

Nächster Abschnitt =>

➤ Gradientwindgleichung

Strömungsverhältnisse bei gekrümmten Isobarenverlauf

- Das geostrophische Gleichgewicht zwischen Druckgradientkraft und Corioliskraft **gilt nur** für Luftströmung entlang geradliniger Isobaren, wenn keine Zentrifugalkräfte wirken.
- In vielen Fällen sind die Bahnen der Luftteilchen in der freien Atmosphäre jedoch so schwach gekrümmt, daß der Wind annähernd geostrophisch ist.
- Bei **stark gekrümmten Bahnen oder kreisförmiger bewegung**, z. B. in Tiefdruckgebieten, insbesondere tropische Zyklonen, Tornados, Windhosen oder Staubteufeln kann man jedoch die Zentrifugalkräfte nicht vernachlässigen.

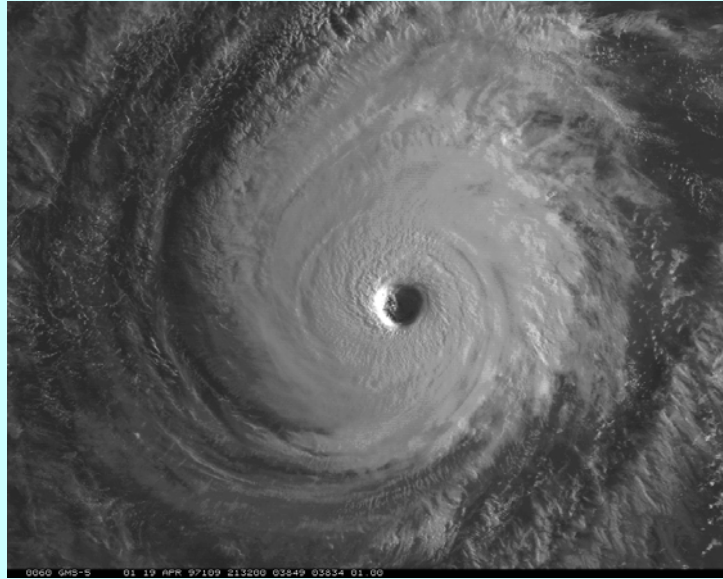
Wasserhosen



Staubteufel

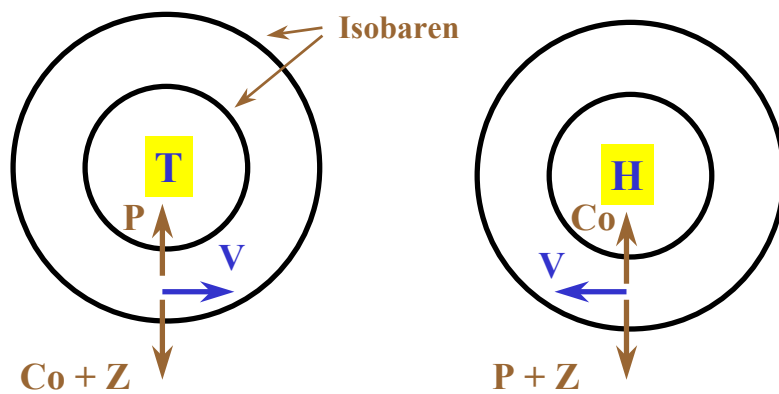


Satellitenaufnahme einer tropischen Zyklone



zykloner Gradientwind

antizykloner Gradientwind



$$P = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad Co = fV \quad Z = \frac{V^2}{r}$$

Gradientwindgleichung

$$-fV - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

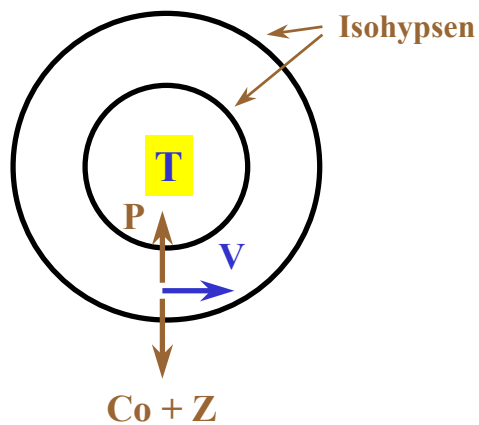
Coriolisbeschleunigung

Zentripetalbeschleunigung

Druckgradientkraft

- Nach einer Konvention ist V in antizyklonal gekrümmten Strömungen negativ.

