

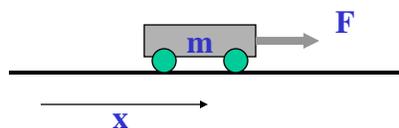
# Thermodynamik der Atmosphäre

## Atmosphärische Bewegung



### Dynamik

Newton'sche zweiter Gesetz



Masse  $\times$  Beschleunigung = Kraft  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$



### Thermodynamik

Bezieht sich auf Änderungen der inneren  
Energie und den Zustand feuchter Luft

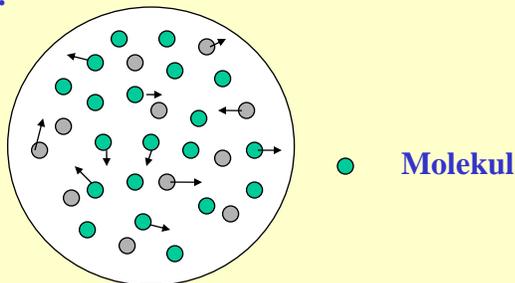
## Thermodynamik der Atmosphäre

- In diesem Abschnitt werden die wichtigsten thermodynamischen Gesetze motiviert.
- Sie helfen, Stabilität bzw. Labilität bei Vertikalbewegungen und Kondensationsprozessen zu erklären.
- Wir werden z. B. lernen, wie man das Auftreten von verschiedenen Arten von Wolken vorhersagen kann, insbesondere Quellwolken (Cumuluswolken und Gewitter).



## Die Atmosphäre als ideales Gas

- Das atmosphärische Gasgemisch in guter Näherung ein **ideales Gas** - Begriff stammt aus der kinetischen Gastheorie.



- ein **ideales Gas** ist ein Modellgas, in dem keine Kräfte zwischen den Molekülen wirken und die Molekülzusammenstöße vollkommen elastisch verlaufen, vergleichbar dem Verhalten zweier Billardkugeln.

## Die ideale Gasgleichung

- **Laborversuche**  $\Rightarrow$  der Druck  $p$ , die absolute Temperatur  $T$  und das Volumen  $V$  eines **idealen Gases** sind durch eine einfache **Zustandsgleichung** miteinander verknüpft.
- Für  $m$  **Kilogramm** eines **einatomigen Gases** gilt

$$pV = mRT$$

$R$  spezifische Gaskonstante      Zahlenwert hängt vom Gas ab

**Einheit** von  $R$ : Joule pro Grad K pro Kilogramm

$$pV = mRT \Rightarrow p = (m/V)RT = \rho RT$$

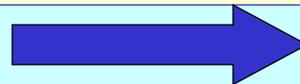
$\rho =$  Dichte

## Die ideale Gasgleichung 2

- Das Volumen von 1 kg eines Gases bezeichnet man als **spezifisches Volumen**  $\alpha = V/m$ .
- $\alpha = V/m \Rightarrow \rho = 1/\alpha \Rightarrow$  für 1 **Kilogramm** eines **einatomigen Gases** gilt:

$$p\alpha = RT$$

- Die Atmosphäre ist eine Mischung aus verschiedenen einatomigen Gasen.
- Wir müssen die Zustandsgleichung für ein solches Gas herleiten.



### Die ideale Gasgleichung 3

- Die Masse aller Teilchen eines Kilomol einer Substanz ergibt ihr Molekulargewicht  $M$  in Kilogramm.
- Ein kmol entspricht der Anzahl von  $6,022 \times 10^{26}$  Teilchen.
- Diese Teilchenmenge  $6,022 \times 10^{26}$  ist eine Universal-konstante und wird **Avogadro-Konstante** genannt.
- In der älteren Literatur findet man oft die Angaben in Gramm, d. h. die Masse von einem Mol, oder  $6,022 \times 10^{23}$  Teilchen.
- Ein Kilomol Wasser wiegt z.B. 18,016 kg.
- Die Zahl der Kilomole  $n$  einer beliebigen Masse  $m$  eines Stoffes läßt sich leicht berechnen:

$$n = m/M$$

### Die Zustandsgleichung

Experimente =>

$$pV = nR^*T$$

Druck

Volumen

Zahl von **kMolen**

Absolute  
Temperatur

Universelle  
Gaskonstante

$$1 \text{ kMole} = \text{Molekulargewicht } M \text{ in kg}$$

Beispiel: Sauerstoff hat ein atomares Gewicht von 16 und ein molekulares Gewicht von 32 => 1 kMol Sauerstoff wiegt 32 kg

### Zustandsgleichung

Für  $m$  kg eines Gases,  $n = m/M$  kMol  $pV = \frac{mR^*T}{M}$

Für 1 kg dividieren durch die Masse  $m \Rightarrow$

$$p \frac{V}{m} = \frac{R^*T}{M}$$



$$p\alpha = RT$$

Molecular-  
gewicht des  
Gases

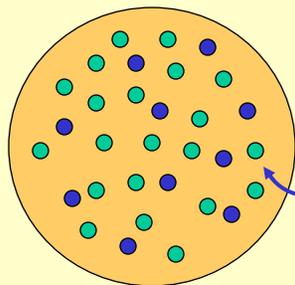
$$R = \frac{R^*}{M}$$

is the **specific gas constant**

Diese Gleichung gilt für ein **einatomiges Gas**

Luft ist eine Mischung aus verschiedenen einatomigen Gasen  
(z.B.  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ , ... )!

