänderungen unterscheiden:

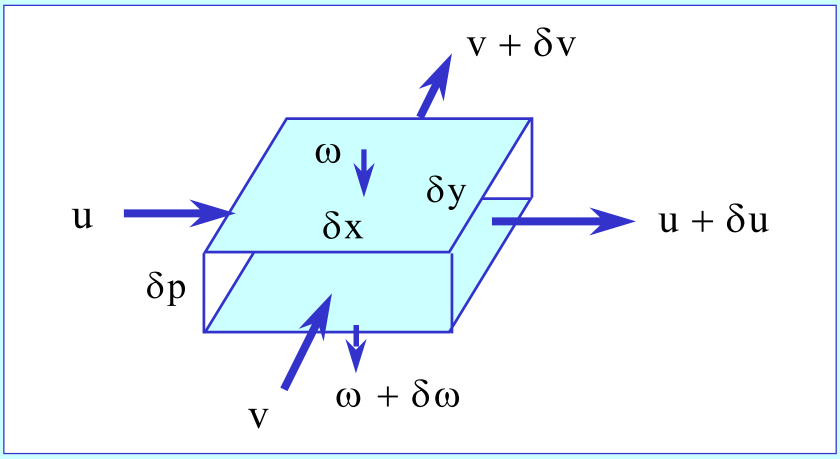
Schallwellen

- (a) Nicht hydrostatische Volumenschwankungen, verbunden mit Schallwellen und
- (b) langsamere, hydrostatische Volumenänderungen, verursacht durch Ausdehnung oder Verdichtung der Luft bei hydrostatischen Druckänderungen.
- Die nicht hydrostatischen Volumenänderungen haben extrem kleine Amplituden bzw. extrem hohe Frequenzen - sie wirken sich daher nicht auf die großräumigen atmosphärischen Bewegungen aus. Der Energiegehalt dieser Schwankungen ist vernachlässigbar.

Hydrostatische Änderungen

- Die hydrostatischen Änderungen können recht groß werden und die Luftströmungen in der Atmosphäre beeinflussen.
- Die nicht hydrostatischen Störungen sind automatisch ausgeschlossen, wenn man die Kontinuitätsgleichung in (x, y, p)-Koordinaten formuliert.

Mathematische Formulierung der Kontinuitätsgleichung



Für eine Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht beträgt die Masse des Quaders:

$$\delta p = -\rho g\,\delta z$$

$$\delta M = \rho \delta x\,\delta y\,\delta z = -\frac{\delta x\,\delta y\,\delta p}{g}$$

- Im Laufe der Zeit wird der Quader durch die Scherungen und Deformationen im Bewegungsfeld bis zur Unkenntlichkeit verdreht und verformt.
- Wir betrachten die Veränderungen ganz am Anfang der Bewegung , oder mathematisch ausgedrückt, in einem unendlich kleinen Zeitinterval δt.
- Innerhalb dieses Zeitintervalls wird der Quader zu einem Parallelepiped deformiert. Dabei bleibt die Masse des Quaders konstant.

Mathematisch schreibt man

$$\frac{D}{Dt}(\delta x \delta y \delta p) = 0$$

$$\delta y\,\delta p\frac{D}{Dt}(\delta x) + \delta x\,\delta p\frac{D}{Dt}(\delta y) + \delta x\,\delta y\frac{D}{Dt}(\delta p) = 0$$

Die Ableitung gibt an, wie sich die Seitenflächen des Quaders in x-Richtung im Zeitintervall t verändern.

$$\frac{D}{Dt}(\delta x) = \delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x$$

Die zeitlichen Änderungen von δy und δp können analog ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

die Kontinuitätsgleichung

Zur Interpretation der Kontinuitätsgleichung definieren wir $A = \delta x\, \delta y$ **in**

$$\frac{D}{Dt}(\delta x \delta y \delta p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta p \frac{DA}{Dt} + A \underline{\frac{D}{Dt}(\delta p)} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}(\delta p) = \delta\omega = \frac{\partial \omega}{\partial p}\delta p$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{1}{A}\frac{DA}{Dt}} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

eine weitere Form der Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{A}\frac{DA}{Dt}$$

