

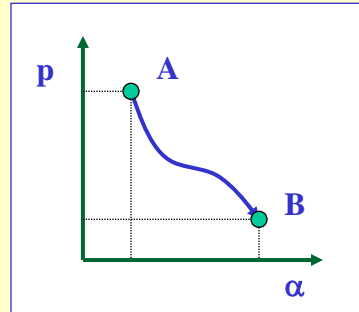
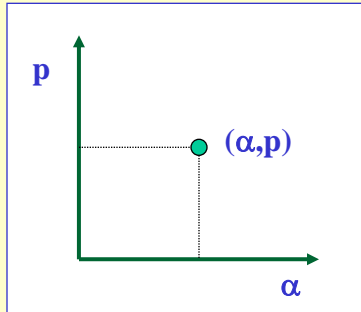
Thermodynamische Diagramme

Thermodynamischen Diagramme

- Mit **thermodynamischen (aerologischen) Diagrammen** lassen sich Zustandsänderungen von Luftpaketen bei Vertikalbewegungen graphisch untersuchen.
- Man trägt die Radiosondenmessungen (Druck, Temperatur, Feuchte) in diese Diagramme ein, um den Zustand der Atmosphäre zu bestimmen.
- Man kann ohne aufwendige Rechenarbeit die Stabilität der atmosphärischen Schichtung beurteilen und Aussagen über Thermik, Quellwolkenbildung, Schauer- und Gewitterwahrscheinlichkeit machen.

Graphische Darstellung von Zustandsänderungen

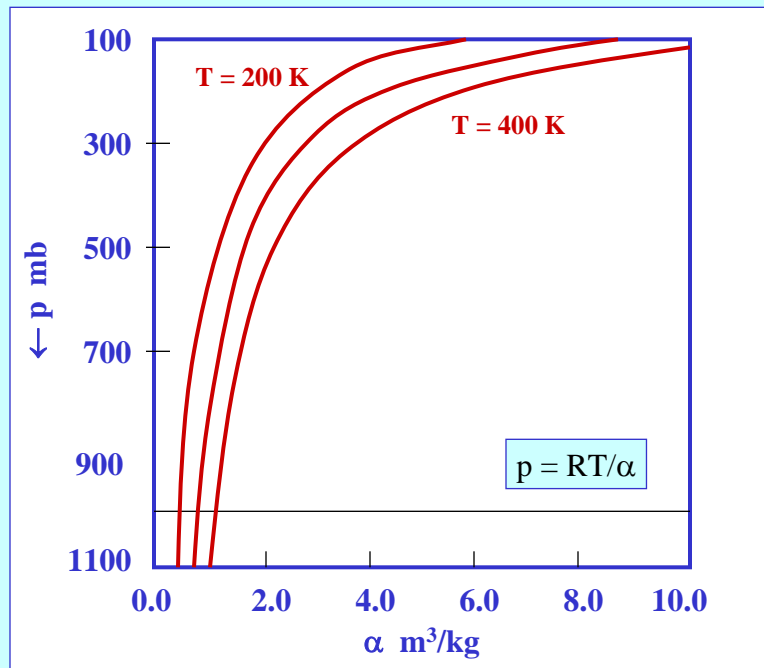
- Der thermodynamische Zustand eines Gases läßt sich durch einen Punkt im pV - oder $p\alpha$ -Diagramm angeben.



- Zustandsänderungen kann man durch Kurven in diesem Diagramm darstellen.

Thermodynamischen Diagramme 2

- Wir haben bereits das p - α Diagramm vorgestellt.
- Jeder Zustand eines trockenen Luftpakets läßt sich durch einen Punkt in diesem Diagramm angeben.
- **Jedes feuchte Luftpaket wird mit zwei Punkten** (Temperatur und Feuchtegröße) bestimmt.
- Bei einer Zustandsänderung trockener Luft (z.B. isotherm oder adiabatisch) ergibt sich ein charakteristischer Kurvenverlauf.
- Zu jedem Wertepaar von p und α kann man die Temperatur, die potentielle Temperatur und das Sättigungsmischungsverhältnis ablesen, denn das Diagramm enthält die Kurvenscharen der Isothermen, Adiabaten und Isolinien des Sättigungsmischungsverhältnis.