### Zustandsgleichung eines Gasgemisch



● Sauerstoff  $M_{O_2}$

● Stickstoff  $M_{N_2}$

$m_{O_2}$  kg of  $O_2$ ,  $m_{N_2}$  kg of  $N_2$

$$m = m_{O_2} + m_{N_2}$$

Zustandsgleichung

$$p \frac{V}{m} = \frac{R^*T}{M}$$



$$p_1 V = m_{O_2} \frac{R^*T}{M_{O_2}}$$

$$p_2 V = m_{N_2} \frac{R^*T}{M_{N_2}}$$

$p_1, p_2$  **partielle Druck**, wobei  $p_1 + p_2 = p$

### Zustandsgleichung eines Gasgemisch

$$p_1 V = m_{O_2} \frac{R^* T}{M_{O_2}} + p_2 V = m_{N_2} \frac{R^* T}{M_{N_2}}$$


$$pV = (p_1 + p_2)V = \left( \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} + \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} \right) R^* T$$

Dividieren durch die Gesamtmasse  $m = m_{O_2} + m_{N_2}$


$$p\alpha = p \frac{V}{m} = \frac{\left( \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} + \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} \right) R^* T}{m_{O_2} + m_{N_2}} = \frac{R^* T}{\bar{M}}$$

### Zustandsgleichung eines Gasgemisch

$$p\alpha = \frac{R^* T}{\bar{M}}$$

$$\frac{1}{\bar{M}} = \frac{\frac{m_{O_2}}{m_{O_2} + m_{N_2}}}{M_{O_2}} + \frac{\frac{m_{N_2}}{m_{O_2} + m_{N_2}}}{M_{N_2}}$$

Massenanteil  
von Sauerstoff

Massenanteil  
von Stickstoff

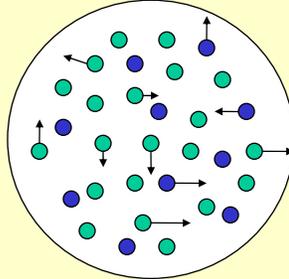
$$p\alpha = R_d T$$

or

$$p = \rho R_d T$$

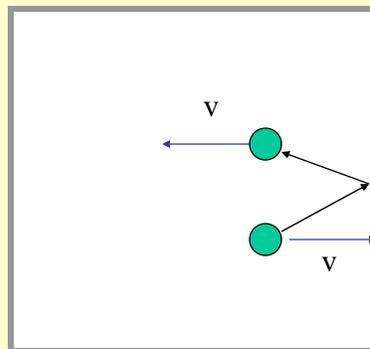
$R_d$  = das spezifische  
Gaskonstant für trockene Luft

## Die Natur des Druckes - Partialdruck



- Die Moleküle eines Gases befinden sich in einer konstanten zufälligen Bewegung
- ⇒ jedes Molekül hat kinetische Bewegungsenergie.
- Gelegentlich stoßen Moleküle mit anderen Molekülen oder mit der begrenzenden Wand zusammen.

## Die Natur des Druckes



**Impulsänderung bei einem  
vollelastischen Stoß**

$$= m(-v) - m(v) = -2mv$$

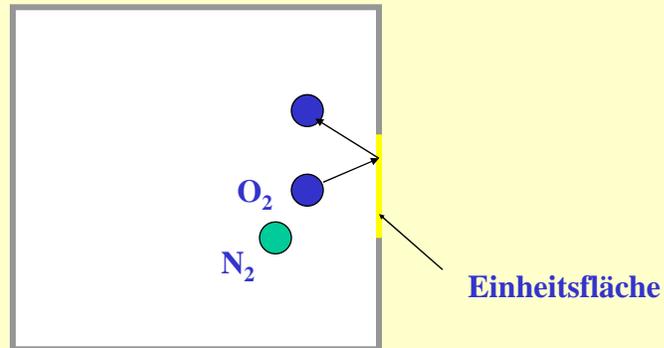
**Flächeneinheit**

Die Impulsänderung bei vielen Zusammenstößen gemittelt über eine Zeit- und Flächeneinheit repräsentiert eine Kraft.

**Die Kraft pro Einheitsfläche ist der Druck.**

Die Einheit ist das Pascal.  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$ .

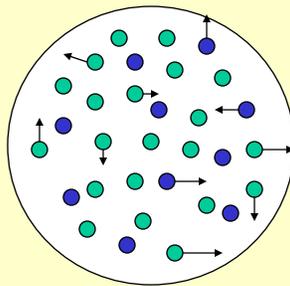
## Partialdruck



Die  $O_2$  Moleküle üben einen Partialdruck  $p_1$  und die  $N_2$  Moleküle einen Partialdruck  $p_2$  auf die Einheitsfläche aus.

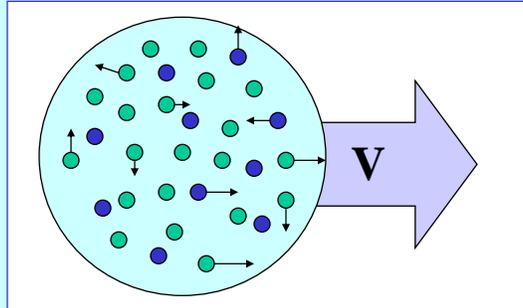
Der **Gesamtdruck** ist die **Summe der Partialdrücke**.

## Die Natur der Temperatur



Gemäß der **kinetischen Gastheorie** ist die **absolute Temperatur** von Gasen proportional zu der mittleren kinetischen Energie der Moleküle (Rotationsenergie eingeschlossen), welche **innere Energie** genannt wird.

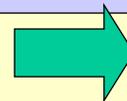
## Fluidbewegungen



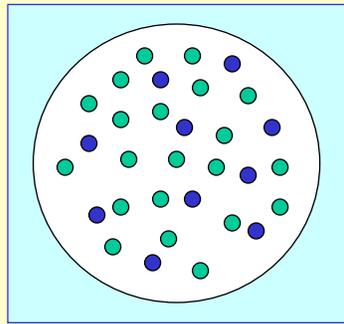
- Die Moleküle eines Fluids (gasförmig oder flüssig) befinden sich in einem konstantem Zustand der Bewegung. Die **gemittelte Bewegung aller Moleküle** in einem Fluidelement stellt die **makroskopische Geschwindigkeit** des Elements  $V$  dar.
- Die in der zufälligen Bewegung angesiedelt (**innere**) **Energie** wird durch die **absolute Temperatur**  $T$  des Fluids charakterisiert.

## Die Zustandsgleichung für feuchte ungesättigte Luft

- Der Zustand feuchter Luft ist charakterisiert durch:
  - **Druck**,  $p$
  - **Absolute Temperatur**,  $T$
  - **Dichte**,  $\rho$  (oder **spezifisches Volumen**  $\alpha = 1/\rho$ ), und
  - gewissermaßen durch die enthaltene **Feuchte**, z.B.
  - Das **Wasserdampf-mischungsverhältnis**,  $r$ , definiert als die Masse des Wasserdampfes pro Masse trockener Luft des betrachteten Volumens.



