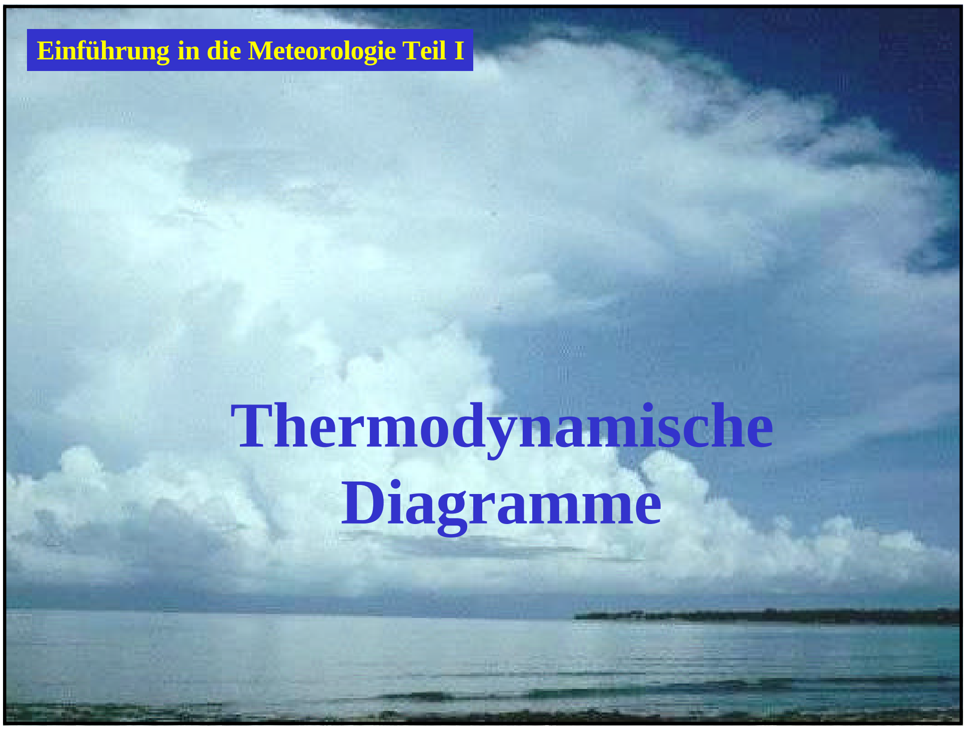
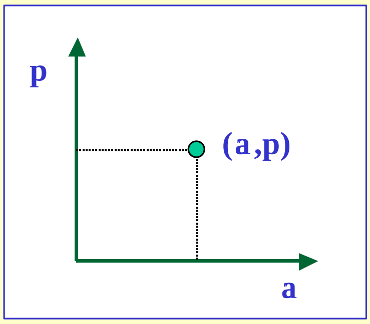


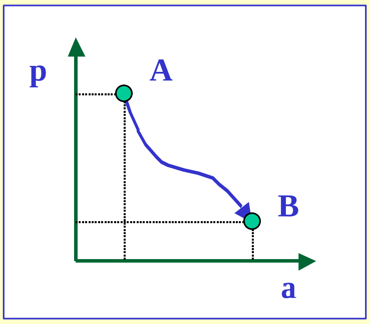
Thermodynamischen Diagramme

- **Mit thermodynamischen (aerologischen) Diagrammen lassen sich Zustandsänderungen von Luftpaketen bei Vertikalbewegungen graphisch untersuchen.**
- **Man trägt die Radiosondenmessungen (Druck, Temperatur, Feuchte) in diese Diagramme ein, um den Zustand der Atmosphäre zu bestimmen.**
- **Man kann ohne aufwendige Rechenarbeit die Stabilität der atmosphärischen Schichtung beurteilen und Aussagen über Thermik, Quellwolkenbildung, Schauer- und Gewitterwahrscheinlichkeit machen.**

Graphische Darstellung von Zustandsänderungen

- Der thermodynamische Zustand eines Gases läßt sich durch einen Punkt im pV- oder pα-Diagramm angeben.