Gradientwindgleichung in Druckkoordinaten



$$P = -g \frac{\partial z}{\partial r}$$



$$fV + \frac{V^2}{r} = g \frac{\partial z}{\partial r}$$

Gradientwindformel

$$\frac{V^2}{r} + fV - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

- Wenn der Druckgradient (Isobarabstand) bekannt ist, ergibt sich V aus der Lösung folgender quadratischen Gleichung

$$V = -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2} \left[r^2 f^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{dp}{dr} \right]^{1/2}$$

- Das Vorzeichen wurde so gewählt, daß bei großem Radius r , d.h. kleiner Zentrifugalkraft V^2/r , die Gleichung wieder zur geostrophischen Gleichung wird. → →

$$V = -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2} \left[r^2 f^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{dp}{dr} \right]^{1/2}$$

Für $r \rightarrow \infty$ erhält man

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2}rf \left[1 + \frac{4}{\rho f^2} \frac{dp}{dr} \right]^{1/2} \\ &\approx -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2}rf \left[1 - \frac{2}{\rho f^2} \frac{dp}{dr} + \dots \right] \\ &\approx \frac{1}{\rho f} \frac{dp}{dr} = V_g. \end{aligned}$$

$$V = -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2} \left[r^2 f^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{dp}{dr} \right]^{1/2}$$

- Es folgt für ein Hochdruckgebiet ($dp/dr < 0$), daß der Druckgradient in der Entfernung r vom Zentrum kleiner als $\frac{1}{4}\rho r f^2$ sein muß, denn sonst würde der Ausdruck unter der Wurzel negativ werden.
- Der antizyklonale Gradientwind muß daher die Bedingung $|V| < rf$ erfüllen. Deshalb ist bei kleinem r in der Nähe eines Hochdruckzentrums der Wind schwach und der Druckgradient entsprechend gering.
- In einem Tiefdruckgebiet gibt es dagegen theoretisch keine Obergrenze für V oder dp/dr .

$$\frac{V^2}{r} + fV - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Aus der Definition für den geostrophischen Wind

$$fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

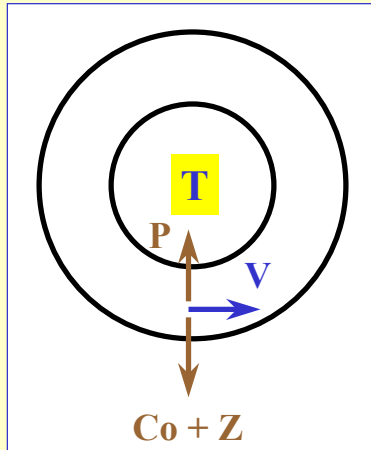
$$\rightarrow \frac{V^2}{r} + f(V - V_g) = 0$$

Da der rechte Term immer negativ ist, muß bei der Umströmung eines Tiefdruckgebietes ($V > 0$) V kleiner als V_g sein.

In einem Hochdruckgebiet ($V < 0$) gilt dagegen $|V| > |V_g|$.



zykloner Gradientwind



$$fV + \frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$Co + Z = P$$

Beim zyklonalen Gradientwind ($P = C + Z$) ist die Corioliskraft kleiner als im geostrophischen Fall ($P = C$). Deshalb ist die Windgeschwindigkeit auch kleiner.

Beim antizyklonalen Gradientwind mit $P + Z = C$ im Kräftegleichgewicht müssen Corioliskraft und Windgeschwindigkeit größer sein, um P und Z die Waage halten zu können.