### Zustandsgleichung für feuchte, ungesättigte Luft



● **Wasserdampf**  $M_v$

● **Trockene Luft**  $M_d$

**Nun**  $p_d V = m_d R_d T$

**und**  $e V = m_v R_v T$



$$pV = (p_d + e)V = (m_d R_d + m_v R_v)T$$

**Dividieren durch m**



$$p\alpha = \frac{(m_d R_d + m_v R_v)}{m_d + m_v} T = R_d \frac{\left(1 + \frac{m_v R_v}{m_d R_d}\right)}{1 + \frac{m_v}{m_d}} T$$

### Zustandsgleichung für feuchte, ungesättigte Luft

$$p\alpha = \frac{(m_d R_d + m_v R_v)}{m_d + m_v} T = R_d \frac{\left(1 + \frac{m_v R_v}{m_d R_d}\right)}{1 + \frac{m_v}{m_d}} T$$

**Sei**  $\varepsilon = R_d/R_v = 0.622$

$r = m_v/m_d$  **ist das Wasserdampfmischungsverhältnis**  
(typischerweise  $\ll 1$ , maximal 0.04)

$$p\alpha = R_d \frac{(1 + r/\varepsilon)}{1 + r} T \approx R_d (1 + 0.61r) T = R_d T_v$$

$T_v = (1 + 0.61r)T$  **ist die virtuelle Temperatur**

**Zusammenfassung: die Zustandsgleichung für feuchte Luft ist:**

$$p\alpha = R_d T_v$$

spezifisches Gaskonstant  
für trockene Luft

$$T_v = T(1 + r/\varepsilon)/(1 + \varepsilon) \approx T(1 + 0.61r)$$

$$\varepsilon = R_d/R_v = 0.662$$

spezifisches Gaskonstant  
für Wasserdampf

**r ist normalerweise in g/kg angegeben: es muß  
aber in kg/kg in jeder Gleichung sein!**

**Die virtuelle Temperatur**

$$\alpha = R_d T_v / p \quad T_v = T(1 + 0.61r)$$

- Trockene Luft mit der virtuellen Temperatur  $T_v$  hat bei konstantem Druck das gleiche spezifische Volumen wie die feuchte Luft mit der Temperatur  $T$ .
- Das Mischungsverhältnis ist normalerweise kleiner als **ein bis zwei Prozent** und wird in Gramm Wasserdampf pro Kilogramm trockener Luft angegeben.
- **Sehr wichtig:** um  $T_v$  zu bestimmen, muß man den Wert auf **kg/kg** umrechnen und die Temperatur in Kelvin einsetzen.

## Beispiel

- $p = 990 \text{ mb} \rightarrow 99000 \text{ Pa}$
- $T = 26 \text{ C} \rightarrow 299 \text{ K}$
- $r = 8 \text{ g/kg} \rightarrow 0,008 \text{ kg/kg}$

$$p\alpha = R_d T_v \Leftrightarrow p = \rho R_d T_v$$

- $T_v = 299 \times (1 + 0,61 \times 0,008) = 300,46 \text{ K}$
- $\rho = p/R_d T_v = 99000/(287 \times 300,46) = 1,15 \text{ kg/m}^3$
- $\alpha = 1/\rho = 1/1.15 = 0,87 \text{ m}^3/\text{kg}$

## Zusammenfassung: Verschiedene Formen der idealen Gasgleichung

- **Für m kg**  $\rightarrow pV = mRT$
- **Für 1 kg**  $\rightarrow p\alpha = RT$
- **Für eine beliebige Menge**  $\rightarrow p = \rho RT$
- **Für ein Kmole**  $\rightarrow pV = MRT$  **oder**  $pV = R^*T$
- **Für n Kmole**  $\rightarrow pV = nR^*T$
- **Für 1 kg feuchte Luft**  $\rightarrow p\alpha = R_d T_v$

## Die Hydrostatische Grundgleichung

- Die Atmosphäre befindet sich fast vollständig im **hydrostatischen Gleichgewicht**.
- Nur bei kleinräumigen Bewegungen (z.B. in Gewittern) können stärkere Abweichungen auftreten.

Mathematische Formulierung

### Die Hydrostatische Grundgleichung 2

#### Hydrostatische Gleichgewicht

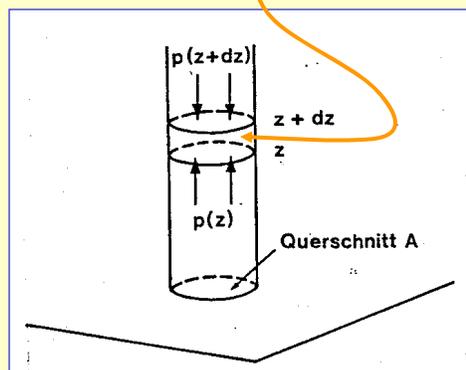
$$p(z)A - p(z + dz)A = g\rho Adz$$

Der Übergang  $dz \rightarrow 0$

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(z)$$

die **hydrostatische Gleichung**

$$\text{Masse} = \rho Adz$$



Das Minuszeichen kommt durch die vertikale Druckabnahme zustande

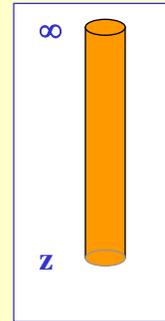
### Die Hydrostatische Grundgleichung 3

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(z)$$

- Ist die vertikale Dichteänderung  $\rho(z)$  bekannt, kann man bezüglich  $z$  integrieren:

$$p(z) = \int_z^\infty g\rho(z)dz$$

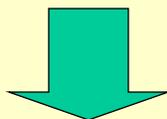
- Es gilt die Randbedingung  $p(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \infty$ .
- Der Druck in der Höhe  $z$  entsteht durch das Gewicht, mit dem die vertikale Luftsäule auf einer Einheitsfläche lastet.