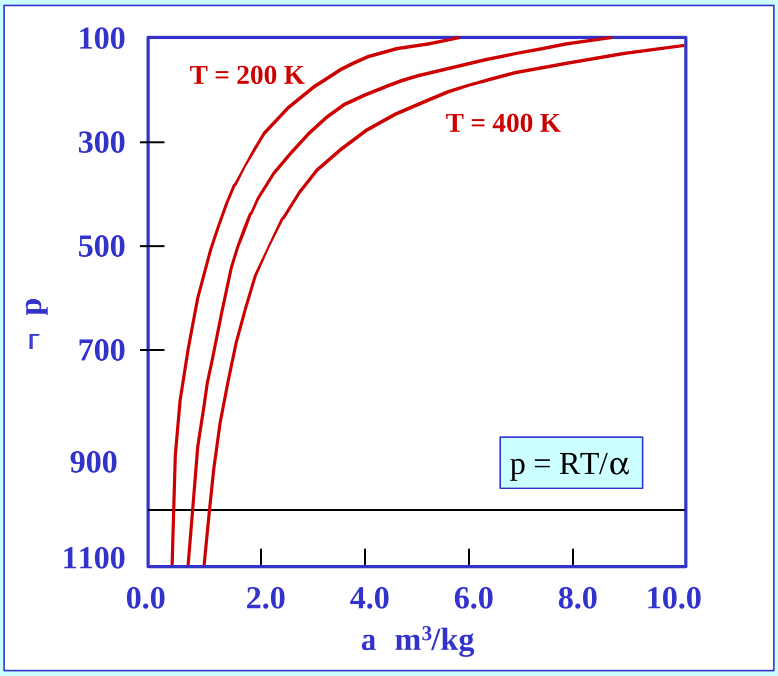




- Zustandsänderungen kann man durch Kurven in diesem Diagramm darstellen.

Thermodynamischen Diagramme 2

- Wir haben bereits das p-α Diagramm vorgestellt.
- Jeder Zustand eines trockenen Luftpakets läßt sich durch einen Punkt in diesem Diagramm angeben.
- Jedes feuchte Luftpaket wird mit zwei Punkten (Temperatur und Feuchtegröbe) bestimmt.
- Bei einer Zustandsänderung trockener Luft (z.B. isotherm oder adiabatisch) ergibt sich ein charakteristischer Kurvenverlauf.
- Zu jedem Wertepaar von p und α kann man die Temperatur, die potentielle Temperatur und das Sättigungsmischungsverhältnis ablesen, denn das Diagramm enthält die Kurvenscharen der Isothermen Adiabaten und Isolinien des Sättigungsmischungsverhältnis.

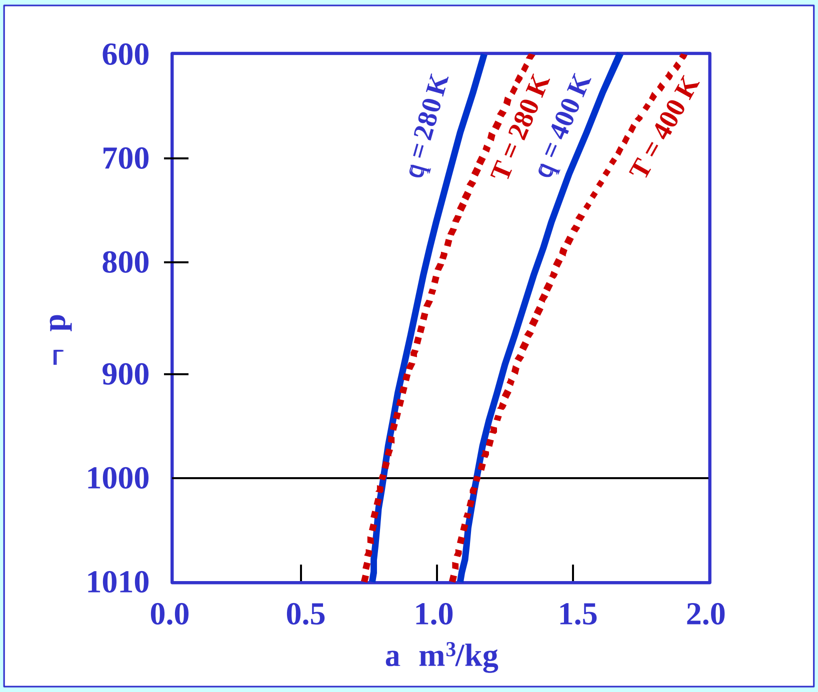


Adiabaten in einem p-a -Diagramm

- **Die potentielle Temperatur ist eine Funktion von Druck und Temperatur:** $\theta = \theta(p,T) = T(p^*/p)^{\kappa}$**.**
- **Mit** $T = p\alpha/R$**:** $\theta = \theta(p,\alpha) = (p\alpha/R)(p_*/p)^{\kappa}$ **.**
- **Löst man die Gleichung** $\theta = (p\alpha/R)(p_*/p)^{\kappa}$ **nach** α **auf, ergibt sich:**