Der antizyklonale Gradientwind ist supergeostrophisch



größer als der geostrophische Wind bei gleichem Druckgradienten

Der zyklonale Gradientwind subgeostrophisch



kleiner als der geostrophische Wind bei gleichem Druckgradienten

In einem Hurrikan ist die Strömung stark subgeostrophisch: -

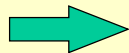
- **Angenommen der Hurrikan befindet sich bei 20°N.**
- **50 km vom Zentrum entfernt soll ein Druckgradient von 50 mb pro 100 km bestehen.**

$$fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \rightarrow$$

$$V_g = \frac{50 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}}{1,25 \text{ kg m}^{-3} \cdot 2 \cdot (7,29 \times 10^{-5}) \text{ s}^{-1} \sin 20^\circ \cdot 10^5 \text{ m}} = 802 \text{ ms}^{-1}$$

Die Gradientwindgleichung ergibt 43.5 ms⁻¹, ein Wert der ungefähr der beobachteten Windgeschwindigkeit entspricht.

Das Verhältnis: Zentrifugalkraft/Corioliskraft = V/(rf) = 17,4

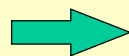


In einem Hurrikan könnte man die Corioliskraft bei der Berechnung von V ganz weglassen.

$$\frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \rightarrow \quad V = 44,7 \text{ ms}^{-1}$$

statt 43.5 ms⁻¹

Diese Gleichung beschreibt dann nur noch das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Druckgradientkraft



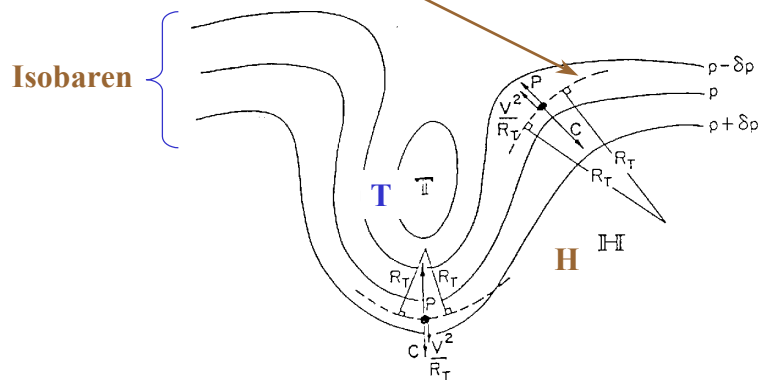
zykloskopisches Gleichgewicht

Einige Bemerkungen

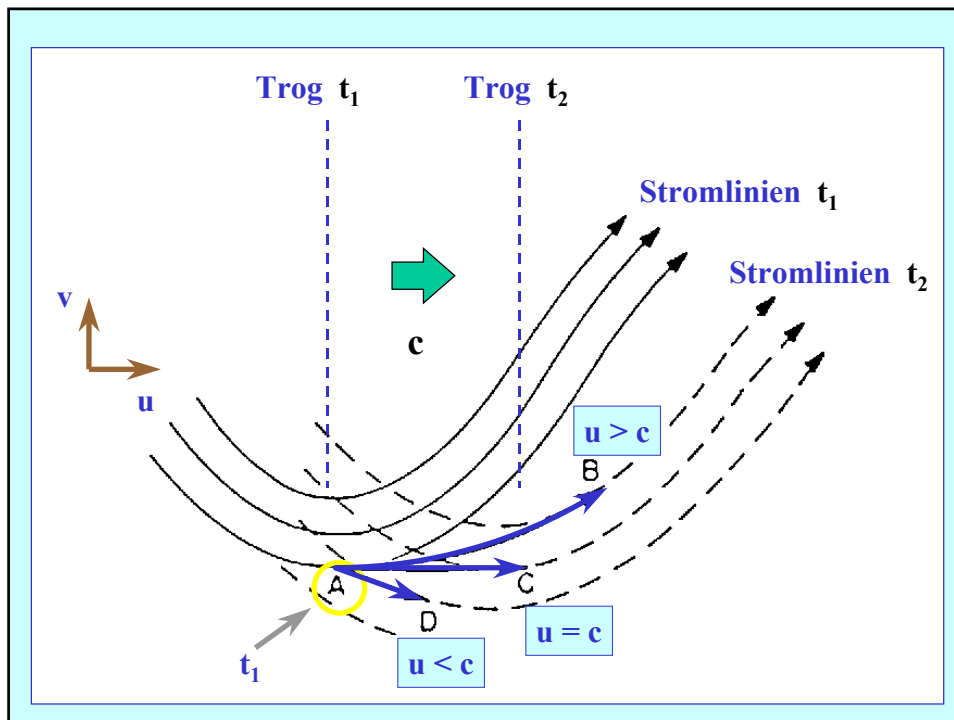
- Luftströmungen in intensiven kleinräumigen Wirbels (Hurrikane, Tornados, Windhosen, Staubteufel) sind zumindest in deren Kernbereichen im zyklotropischen Gleichgewicht.
- Im Bereich von scharfen Trögen in der Höhenströmung der mittleren Breiten ist die gemessene Windgeschwindigkeit oft nur halb so groß wie die Isobarenabstand entsprechende geostrophische Windgeschwindigkeit.
- Der Wind bläst aber dennoch parallel zu den Isobaren oder Isohypsen.
- Ursache ist der Einfluß der Zentrifugalkraft auf die zyklonal gekrümmte Strömung.