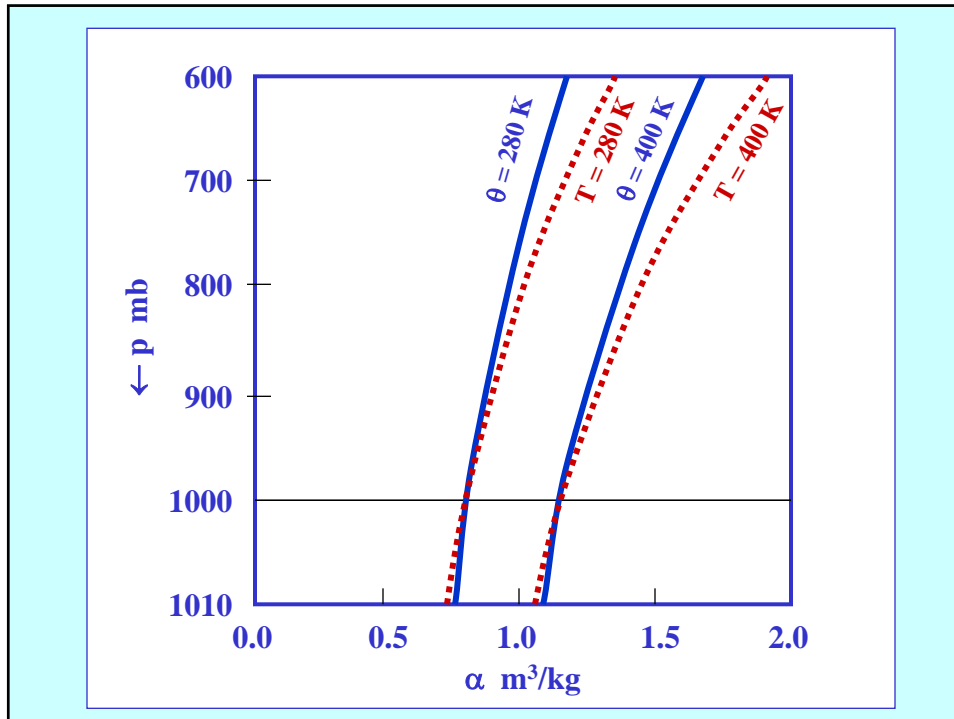


Adiabaten in einem p - α -Diagramm

- Die **potentielle Temperatur** ist eine Funktion von Druck und Temperatur: $\theta = \theta(p, T) = T(p^*/p)^\kappa$.
- Mit $T = p\alpha/R$: $\theta = \theta(p, \alpha) = (p\alpha/R)(p^*/p)^\kappa$.
- Löst man die Gleichung $\theta = (p\alpha/R)(p^*/p)^\kappa$ nach α auf, ergibt sich:

$$\alpha = \frac{R\theta}{p^*} \left(\frac{p^*}{p} \right)^{1-\kappa}$$

- Für verschiedene Werte $\theta = \text{Konstant}$ können die Kurven $\alpha = \alpha(p)$ in einem $(-p)\alpha$ -Diagramm eingetragen werden.
- Wir nennen diese Kurven **Trockenadiabaten**.
- Entlang dieser Linien erfolgt die **trockenadiabatische Zustandsänderung** eines Luftpakets.



Das Sättigungsmischungsverhältnis

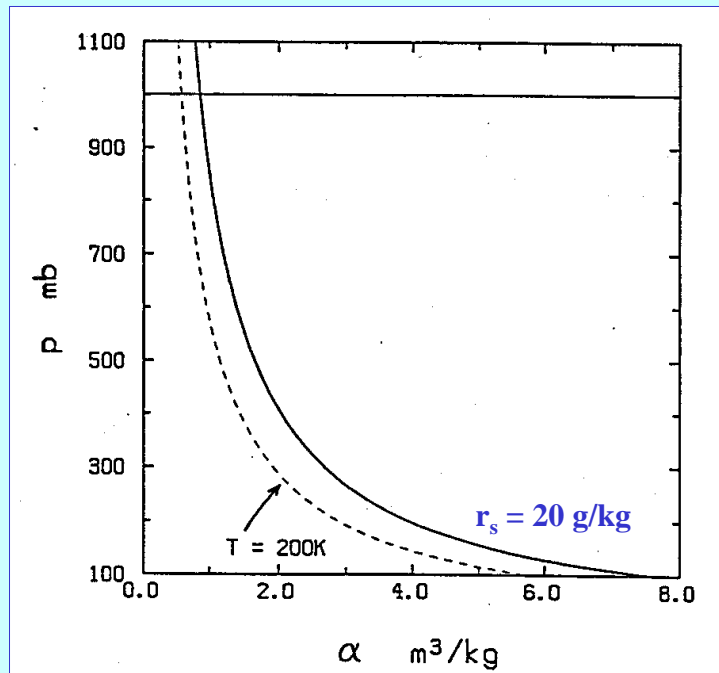
- Das **Mischungsverhältnis** ist definiert von

$$r = r_s(p, T_d) = \frac{\varepsilon e_s(T_d)}{p - e_s(T_d)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T_d)}{p}$$

- Das **Sättigungsmischungsverhältnis** r_s ist definiert von

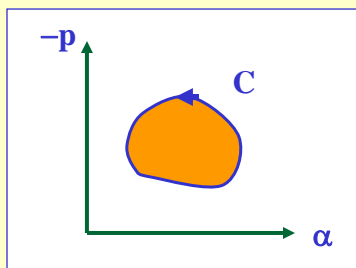
$$r_s(p, T) = \frac{\varepsilon e_s(T)}{p - e_s(T)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

- Linien von konstantem Sättigungsmischungsverhältnis $r_s(p, T)$ können in einem p - α Diagramm eingetragen werden.



Thermodynamischen Diagramme 3

- Wenn ein Luftvolumen einen **Kreisprozeß** durchläuft (d.h. nach mehreren Zustandsänderungen soll wieder der Anfangszustand erreicht werden), ergibt sich eine **geschlossene Kurve**.
- Eine vorteilhafte Eigenschaft von p - α Diagrammen ist, daß die von der Kurve eingeschlossene Fläche der verrichteten Arbeit proportional ist.