$$\alpha = \frac{R\theta}{p_*}\left(\frac{p_*}{p}\right)^{1-\kappa}$$

- **Für verschiedene Werte** θ = **Konstant können die Kurven** $\alpha = \alpha(p)$ **in einem** $(-p)\alpha$**-Diagramm eingetragen werden.**
- **Wir nennen diese Kurven Trockenadiabaten.**
- **Entlang dieser Linien erfolgt die trockenadiabatische Zustandsänderung eines Luftpakets.**



Das Sättigungsmischungsverhältnis

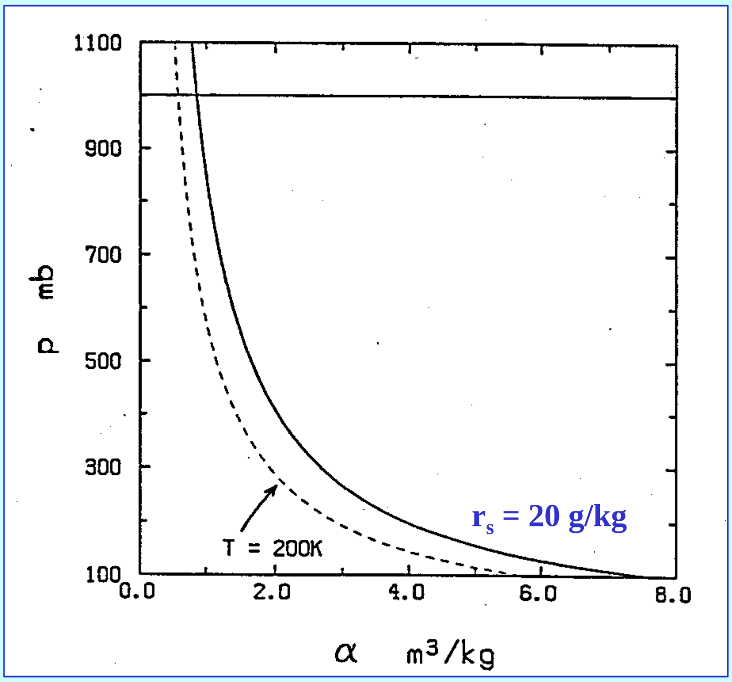
- Das **Mischungsverhältnis** ist definiert von

$$r = r_s(p, T_d) = \frac{\varepsilon e_s(T_d)}{p - e_s(T_d)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T_d)}{p}$$

- Das **Sättigungsmischungsverhältnis** r_s **ist definiert von**

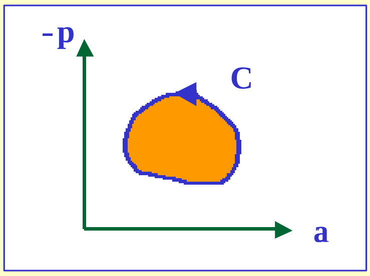
$$r_s(p, T) = \frac{\varepsilon e_s(T)}{p - e_s(T)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

- **Linien von konstantem Sättigungsmischungsverhältnis** $r_s(p,T)$ **können in einem** p-α **Diagramm eingetragen werden.**



Thermodynamischen Diagramme 3

- Wenn ein Luftvolumen einen **Kreisprozeß** durchläuft (d.h. nach mehreren Zustandsänderungen soll wieder der Anfangszustand erreicht werden), ergibt sich eine **geschlossene Kurve**.
- Eine vorteilhafte Eigenschaft von p-α Diagrammen ist, daß die von der Kurve eingeschlossene Fläche der verrichteten Arbeit proportional ist.