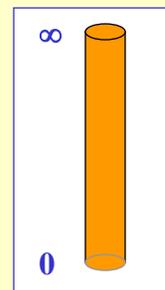
### Die Hydrostatische Grundgleichung 4

- Der Druck in Meeresniveau:

$$p(z) = \int_0^\infty g\rho(z)dz$$



- Das Produkt mittlerer Luftdruck in Meereshöhe (=  $10^5$  Pa) mal Erdoberfläche (=  $5 \times 10^{14}$  m<sup>2</sup>) ergibt ungefähr die **gesamte Atmosphärenmasse** ( $5 \times 10^{19}$  kg).



### Die Hydrostatische Grundgleichung 5

- Das vertikale Dichteprofil  $\rho(z)$  ist schwierig zu messen:  $p(z)$  und  $T(z)$  sind leichter zu messen.
- $\rho(z)$  kann aber mit Hilfe der idealen Gasgleichung  $p = \rho R_d T_v$  bestimmt werden:

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{R_d T_v(z)}$$

$$\Rightarrow \ln p(z) - \ln p(0) = -\int_0^z \frac{g}{R_d T_v(z')} dz'$$

$$\Rightarrow p(z) = p(0) \exp \left[ -\int_0^z \frac{g}{R_d T_v(z')} dz' \right]$$

### Die Hydrostatische Grundgleichung 6

$$p(z) = p(0) \exp \left[ -\int_0^z \frac{g}{R_d T_v(z')} dz' \right]$$

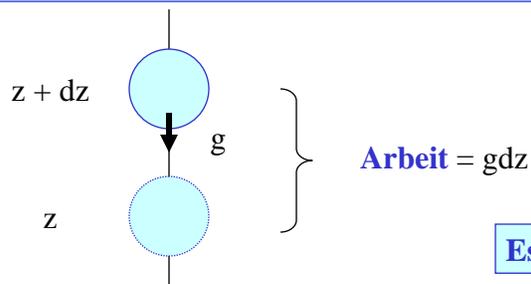
- Die vertikale Druckabnahme hängt von der Temperaturschichtung  $T(z)$  der Atmosphäre und vom Ausgangswert am Boden  $p(0)$  ab.
- In warmer Luft nimmt der Druck langsamer mit der Höhe ab, als in kalter Luft.
- Ich sollte darauf hinweisen, daß sich der Bodendruck  $p(0)$  mit dieser Gleichung nicht bestimmen läßt.
- Er muß z.B. durch eine Messung gegeben sein.

## Geopotential

- Es stellt sich heraus, daß die Annahme  $g = \text{Konstant}$  normalerweise ausreichend ist.
- Wir müssen aber vorsichtig sein. Wir sollten genau wissen warum! Wir führen nun das Konzept „**Geopotential**“ ein.
- Das **Geopotential**  $\phi$  an einer beliebigen Stelle in der Atmosphäre ist die Arbeit, die man leisten muß, um vom Meeresniveau eine Masse von 1 kg im Erdschwerefeld auf die Höhe des gewählten Punktes zu heben.
- Anders ausgedrückt:  $\phi$  ist das **Gravitationspotential** für die Einheitsmasse (Einheit J/kg bzw.  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ).

## Geopotential

- Die Schwerkraft (in Newton), die auf 1 kg in der Höhe  $z$  wirkt, entspricht dem Zahlenwert der Schwerebeschleunigung  $g$ .
- Um 1 kg in der Höhe  $z$  auf die Höhe  $z + dz$  zu bringen, ist deshalb die Arbeit  $gdz$  nötig.



Es folgt:  $d\phi = gdz$

## Geopotential 2

$$\phi(z) = \int_0^z g(z)dz$$

- Für das Bezugsniveau  $z = 0$  gilt die Konvention  $\phi(0) = 0$ .
- Das Geopotential einer Masse hängt nur von deren Höhe ab.
- Es hängt nicht aber vom Weg ab, auf dem sie dorthin gebracht wurde (**Der mathematische Beweis stammt aus der Vektoranalysis**).
- Wenn eine Einheitsmasse von der Höhe **A** auf die Höhe **B** gehoben wird, so wird immer die Energie  $\phi(B) - \phi(A)$  benötigt.
- Auf dem Weg zurück zu **A** ist die gleiche Energiemenge wieder verfügbar.

## Geopotential 3

- Die Geopotentialhöhe  $Z$  ergibt sich aus der Division des Geopotentials durch die mittlere Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche ( $g^* = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ ).

$$Z = \frac{\phi(z)}{g^*} = \frac{1}{g^*} \int_0^z g(z)dz$$

- In der unteren Atmosphäre besteht zwischen Höhenangaben in  $z$  und  $Z$  fast kein Unterschied.
- Die zunehmende Erdentfernung wirkt sich erst in größeren Höhen stärker auf  $g$  aus.



#### Geopotential 4

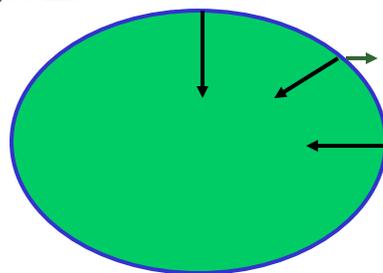
| z (km) | Z (km)  | g (ms <sup>-1</sup> ) |
|--------|---------|-----------------------|
| 0      | 0       | 9.802                 |
| 1      | 1.000   | 9.798                 |
| 10     | 9.986   | 9.791                 |
| 20     | 19.941  | 9.741                 |
| 30     | 29.864  | 9.710                 |
| 60     | 59.449  | 9.620                 |
| 90     | 88.758  | 9.531                 |
| 120    | 117.795 | 9.443                 |
| 160    | 156.096 | 9.327                 |
| 200    | 193.928 | 9.214                 |
| 300    | 286.520 | 8.940                 |
| 400    | 376.370 | 8.677                 |
| 500    | 463.597 | 8.427                 |
| 600    | 548.314 | 8.186                 |

Der Unterschied zwischen Z und z bei 40 Breitengrad.