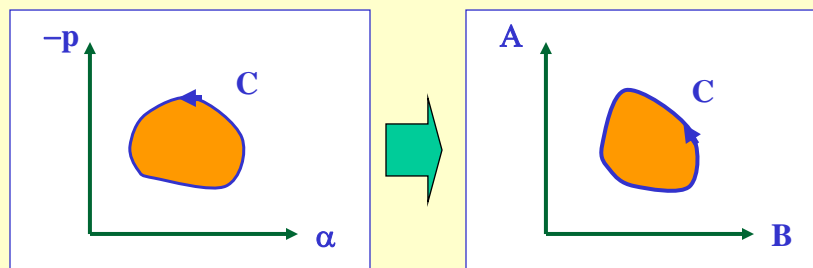
Thermodynamischen Diagramme 4

- Da p und T leichter meßbar als p und α sind, transformiert man für meteorologische Anwendungen die Koordinaten des p - α Diagramms auf geeignete Weise.
- Ein thermodynamisches Diagramm ist einfach ein transformiertes p - α Diagramm.
- Die neuen Koordinaten wählt man unter folgenden Gesichtspunkten aus:

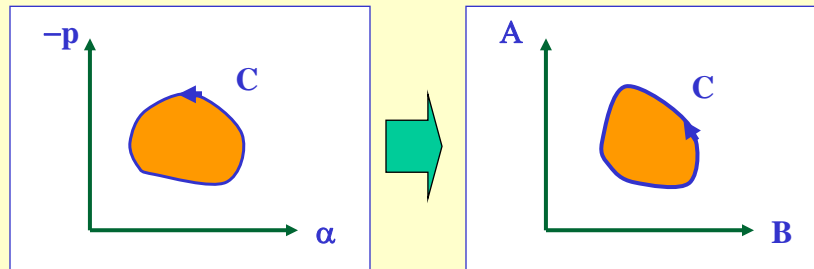


Thermodynamischen Diagramme 5

- Die von der Kurve eines Kreisprozesses eingeschlossene Fläche soll wie im p - α Diagramm der dabei verrichteten Arbeit proportional sein.
- Die wichtigsten Linien (Isobaren, Isothermen, Trockenadiabaten) sollen möglichst geradlinig verlaufen.
- Der Winkel zwischen Isothermen und Trockenadiabaten soll möglichst groß (90° wäre gut!) sein.



Thermodynamischen Diagramme 5



Die Forderung, daß auch nach der Transformation von den Koordinaten $(-p, \alpha)$ auf die Koordinaten (A, B) die von einer Kurve eingeschlossene Fläche gleich groß ist lautet in mathematischer Schreibweise:

$$-\oint_C p d\alpha = \oint_C A dB \quad \Rightarrow \quad \oint_C (p d\alpha + A dB) = 0$$

Thermodynamischen Diagramme 6

$$\oint_C (p d\alpha + A dB) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $p d\alpha + A dB$ ein **vollständiges Differential** sein muß,

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B} \right)_\alpha$$

Herleitung

$$\oint_C (pd\alpha + AdB) = 0$$

$$dF = dF(\alpha, B)$$

$$F = F(\alpha, B) \quad \Rightarrow \quad dF = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_B}_{p} d\alpha + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_\alpha}_{A} dB$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_B = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha$$

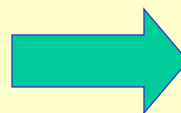
Thermodynamischen Diagramme 7

$$\oint_C (pd\alpha + AdB) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha$$

Nach der Wahl der Koordinate B, wird die Koordinate A so festgelegt, daß die **Transformation flächentreu** ist.

Für die Koordinatenwahl gibt es mehrere Möglichkeiten:



Emagramm: $B = T$

Das Emagramm ermöglicht die Bestimmung des Energiebetrages pro Masseneinheit und somit quantitative Vorstellungen von der Stabilität bzw. Labilität der Atmosphäre.

Mit $B = T$, $p\alpha = RT$:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\alpha = \frac{R}{\alpha}$$

Integration ergibt: $A = R \ln \alpha + F(T)$

$$p\alpha = RT \quad \Rightarrow \quad \ln \alpha = \ln R + \ln T - \ln p$$

$$A = -R \ln p + R \ln R + R \ln T + F(T)$$

Wähle $F(T)$ so, daß dieser Ausdruck Null wird.

Emagramm: $A = -R \ln p$, $B = T$

Die Gleichung der **Trockenadiabaten** θ in diesem Diagramm läßt sich folgendermaßen ableiten:

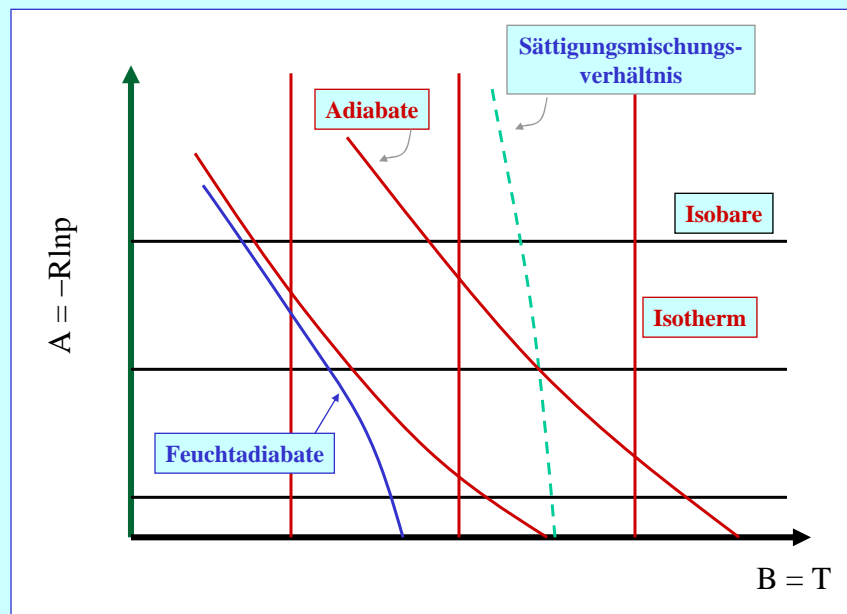
$$T = \theta \left(\frac{p}{p_*}\right)^\kappa \quad \Rightarrow \quad \ln T - \ln \theta = \kappa \ln p - \kappa \ln p_*$$

$$\Rightarrow \quad -\ln p = -\frac{c_p}{R} \ln T + \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad A = -c_p \ln B + \text{const}$$

Die **Trockenadiabaten** sind im Emagramm **logarithmische Kurven**; für die in der Atmosphäre vorkommenden Werte A und B verlaufen die **Trockenadiabaten** (genauso wie die **Sättigungsmischungsverhältnisl**inien) jedoch **fast gerade**.