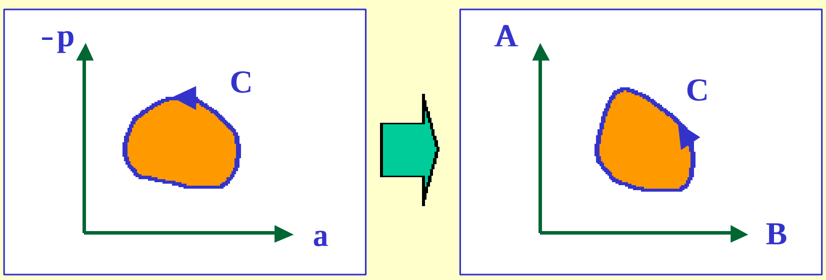


Thermodynamischen Diagramme 4

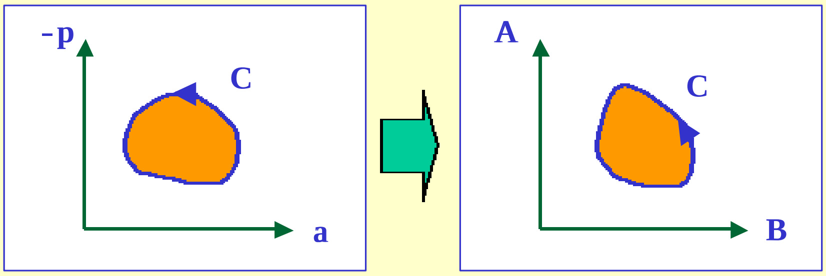
- Da p und T leichter mebbar als p und α sind, transformiert man für meteorologische Anwendungen die Koordinaten des p-α Diagramms auf geeignete Weise.
- Ein thermodynamisches Diagramm ist einfach ein transformiertes p-α Diagramm.
- Die neuen Koordinaten wählt man unter folgenden Gesichtspunkten aus:

Thermodynamischen Diagramme 5

- Die von der Kurve eines Kreisprozesses eingeschlossene Fläche soll wie im p-α Diagramm der dabei verrichteten Arbeit proportional sein.
- Die wichtigsten Linien (Isobaren, Isothermen, Trocken-adiabaten) sollen möglichst geradlinig verlaufen.
- Der Winkel zwischen Isothermen und Trockenadiabaten soll möglichst grob (90^{o}) sein.



Thermodynamischen Diagramme 5



Die Forderung, daß auch nach der Transformation von den Koordinaten $(-p, \alpha)$ **auf die Koordinaten** (A, B) **die von einer Kurve eingeschlossene Fläche gleich groß ist lautet in mathematischer Schreibweise:**

$$-\oint_C p\,d\alpha = \oint_C A\,dB \quad \Rightarrow \quad \oint_C (p\,d\alpha + A\,dB) = 0$$

Thermodynamischen Diagramme 6

$$\oint_C (p\,d\alpha + A\,dB) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $p\,d\alpha + A\,dB$ **ein vollständiges Differential sein muß,**

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha$$

Herleitung

$$\oint_C \underbrace{(p\,d\alpha + A\,dB)}_{dF = dF(\alpha,B)} = 0$$

$$F = F(\alpha,B) \Rightarrow dF = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_B}_{p} d\alpha + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_\alpha}_{A} dB$$

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_B = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_\alpha \Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha$$

Thermodynamischen Diagramme 7

$$\oint_C (p\,d\alpha + A\,dB) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha$$

Nach der Wahl der Koordinate B**, wird die Koordinate** A **so festgelegt, daß die Transformation flächentreu ist.**

Für die Koordinatenwahl gibt es mehrere Möglichkeiten:

Emagramm: B = T

Das Emagramm ermöglicht die Bestimmung des Energiebetrages pro Masseneinheit und somit quantitative Vorstellungen von der Stabilität bzw. Labilität der Atmosphäre.

Mit $\underline{B = T}$, $p\alpha = RT$:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_B = \left(\frac{\partial p}{\partial B}\right)_\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\alpha = \frac{R}{\alpha}$$

Integration ergibt: $A = R \underline{\ln \alpha} + F(T)$

$$p\alpha = RT \quad \Rightarrow \quad \ln \alpha = \ln R + \ln T - \ln p$$

$$\underline{A = -R \ln p} + \boxed{R \ln R + R \ln T + F(T)}$$

Wähle F(T) **so, daß dieser Ausdruck Null wird.**

Emagramm: $A = -R \ln p, \quad B = T$

Die Gleichung der Trockenadiabaten θ **in diesem Diagramm läßt sich folgendermaßen ableiten:**