#### Geopotential 5

$$g_{\text{Pol}} = 9,83 \text{ ms}^{-2}$$

Tangentialgeschwindigkeit  $v = \Omega r$

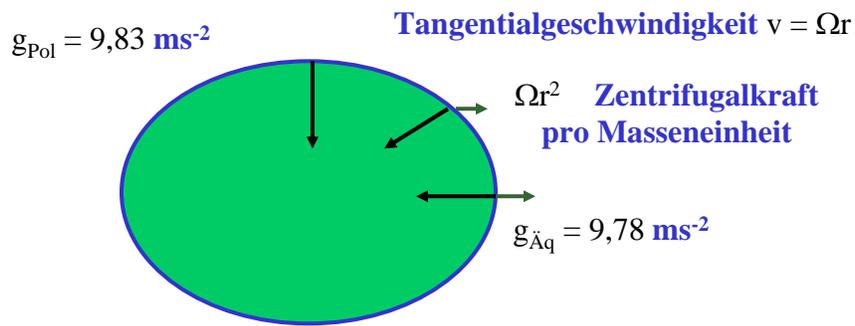


$\Omega^2 r$  Zentrifugalkraft  
pro Masseneinheit

$$g_{\text{Äq}} = 9,78 \text{ ms}^{-2}$$

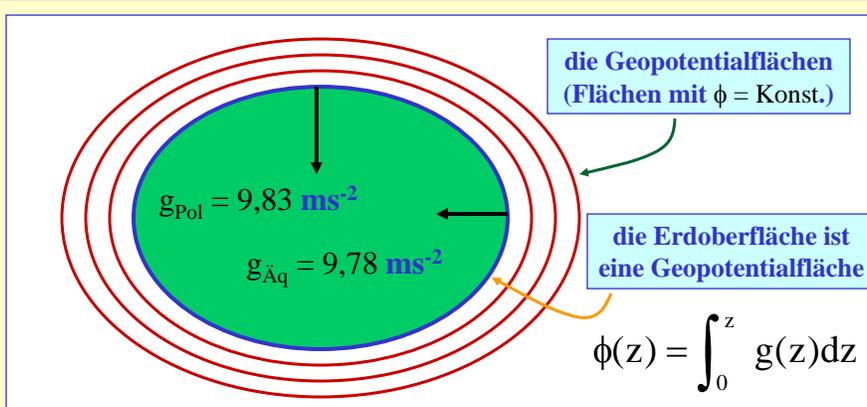
- Die Schwerebeschleunigung variiert wegen der Erdrotation und der Abplattung der Erdkugel mit der geographischen Breite.
- Die Abplattung der Erde ist entstanden als die flüssige Erde erstarrte.

### Geopotential 6



- In niedrigen Breiten wird  $g$  von der Zentrifugalkraft vermindert.
- $\Rightarrow$  man kann mit einer vorgegebenen Energiemenge eine Masse über dem Äquator etwas höher heben als am Pol.

### Geopotential 7



- Die Geopotentialflächen verlaufen in der Atmosphäre über dem Pol in geringer Entfernung vom Meeresniveau als über dem Äquator.
- Auf diesen leicht geneigten Flächen wirkt in jedem Punkt als einzige Kraft die Schwerkraft.
- Auf einer nicht geneigten Fläche  $z = \text{Konst.}$  tritt dagegen zusätzlich eine zum Äquator hin gerichtete Kraft-komponente auf.

## Schichtdicke und Höhe von Druckflächen

- Wenn drei von den Größen  $p$ ,  $\alpha$ ,  $r$  und  $T$  durch Messungen bestimmt sind, kann man die vierte aus der Zustandsgleichung für feuchte Luft [ $p\alpha = R_d T(1 + 0,61r)$ ] berechnen.
- Häufig wird mit dieser Gleichung  $\alpha$  eliminiert, weil diese Größe bzw die Dichte schwer zu messen ist.
- Als Beispiel läßt sich die hydrostatische Gleichung umschreiben

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT} = -\frac{pg}{R_d T_v}$$

Setzt man die Beziehung  $gdz = d\phi$  ein, ergibt sich

$$d\phi = -R_d T_v \frac{dp}{p}$$

## Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 2

nach Integration

$$\phi_2 - \phi_1 = -R_d \int_{p_1}^{p_2} T_v \frac{dp}{p}$$

oder

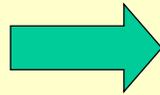
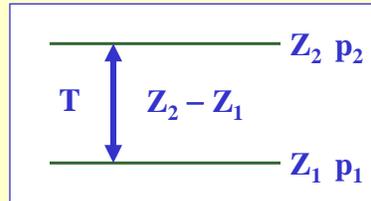
$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d}{g^*} \int_{p_2}^{p_1} T_v \frac{dp}{p}$$

- Die geopotentielle Höhe kann ermittelt werden, wenn die Änderung der Temperatur und des Mischungsverhältnisses in Abhängigkeit vom Druck bekannt ist.
- Diese Größen werden in der Atmosphäre von Radiosonden gemessen.
- Das Mischungsverhältnis ist für die Berechnung von  $T_v$  nötig.

#### Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 4

- Für den Fall einer **trockenen und isothermen** Atmosphäre  
- d.h.  $r = 0$  und  $T_v = T = \text{const.}$

$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d}{g^*} \int_{p_2}^{p_1} T_v \frac{dp}{p}$$

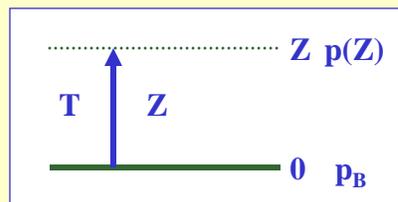


$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d T}{g^*} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

#### Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 5

- $Z_1 = 0$ ,  $Z_2 = Z$ ,  $p_1 = p_B$  - **der Bodendruck** und  $p_2 = p(Z)$ .

$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d T}{g^*} \ln \frac{p_1}{p_2}$$



$$p(Z) = p_B \exp \left[ -\frac{Z}{H} \right]$$

$$H = \frac{R_d T}{g^*} \quad \text{Skalenhöhe}$$

Für die mittlere Temperatur an der Erdoberfläche von 288 K beträgt  $H \approx 8,5$  km.

### Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 6

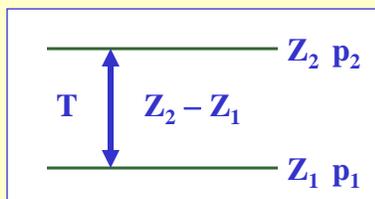
- In der Troposphäre ändert sich zwar die virtuelle Temperatur mit der Höhe.
- Die Formel

$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d T}{g^*} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

kann aber dennoch verwendet werden, wenn man statt  $T_v$  eine **mittlere virtuelle Temperatur**  $T_v$  bezüglich  $\ln p$  definiert

$$\bar{T} = \int_{\ln p_2}^{\ln p_1} T_v d(\ln p) / \int_{\ln p_2}^{\ln p_1} d(\ln p) = \int_{\ln p_2}^{\ln p_1} T_v \frac{dp}{p} / \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)$$

### Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 7

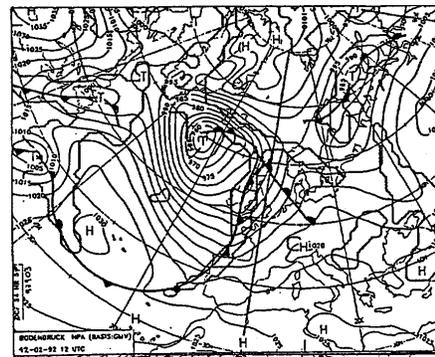


Der geopotentielle Höhenunterschied  $Z_2 - Z_1$  zwischen beliebigen Niveaus in der Atmosphäre wird als **Schichtdicke** bezeichnet (**thickness** auf Englisch).

- Wir haben schon gesehen, daß die Schichtdicke zwischen den Druckflächen  $p_1$  and  $p_2$  nur von der mittleren virtuellen Temperatur der eingeschlossenen Luft abhängt.
- Steigt  $T_v$  an, dehnt sich die Luft aus und die Schichtdicke wächst, aber die Masse der Luft ändert sich jedoch dabei nicht.

$$\text{Masse} = \int_{Z_1}^{Z_2} \rho dz = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{g^*} \frac{dp}{dz} dz = \frac{p_1 - p_2}{g^*}$$

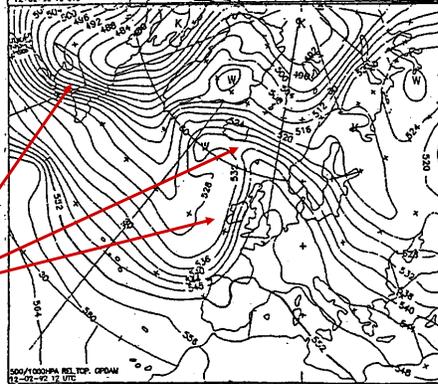
## Schichtdicke und Höhe von Druckflächen 8



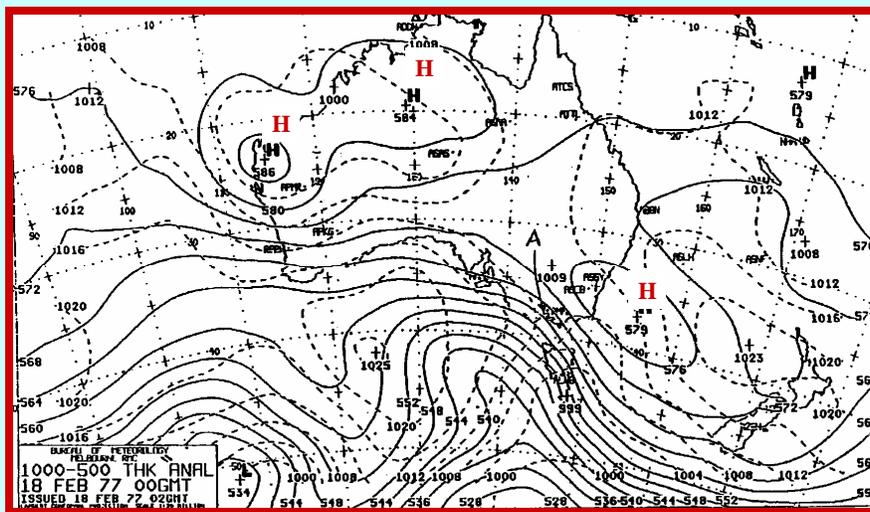
↑ Normale Bodendruckkarte

Drängungszonen  
⇔ Fronten

Schichtdicke zwischen 1000 mb und 500 mb - wird **relative Topographie** genannt - „thickness chart“ auf Englisch. ↓



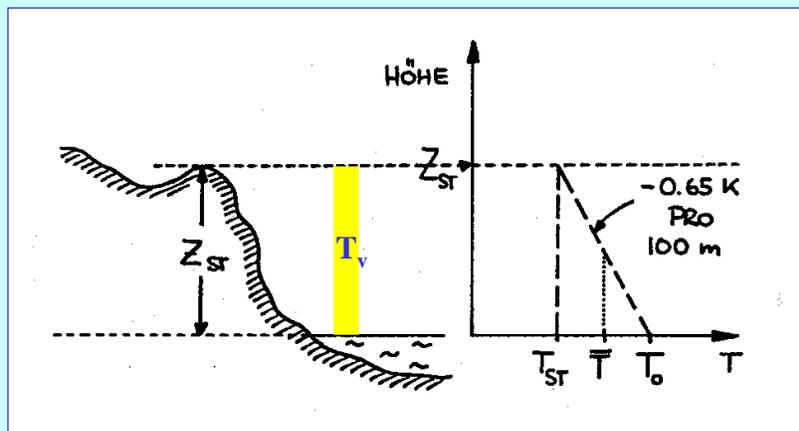
## Eine typische Schichtdickekarte



## Luftdruckreduktion auf Meereshöhe

- Die vertikale Druckänderung übertrifft bei weitem die horizontale Unterschied in verschiedenen Wettersystemen.
- Dies führt dazu, daß der Luftdruck an einer Station hauptsächlich von deren Höhenlage bestimmt wird.
- Will man die Druckmessungen vergleichen, um Schwankungen beim Durchzug von Wettersystemen festzustellen, müssen die Werte deshalb erst auf ein gemeinsames Bezugsniveau (mittlere Meereshöhe) reduziert werden.
- Eine Methode ist, den Druck einer fiktiven Luftsäule zwischen Beobachtungsort und Meeresniveau zum Meßwert an der Station  $p_{st}$  zu addieren.