Emagramm



Tephigramm: $B = T$

Das Emagramm ist zwar eine **flächentreue Transformation** des $p\alpha$ -Diagramms, hat aber den Nachteil, daß der Winkel zwischen den Isothermen und (Trocken-) Adiabaten nur 45° beträgt, d. h. es ergeben sich kleine Flächen bei Energieberechnungen. Dieses Problem löst das von Sir Napier Shaw entwickelte **Tephigramm**.

Wie vorher $B = T, \quad A = R \ln \alpha + F(T)$

$$\ln \alpha = \ln R + \ln T - \ln p$$

$$\ln T - \ln \theta = \kappa \ln p - \kappa \ln p_*$$

Wähle $F(T)$ so, daß $A = c_p \ln \theta$

$A = c_p \ln \theta, \quad B = T$

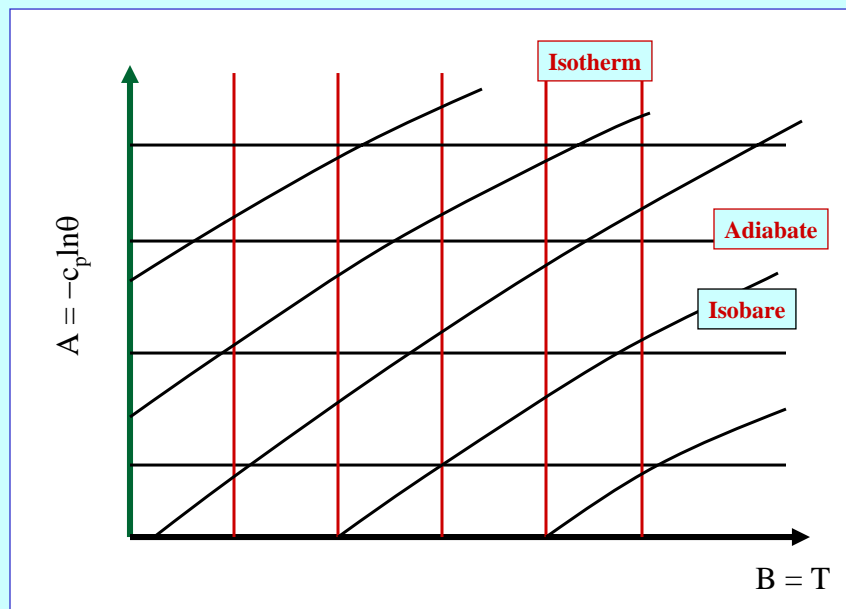
Tephigramm: $A = c_p \ln \theta$, $B = T$

Die Gleichung der **Isobaren** $p = \text{const.}$ in diesem Diagramm:

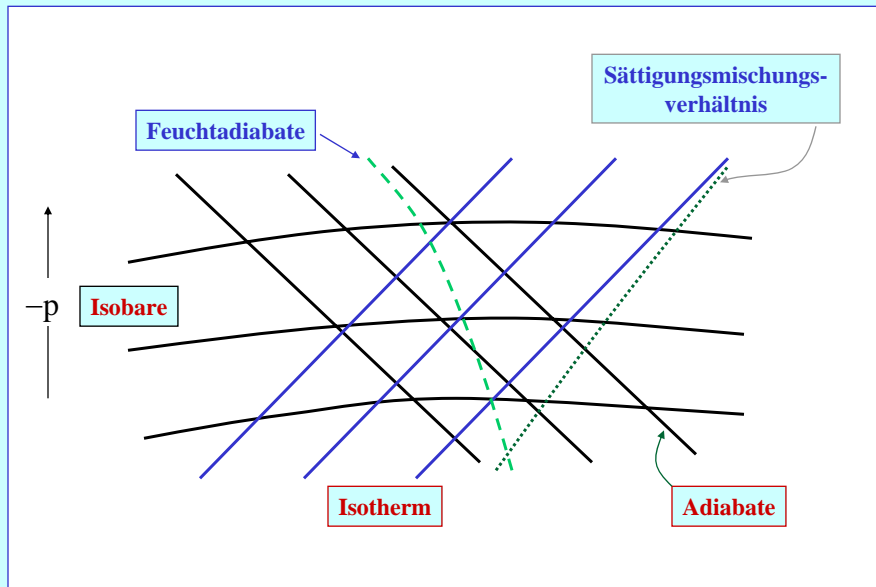
$$\ln \theta = \ln T + \kappa \ln p - \kappa \ln p_* \quad \rightarrow \quad A = c_p \ln B + \text{const}$$

- Die logarithmische Abhängigkeit äußert sich in einer Krümmung der Isobaren (im meteorologisch interessanten Bereich ist die Krümmung relativ schwach).
- Zu beachten ist, daß im Tephigramm der Winkel zwischen Isothermen und Adiabaten genau 90° beträgt.
- Änderungen im vertikalen Temperaturverlauf (z. B. Temperaturzunahme an einer Inversion) kann man deshalb besonders deutlich erkennen.