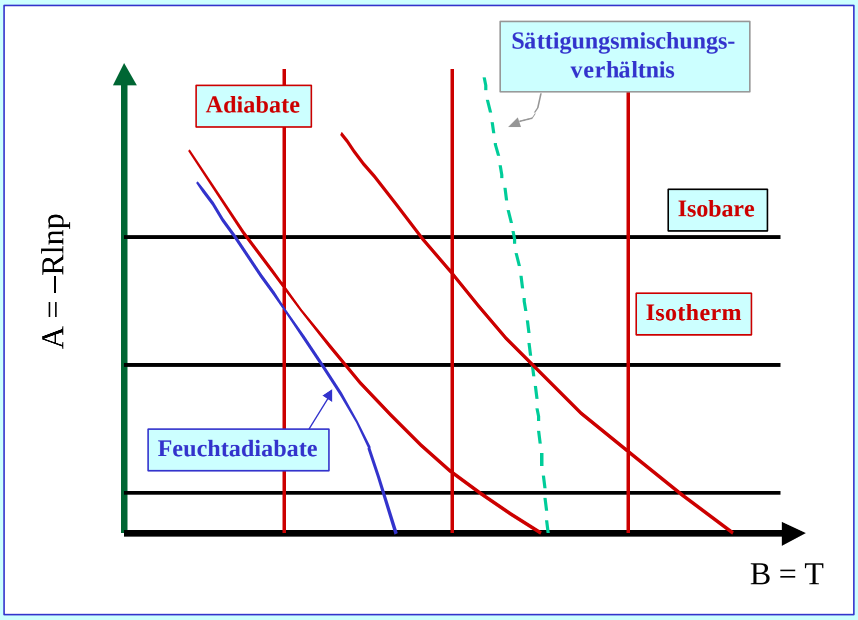
$$T = \theta \left(\frac{p}{p_*}\right)^\kappa \quad \Rightarrow \quad \ln T - \ln \theta = \kappa \ln p - \kappa \ln p_*$$

$$\Rightarrow \quad -\ln p = -\frac{c_p}{R} \ln T + \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad A = -c_p \ln B + \text{const}$$

Die Trockenadiabaten sind im Emagramm logarithmische Kurven; für die in der Atmosphäre vorkommenden Werte A **und** B **verlaufen die Trockenadiabaten (genauso wie die Sättigungsmischungsverhältnislinien) jedoch fast gerade.**

Emagramm



Tephigramm: B = T

Das Emagramm ist zwar eine flächentreue Transformation des $p\alpha$**-Diagramms, hat aber den Nachteil, daß der Winkel zwischen den Isothermen und (Trocken-) Adiabaten nur** 45° **beträgt, d. h.. es ergeben sich kleine Flächen bei Energieberechnungen. Dieses Problem löst das von Sir Napier Shaw entwickelte Tephigramm.**

Wie vorher $B = T, \quad A = R \ln\alpha + F(T)$

$$\ln\alpha = \ln R + \ln T - \ln p$$

$$\ln T - \ln\theta = \kappa \ln p - \kappa \ln p_*$$

Wähle F(T) **so, daß** $A = c_p \ln\theta$

$$\boxed{A = c_p \ln\theta, \quad B = T}$$

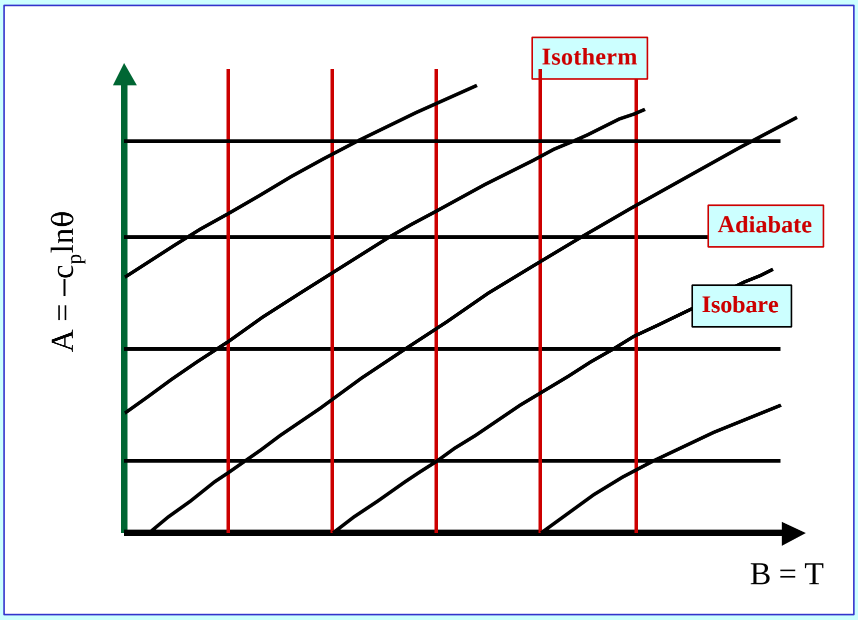
Tephigramm: $A = c_p \ln\theta, \quad B = T$