## Luftdruckreduktion auf Meereshöhe 2



Zur Berechnung der virtuellen Mitteltemperatur  $T_v$  der Luftsäule wird eine Temperaturzunahme nach unten von  $0.65 \text{ K pro } 100 \text{ m}$  Höhe angenommen.

Der Druck in Meereshöhe  $p(0) = p_{st} \exp(Z_{st}/H)$  mit  $H = R_d T_v / g^*$

### Luftdruckreduktion auf Meereshöhe 3

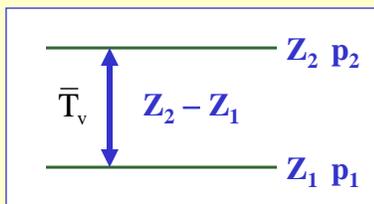
- Solange  $Z_{st}$  nicht größer als einige hundert Meter ist, gilt  $Z_{st}/H \ll 1$  und in guter Näherung

$$p(0) = p_{st} \left[ 1 + \frac{g^*}{R_d} \frac{Z_{st}}{T_v} \right]$$

- Wenn  $Z_{st}$  größer ist, benutzt man empirische Formeln für die Luftdruckreduktion auf Meereshöhe, obwohl solche Methoden nicht völlig befriedigend sind.
- Wegen der bei noch größeren Stationshöhen zunehmenden Ungenauigkeiten der Luftdruckreduktion wird der Meeresspiegel nur unterhalb 700 m Höhe als Bezugsniveau gewählt.
- Bei höhergelegenen Orten (Bergstationen) berechnet man aus der Luftdruck- und Temperaturmessung die Höhe der nächstgelegenen Hauptdruckfläche (850 mb, 700 mb).

### Barometrische Höhenmessung

- Die Höhenmesser in Flugzeugen funktionieren nach dem Prinzip der barometrischen Höhenmessung.



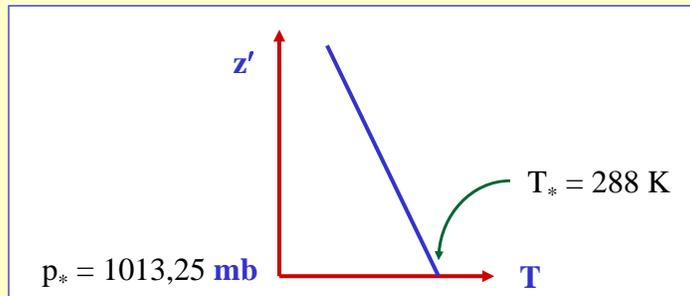
- Die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten wird durch Messung des Luftdruckes an diesen beiden Punkten bestimmt.

$$Z_2 - Z_1 = \frac{R_d \bar{T}_v}{g^*} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

- Für die exakte Ermittlung der Höhe ist jedoch die Kenntnis der **Temperatur** und **Feuchtverteilung** erforderlich; wir brauchen  $\bar{T}_v$ . Aber man weißt diese normalerweise nicht!

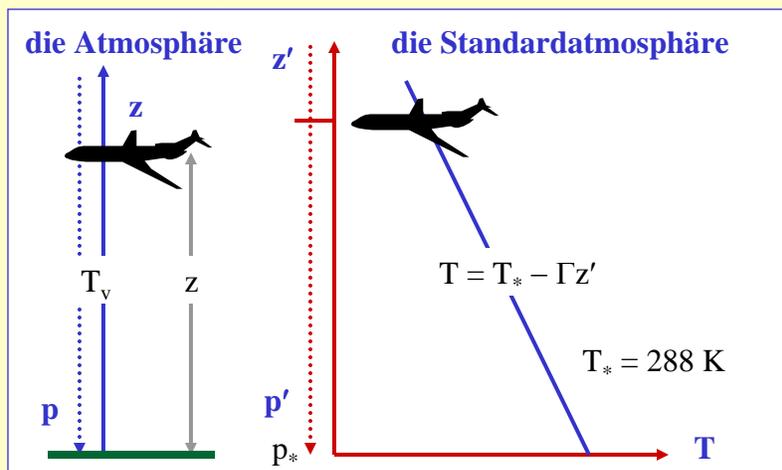
### Barometrische Höhenmessung 2

- Deshalb werden den Skalen der Höhenmesser die Werte der US-Standard-atmosphäre zugrunde gelegt.
- In ihr beträgt der vertikale Temperaturgradient  $\Gamma = -dT/dz$  bis zur Tropopause 6,5 K/km.
- Ausgangspunkte in Meereshöhe sind  $p_* = 1013,25 \text{ mb}$  und  $T_* = 288 \text{ K}$ ; außerdem wird die Luft als trocken angenommen.



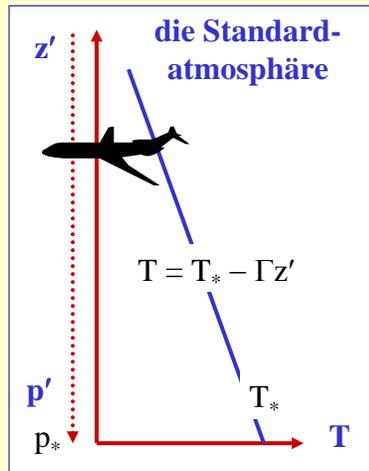
### Barometrische Höhenmessung 3

- Das Flugzeug fliegt in der Höhe  $z$  über dem Meeresspiegel und in der Höhe  $z'$  über der Druckfläche  $p_*$  der Standardatmosphäre.



## Barometrische Höhenmessung 4

- Das Flugzeug fliegt in der Höhe  $z$  über dem Meeresspiegel und in der Höhe  $z'$  über der Druckfläche  $p_*$  der Standardatmosphäre.