Tephigramm



Um 45° gedrehtes Tephigramm



Skew T, log p-Diagramm (Schiefes T, log p)

- In diesem von Herlofson 1947 eingeführten Diagramm ist der Schnittwinkel zwischen **Adiabaten** und **Isothermen** fast so groß wie im Tephigramm.
- Die **Isobaren** horizontale sind Geraden \Rightarrow zählt zu den gebräuchlichsten thermodynamischen Diagrammen.

$$A = T + \mu \ln p, \quad B = -R \ln p \quad \mu = \text{const.}$$

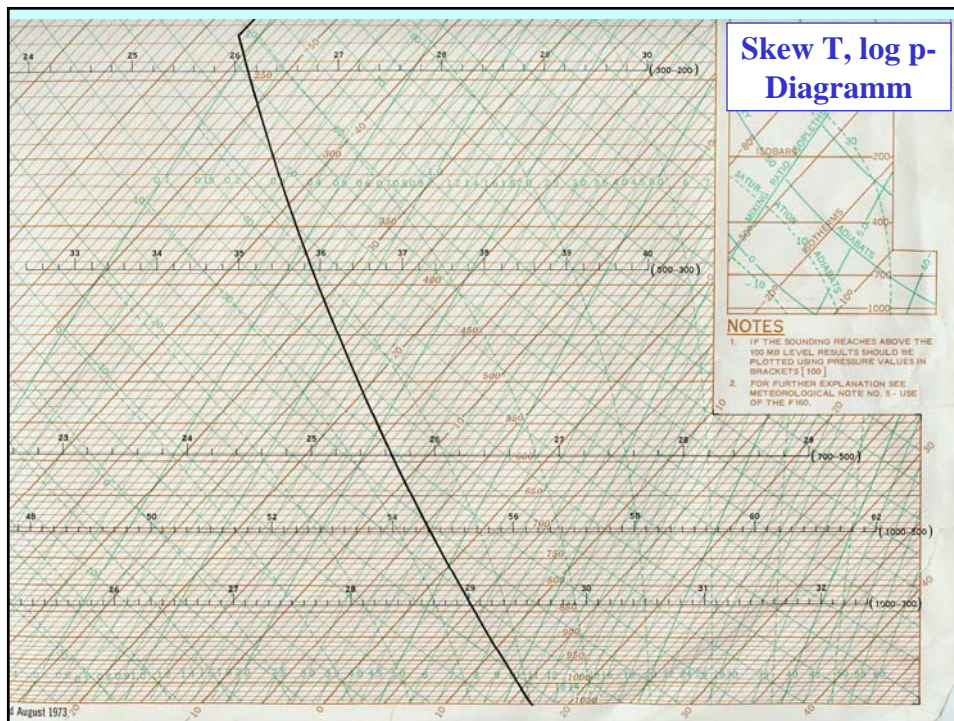
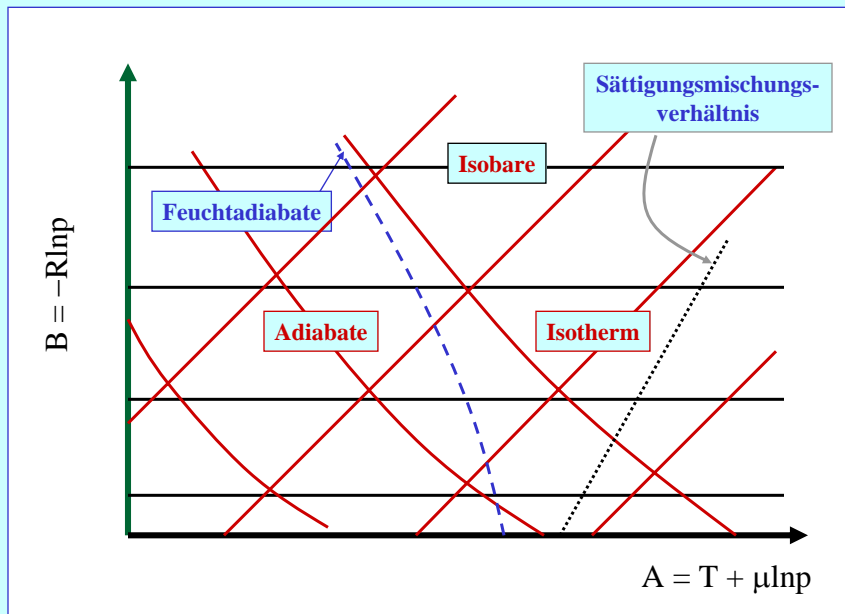
Isothermen: $B = -\frac{R}{\mu} A + \text{const.}$

schräge (engl. **skew**)
Geraden.

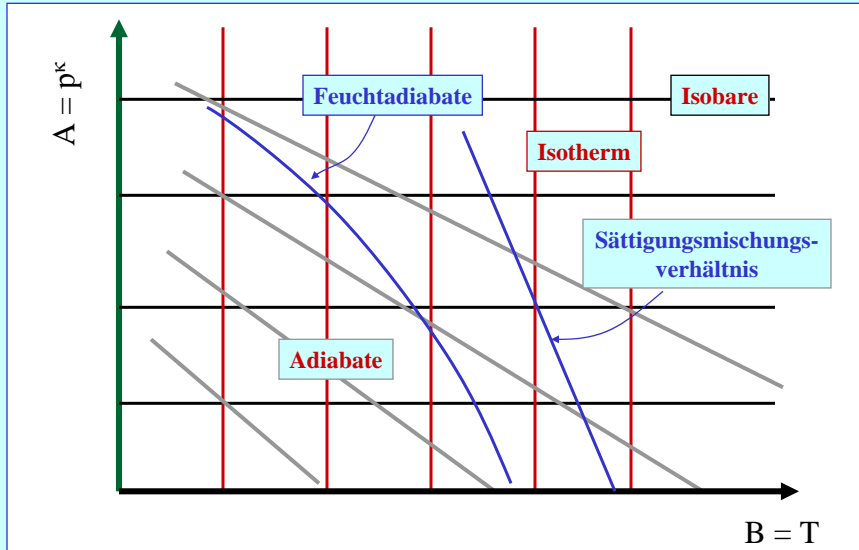
Adiabaten: $A + \frac{\mu}{R} B = C e^{-B/c_p}$

konkav gekrümmt.