Die Gleichung der Isobaren p = const. **in diesem Diagramm:**

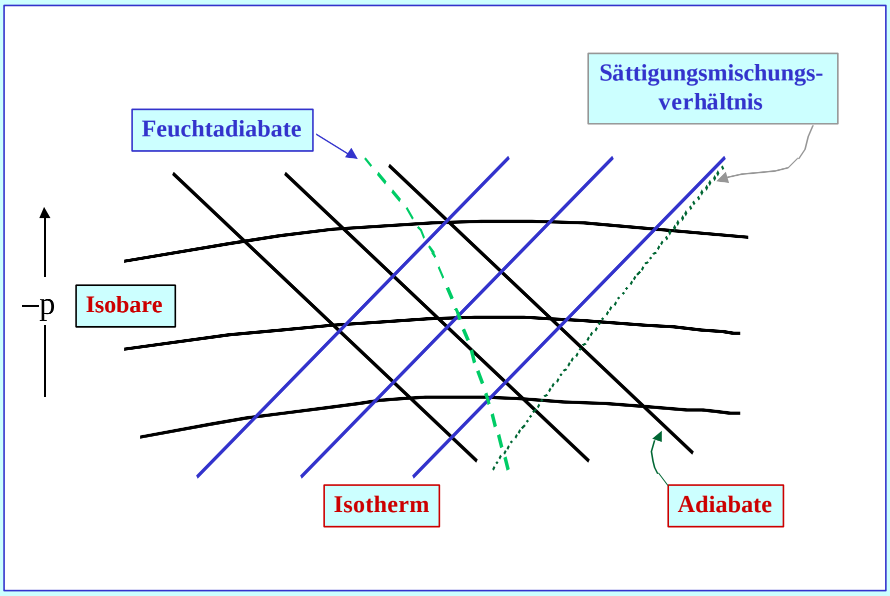
$$\ln\theta = \ln T + \kappa \ln p - \kappa \ln p_* \quad \Rightarrow \quad A = c_p \ln B + \text{const}$$

- **Die logarithmische Abhängigkeit äußert sich in einer Krümmung der Isobaren (im meteorologisch interessanten Bereich ist die Krümmung relativ schwach).**
- **Zu beachten ist, daß im Tephigramm der Winkel zwischen Isothermen und Adiabaten genau** 90° **beträgt.**
- **Änderungen im vertikalen Temperaturverlauf (z. B. Temperaturzunahme an einer Inversion) kann man deshalb besonders deutlich erkennen.**

Tephigramm



Um 45° gedrehtes Tephigramm



Skew T, log p-Diagramm (Schiefes T, log p)

- In diesem von Herlofson 1947 eingeführten Diagramm ist der Schnittwinkel zwischen **Adiabaten** und **Isothermen** fast so groß wie im Tephigramm.
- Die **Isobaren** horizontale sind Geraden Þ zählt zu den gebräuchlichsten thermodynamischen Diagrammen.

$$A = T + \mu \ln p, \quad B = -R \ln p$$

μ = const.