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} = \underline{\frac{1}{A}\frac{DA}{Dt}}$$

die horizontale Divergenz des horizontalen Windvektors V (in kartesischer Form)

der relativen Änderung der Boden- bzw. Deckenfläche des Luftquaders

$$= \nabla_p \cdot \mathbf{V}$$

Der tiefgestellte ´p´ betont, daß die Ableitung nach x **und** y **auf einen isobaren Fläche erfolgt**

- **bei horizontaler Divergenz** $\nabla_p \cdot \mathbf{V} > 0$ **, der Luftquader in vertikaler Richtung gestaucht wird** $\partial\omega / \partial p < 0$
- **horizontale Konvergenz** $\nabla_p \cdot \mathbf{V} < 0$ **, bewirkt vertikale Streckung** $\partial\omega / \partial p > 0$

Für ein Gas (oder eine Flüssigkeit) mit konstanter Dichte läßt sich zeigen, daß in diesem Fall die Kontinuitätgleichung auch in (x, y, z)-Koordinaten eine analoge Form annimmt.

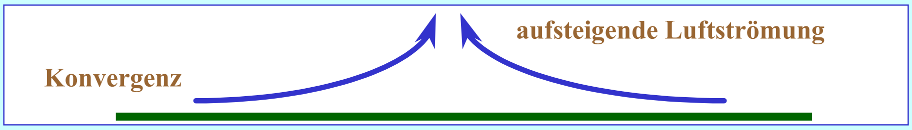
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

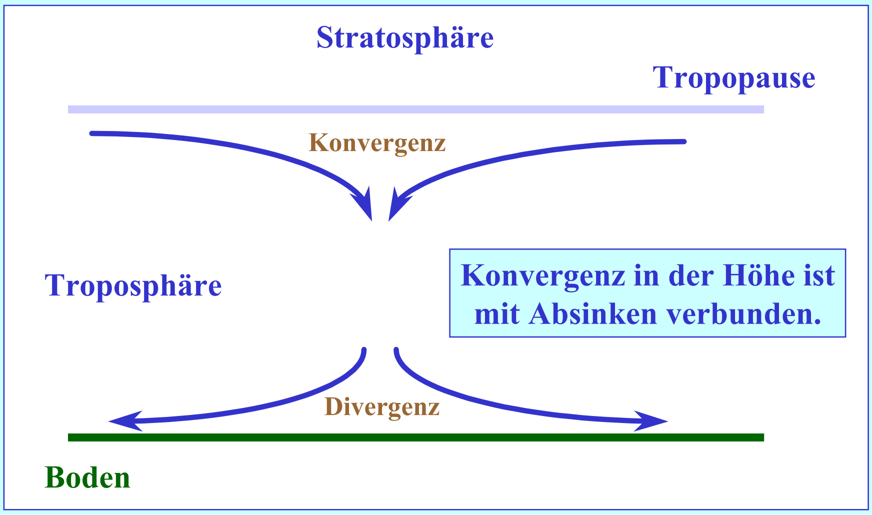
In einem Gebiet mit konvergenter Strömung in Bodennähe

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

Direkt am Boden ist $w = 0$

$\Rightarrow$ in den unteren Luftschichten ist $w > 0$





Die Tropopause wirkt auf Vertikalbewegungen in der oberen Troposphäre wie ein fester Deckel

Zusammenfassung 1

1. **Die totale Ableitung**

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

2. **Die Beschleunigung eines Luftpakets**

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv (\mathbf{u} \cdot \nabla u, \mathbf{u} \cdot \nabla v, \mathbf{u} \cdot \nabla w)}$$

3. **Temperaturänderung durch Advektion**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\, \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

Zusammenfassung 2

4. **Die Schichtdicke wird vom bodennahen geostrophischen Wind advehiert.**

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\mathbf{u}_{\mathbf{o}} \cdot \nabla D$$

5. **Die thermodynamische Gleichung**

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\omega = \frac{Dp}{Dt}$$

oder

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\kappa T}{p}\omega + \frac{\mathring{H}}{c_p T}$$

Zusammenfassung 3

4. Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

5. Für ein Gas (oder eine Flüssigkeit) mit konstanter Dichte in (x, y, z)-**Koordinaten**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- **bei horizontaler Divergenz** $\nabla_p \cdot \mathbf{V} > 0$ $\quad \partial \omega / \partial p < 0$
- **bei horizontale Konvergenz** $\nabla_p \cdot \mathbf{V} < 0$ $\quad \partial \omega / \partial p > 0$