$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz' = -\frac{g dz'}{R(T_* - \Gamma z')}$$

$$\int_{p_*}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d} \int_0^{z'} \frac{dz'}{T_* - \Gamma z'}$$

$$\ln \frac{p}{p_*} = \frac{g}{R\Gamma} \ln \left[ \frac{T_* - \Gamma z'}{T_*} \right]$$

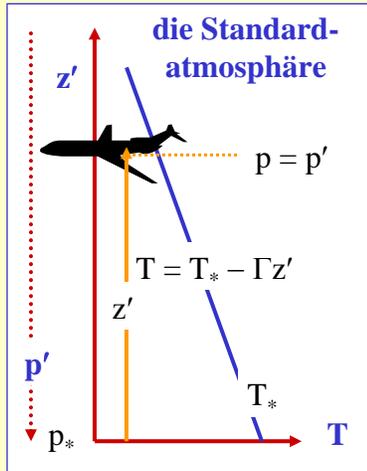
$$z' = \frac{T_*}{\Gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_*} \right)^{R_d \Gamma / g} \right]$$

## Der Höhenmesser eines Flugzeugs



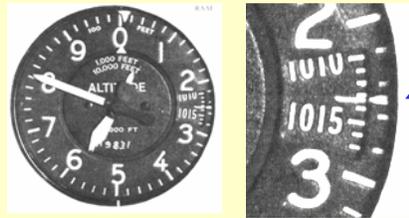
Barometrische Höhenmessung 4

- Das Flugzeug fliegt in der Höhe  $z'$  über der Druckfläche  $p_*$  der Standardatmosphäre.



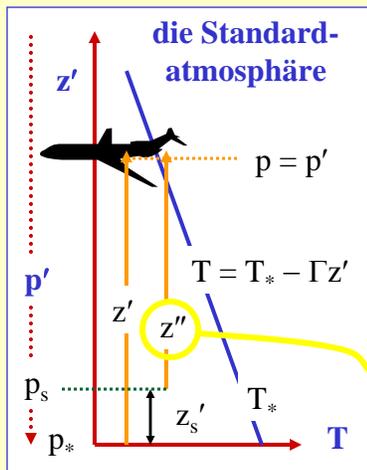
$$z' = \frac{T_*}{\Gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p'}{p_*} \right)^{R_d \Gamma / g} \right]$$

Wenn der Druck 1013.2 mb im Höhenmesser eingestellt ist, wird die Höhe  $z$  angezeigt.



Barometrische Höhenmessung 4

- Das Flugzeug fliegt in der Höhe  $z'$  über der Druckfläche  $p_*$  der Standardatmosphäre.



$$z' = \frac{T_*}{\Gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p'}{p_*} \right)^{R_d \Gamma / g} \right]$$

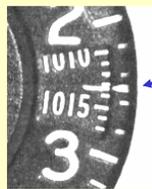
Sei der aktuelle Bodendruck bei  $z = 0$ ,  $p_s$ .

$$z'_s = \frac{T_*}{\Gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p_s}{p_*} \right)^{R_d \Gamma / g} \right]$$

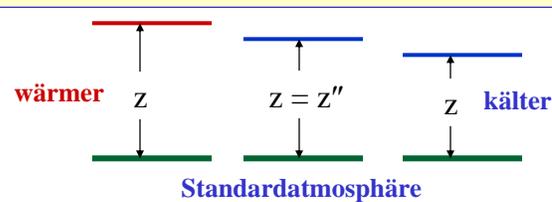
$z'' = z' - z'_s$

## Barometrische Höhenmessung 5

- Wenn der **Druck im mittlere Meeresniveau**  $p_s$  im Höhenmesser eingestellt wurde, wird eine Höhe  $z''$  angezeigt.
- Der Druck  $p_s$  wird **QNH** genannt.
- Am Flugplatz zeigt der Höhenmesser die Flugplatzhöhe in der Standardatmosphäre über Meeresniveau,  $z_b'$ .
- Ist die Mitteltemperatur der Luft zwischen Meeresniveau und Flugplatzhöhe oder Flugzeug höher (niedriger) als die der Standardatmosphäre, mißt man im Vergleich zur tatsächlichen Höhe eine zu kleine (zu große) Flugplatzhöhe oder Flughöhe.

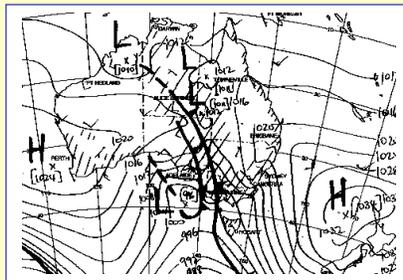


QNH

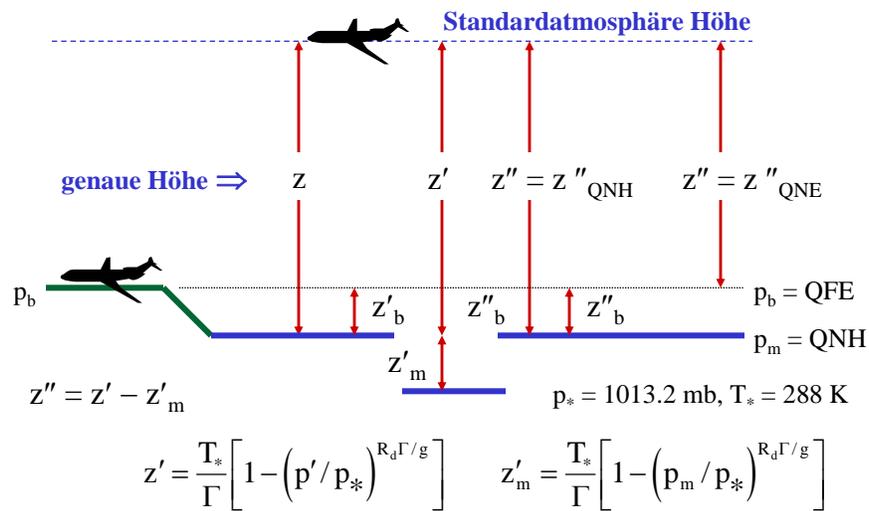


## Barometrische Höhenmessung 5

- Beim Durchfliegen von Wettersystemen können durch die Änderungen des **QNH**-Wertes entstehen.



## Zusammenfassung: Höhenmessung im Flugzeug



Ende