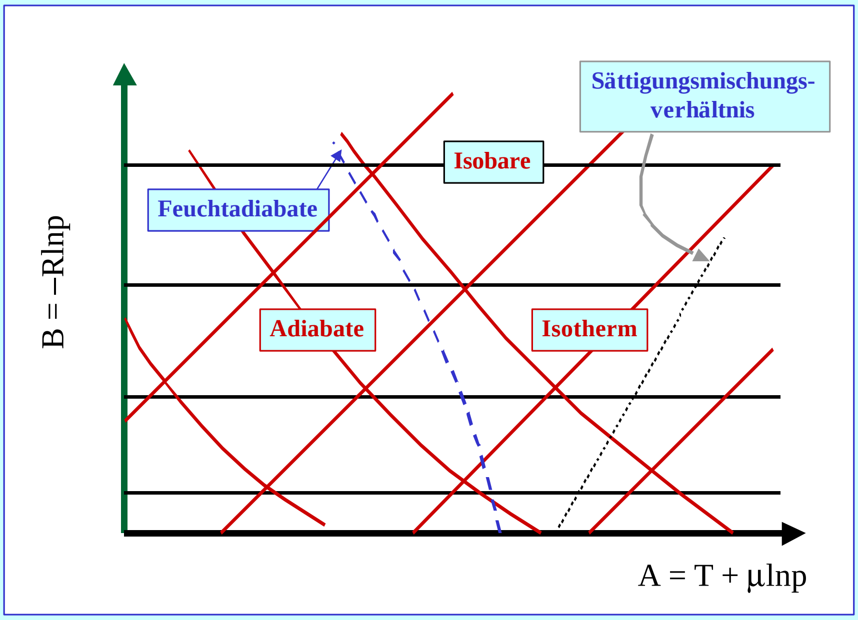
Isothermen: $B = -\frac{R}{\mu} A + \text{const.}$

schräge (engl. **skew**) Geraden.

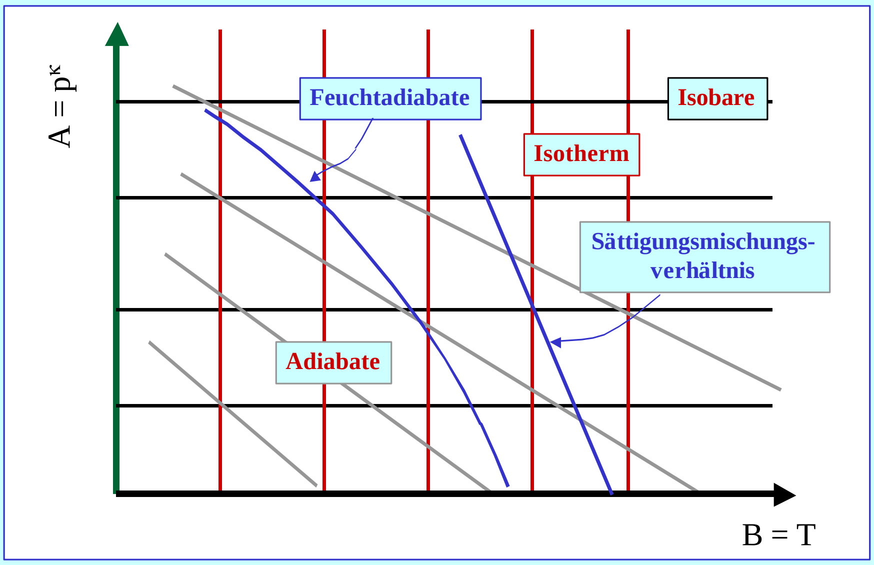
Adiabaten: $A + \frac{\mu}{R} B = C e^{-B/c_p}$

konkav gekrümmt.

Skew T, log p-Diagramm



Stüve-Diagramm: Ordinate p^{κ}, Abszisse T (nicht flächentreu)

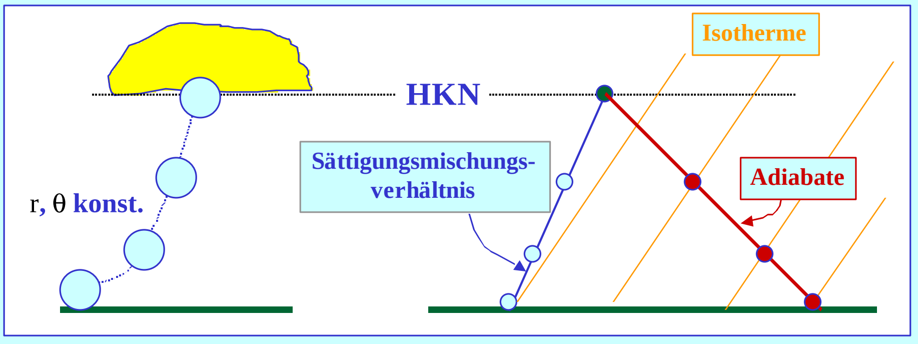


Feuchtadiabaten

- Nun geht es um die Auswirkung der Wasserdampf-Kondensation auf die Vertikalbewegung von **feuchter Luft** (= trockene Luft + Wasserdampf).
- Wird ein Paket mit feuchter Luft adiabatisch gehoben, d. h. ohne Wärmezufuhr von außen, ohne Mischung mit der Umgebungsluft, **bleibt das Wasserdampfmischungs-verhältnis konstant:** $r = r_s(p,T_d) \Rightarrow T_d = T_d(p, r)$.
- Solange noch keine Sättigung erreicht ist, ($r < r_s$) für die Temperatur bzw. virtuelle Temperatur und den Druck in jeweiliger Höhe), wird keine Kondensationswärme frei.
- Das bedeutet, daß bei der Vertikalbewegung von feuchter, **ungesättigter** Luft die adiabatische Temperaturänderung so groß ist wie die eines trockenen Luftpakets, nämlich 1 K pro 100 m.