Trajektorien

- Das Newton'sche Gesetz bezieht sich auf Luftpakete. Deshalb hängt die Zentrifugalkraft vom **Krümmungsradius R_T** der Trajektorien der Luftpakete ab.

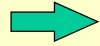


- Im allgemeinen sind die Luftströmungen in der Atmosphäre nicht stationär, denn die Anordnung der Isobaren ändert sich mit der Zeit.
- Deshalb fallen die **Trajektorien** nicht mit der **Stromlinien** zusammen.



Die Rossbyzahl

Der geostrophische Wind



$$V_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial r}$$



einfach ein Maß für
den Druckgradienten

Die Gradientwindgleichung



$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fr}$$

$$\frac{V}{rf} = \frac{\frac{V^2}{r}}{fV} = \frac{\text{Zentripetalbeschleunigung}}{\text{Coriolisbeschleunigung}}$$

Die Rossbyzahl



Die Rossbyzahl:

$$Ro = \frac{V}{fr}$$

Extratropische Zyklon

$$V = 10 \text{ ms}^{-1} \quad f = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad r = 1000 \text{ km}$$

$$Ro = \frac{V}{fr} = \frac{10}{10^{-4} \times 10^6} = 0.1$$

Tropische Zyklon

$$V = 50 \text{ ms}^{-1} \quad f = 5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad r = 100 \text{ km}$$

$$Ro = \frac{V}{fr} = \frac{50}{5 \times 10^{-5} \times 10^5} = 10$$

Tornado

$$V = 100 \text{ ms}^{-1} \quad f = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad r = 100 \text{ m}$$

$$Ro = \frac{V}{fr} = \frac{10^2}{10^{-4} \times 10^2} = 10^4$$

Zusammenfassung

1. Gradientwindgleichung

$$-fV - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{pro Masseneinheit}$$

2. Gradientwindgleichung in Druckkoordinaten

$$-fV - \frac{V^2}{r} = -g \frac{\partial z}{\partial r}$$

3. Lösung



$$V = -\frac{1}{2}rf + \frac{1}{2} \left[r^2 f^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{dp}{dr} \right]^{1/2}$$

Zusammenfassung 2

4. Andere Formen der Gradientwindgleichung

$$\frac{V^2}{r} + f(V - V_g) = 0$$

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fr}$$

5. Die Rossbyzahl

$$Ro = \frac{V}{fr}$$

6. Die Zentrifugalkraft hängt vom Krümmungsradius R_T der Trajektorien der Luftpakete ab.

$$\frac{V^2}{R_T} + f(V - V_g) = 0$$