Skew T, log p-Diagramm



Stüve-Diagramm: Ordinate p^k , Abszisse T (nicht flächentreu)

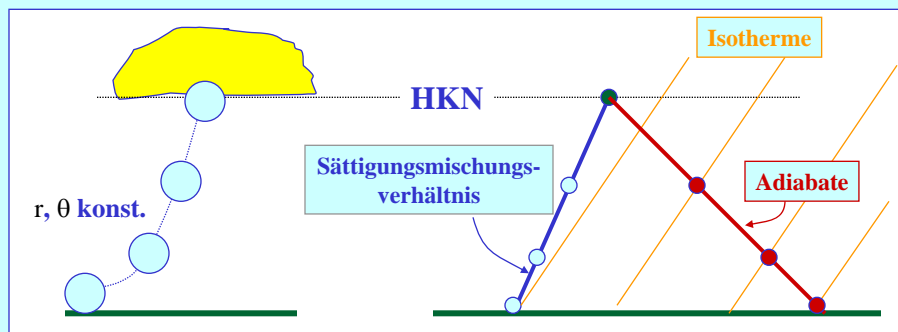


Feuchtadiabaten

- Nun geht es um die Auswirkung der Wasserdampf-Kondensation auf die Vertikalbewegung von **feuchter Luft** (= trockene Luft + Wasserdampf).
- Wird ein Paket mit feuchter Luft adiabatisch gehoben, d. h. ohne Wärmezufuhr von außen, ohne Mischung mit der Umgebungsluft, **bleibt das Wasserdampfmischungsverhältnis konstant**: $r = r_s(p, T_d) \Rightarrow T_d = T_d(p, r)$.
- Solange noch keine Sättigung erreicht ist, ($r < r_s$) für die Temperatur bzw. virtuelle Temperatur und den Druck (in jeweiliger Höhe), wird keine Kondensationswärme frei.
- Das bedeutet, daß bei der Vertikalbewegung von feuchter, **ungesättigter** Luft die adiabatische Temperaturänderung so groß ist wie die eines trockenen Luftpakets, nämlich 1 K pro 100 m.

Feuchtadiabaten 2

- Wegen der Temperaturabnahme bei der Hebung erhöht die relative Feuchte (r_s wird immer kleiner, r bleibt konstant).
- In einer bestimmten Höhe erreicht die relative Feuchte 100% und das Luftpaket ist gesättigt ($r = r_s$).
- Diese Höhe bezeichnet man als **Hebungskondensationsniveau (HKN)** (engl. **lifting condensation level, LCL**).



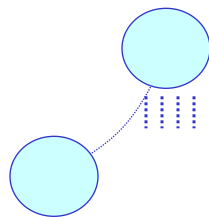
Feuchtadiabaten 3

- Bei weiterer Hebung (über das **HKN**) kondensiert der überschüssige Wasserdampf zu Wolkentropfchen.
- Dabei wird Kondensationswärme frei, die die Luft im Paket erwärmt \Rightarrow Die **feuchtadiabatische Temperaturabnahme** (Temperaturabnahme in gesättigter Luft) ist kleiner als die trockenadiabatische.
- Bei der Berechnung der feuchtadiabatischen Temperaturabnahme vernachlässigt man normalerweise die (kleine) Wärmemenge, die vom Flüssigwasser aufgenommen wird (**pseudoadiabatischer Prozeß**).
- Es wird angenommen, daß der überschüssige Wasserdampf sofort als Regen ausfällt, die freiwerdende Wärme aber im Luftpaket verbleibt.
- Ein derartiger pseudoadiabatischer Prozeß ist **irreversibel**.

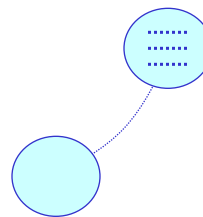
Feuchtadiabaten 4

- Bleibt dagegen das gesamte kondensierte Wasser im Luftpaket, handelt es sich um einen **reversiblen Prozeß**.
- Bei den in der Natur vorkommenden Hebungsvorgängen beobachtet man meistens eine Mischung zwischen den beiden Extremen.

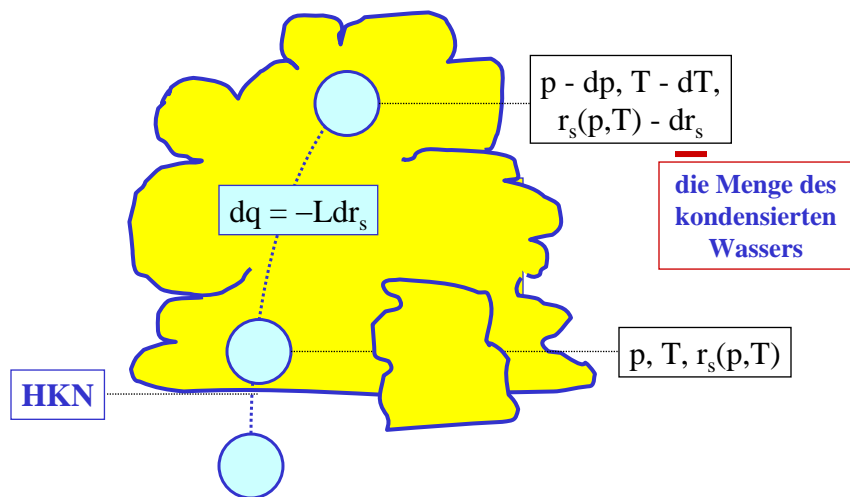
pseudoadiabatischer Prozeß
(irreversibel)



reversibler Prozeß



Feuchtadiabaten 5



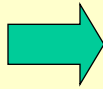
- Wenn Kondensation eintritt, verringert sich der Wasserdampfanteil im Luftpaket, das Wasserdampf-mischungsverhältnis r (in gesättigter Luft).

Feuchtadiabaten 6

- Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik in der Form
 $dq = c_p dT - \alpha dp \Rightarrow$

$$-L dr_s = c_p dT - \frac{RT}{p} dp$$

$$r_s(p, T) = \frac{\varepsilon e_s(T)}{p - e_s(T)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$



$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{p} \left(L \frac{dr_s}{dT} + c_p \right)^{-1}$$

- Dieser Gleichung kann numerisch integriert werden.

Feuchtadiabaten 7

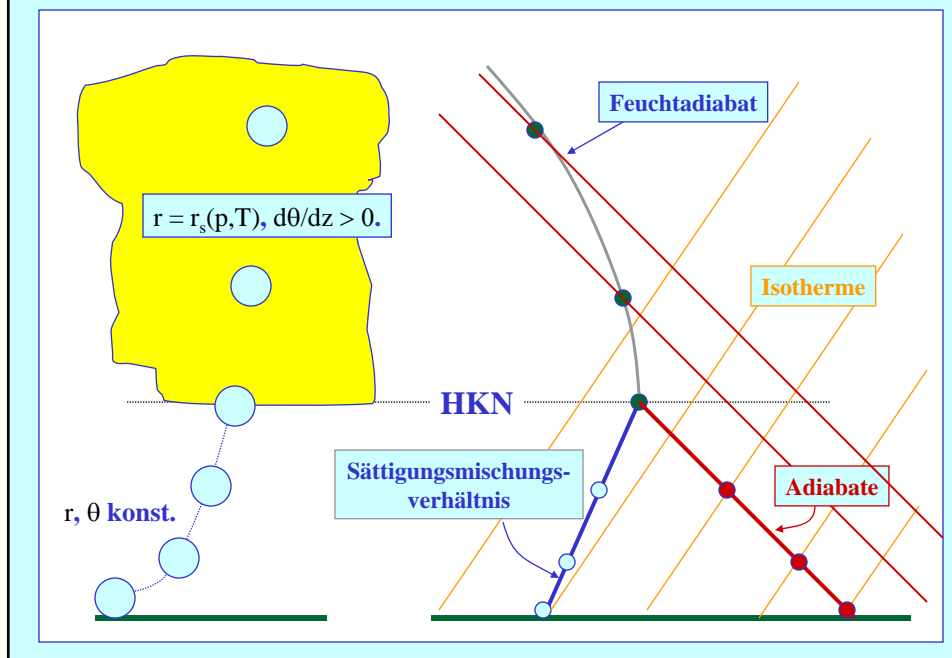
$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{p} \left(L \frac{dr_s}{dT} + c_p \right)^{-1}$$

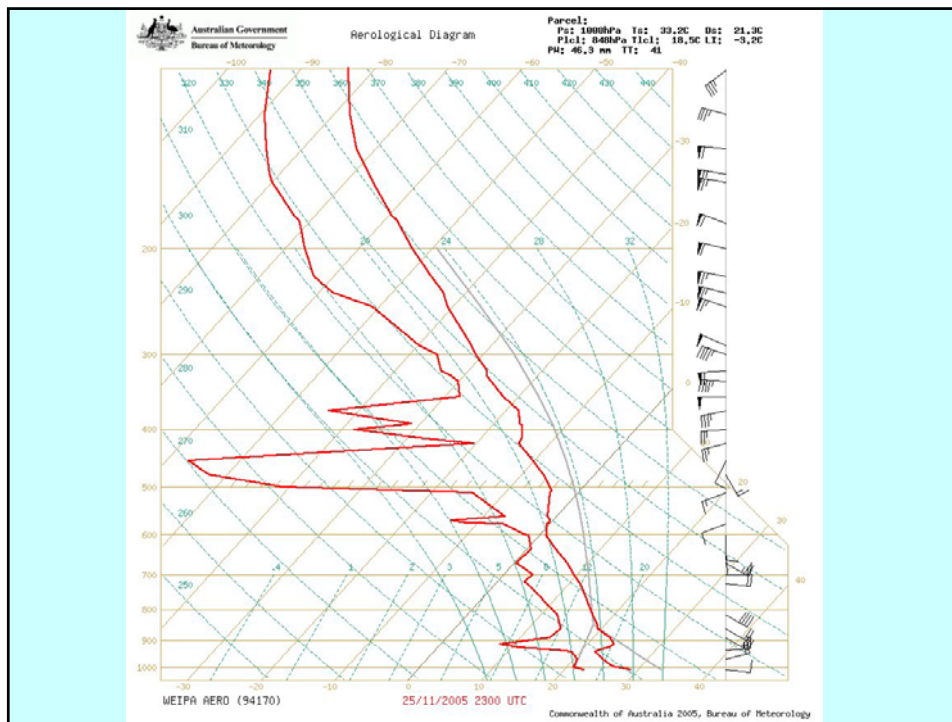
- Die Kurven, die die Abhängigkeit der Temperatur vom Druck bei der feuchtadiabatischen Vertikalbewegung eines Luftpakets wiedergeben, nennt man **Feuchtadiabaten**.

Feuchtadiabaten 8

- Jedes thermodynamische Diagramm enthält neben den Isobaren, Isothermen, Sättigungsmischungsverhältnislينien und Trockenadiabaten auch **die Feuchtadiabaten**.
- Die Feuchtadiabaten nähern sich in großer Höhe (geringer Druck, tiefe Temperaturen) asymptotisch den Trockenadiabaten, denn bei der Hebung von kalter, wasserdampfarmer Luft mit niedrigem $r_s(p,T)$ ist auch Lr_s klein, d. h. dem Luftpaket wird nur wenig latente Wärme zugeführt.
- Die **feuchtadiabatische Temperaturabnahme** beträgt in sehr warmer Luft 0,4 K pro 100 m, in mittleren Breiten in der unteren Troposphäre 0,6 K pro 100 m und nähert sich bei sehr tiefen Temperaturen 1 K pro 100 m.

Feuchtadiabaten 9

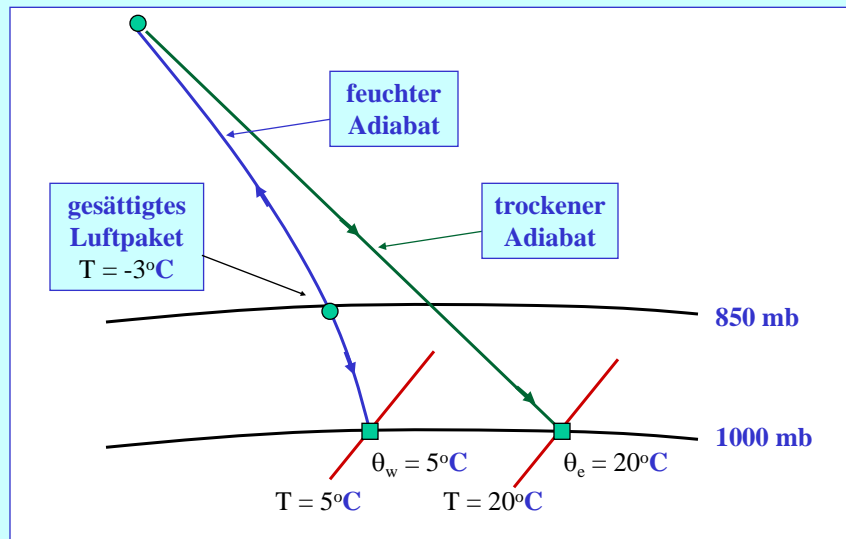




Feuchtadiabaten 10

- Die Feuchtadiabaten werden in thermodynamischen Diagrammen meist mit der **pseudopotentiellen Temperatur** gekennzeichnet.
- Die **pseudopotentielle Temperatur** θ_e nimmt eine gesättigte Luftmenge an, wenn sie vom Kondensationsniveau solange **feuchtadiabatisch aufsteigt**, bis der gesamte Wasserdampf kondensiert und ausgefallen ist, und dann **trockenadiabatisch auf einen Druck von 1000 mb absinkt**.
- Manchmal gibt man zu den Feuchtadiabaten auch die zugehörige **feuchtpotentielle Temperatur** (auf Englisch, **wet-bulb potential temperature**) θ_w an.
- Diese Temperatur herrscht in gesättigter Luft, wenn sie **feuchtadiabatisch auf das Druckniveau von 1000 mb gebracht** wird. Es muß flüssiges Wasser vorhanden sein.

θ_e, θ_w



Feuchtadiabaten 11

- Die **pseudopotentielle** Temperatur wird häufig zur Bestimmung der Luftmassen im Druckniveau $p = 850 \text{ mb}$ verwendet.
- Innerhalb einer Luftmasse variiert oft der Feuchtegehalt und damit die Differenz zwischen der Lufttemperatur T und dem Taupunkt T_d (**Taupunktdifferenz** $T - T_d$, auf Englisch, **dew-point depression**).
- Charakteristisch für eine Luftmasse ist also weniger ihre (Trocken-)Temperatur, sondern mehr ihr Energiegehalt.
- Die Werte $T = T_d = -3^\circ\text{C}$, $T = 0^\circ\text{C}/T_d = -8^\circ\text{C}$, $T = 2^\circ\text{C}/T_d = -14^\circ\text{C}$ führen alle zur gleichen pseudopotentiellen Temperatur von 20°C .

Feuchtadiabaten 12

- Auf einer θ_e -Karte kann man Gebiete mit einheitlichen pseudopotentiellen Temperaturen (Luftmassen) und Gebiete mit großem θ_e -Gradienten (Luftmassengrenzen) unterscheiden.
- Zur Bestimmung der pseudopotentiellen Temperatur von ungesättigter Luft werden T und T_d z. B. in ein Tephigramm eingetragen.
- Die zum Taupunkt gehörende Sättigungsmischungsverhältnisl Linie (= Wasserdampfgehalt des Luftpakets) verfolgt man dann bis zum Schnittpunkt mit der durch T verlaufenden Trockenadiabaten.
- In der Höhe des Schnittpunktes ist das Luftpaket gesättigt. θ_e läßt sich dann an der Feuchtadiabaten ablesen.