Feuchtadiabaten 2

- Wegen der Temperaturabnahme bei der Hebung erhöht die relativen Feuchte (r_s wird immer kleiner, r bleibt konstant).
- In einer bestimmten Höhe erreicht die relative Feuchte 100% und das Luftpaket ist gesättigt ($r = r_s$).
- Diese Höhe bezeichnet man als **Hebungskondensations-niveau** (HKN) (engl. **lifting condensation level**, LCL).



Feuchtadiabaten 3

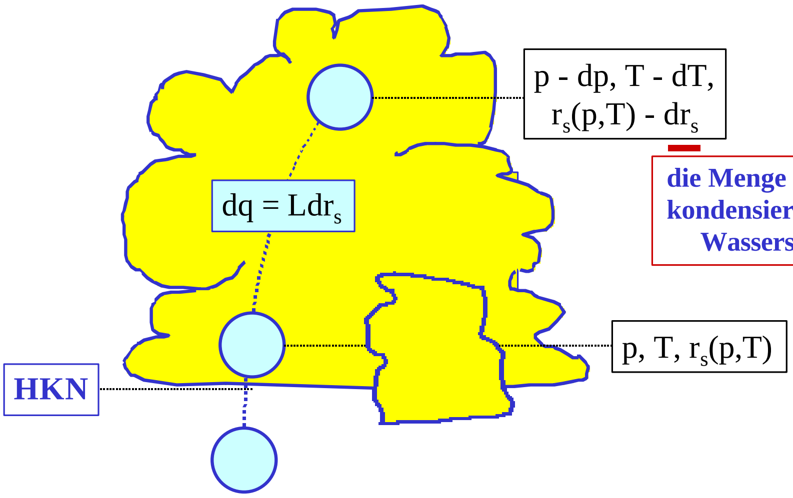
- **Bei weiterer Hebung (über das HKN) kondensiert der überschüssige Wasserdampf zu Wolkentröpfchen.**
- **Dabei wird Kondensationswärme frei, die die Luft im Paket erwärmt Þ Die feuchtadiabatische Temperaturabnahme (Temperaturabnahme in gesättigter Luft) ist kleiner als die trockenadiabatische.**
- **Bei der Berechnung der feuchtadiabatischen Temperatur-abnahme vernachlässigt man normalerweise die (kleine) Wärmemenge, die vom Flüssigwasser aufgenommen wird (pseudoadiabatischer Prozeß).**
- **Es wird angenommen, daß der überschüssige Wasserdampf sofort als Regen ausfällt, die freiwerdende Wärme aber im Luftpaket verbleibt.**
- **Ein derartiger pseudoadiabatischer Prozeß ist irreversibel.**

Feuchtadiabaten 4

- **Bleibt dagegen das gesamte kondensierte Wasser im Luftpaket, handelt es sich um einen reversiblen Prozeß.**
- **Bei den in der Natur vorkommenden Hebungsvorgängen beobachtet man meistens eine Mischung zwischen den beiden Extremen.**

pseudoadiabatischer Prozeß (irreversibel) | **reversibler Prozeß**

Feuchtadiabaten 5



die Menge des kondensierten Wassers

- **Wenn Kondensation eintritt, verringert sich der Wasserdampfanteil im Luftpaket, das Wasserdampf-mischungsverhältnis** r **(in gesättigter Luft).**

Feuchtadiabaten 6

- **Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik in der Form** $dq = c_p dT - \alpha dp$ Þ

$$-L dr_s = c_p dT - \frac{RT}{p} dp$$

$$r_s(p,T) = \frac{\varepsilon e_s(T)}{p - e_s(T)} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{p}\left(L\frac{dr_s}{dT} + c_p\right)^{-1}$$

- **Dieser Gleichung kann numerisch integriert werden.**

Feuchtadiabaten 7

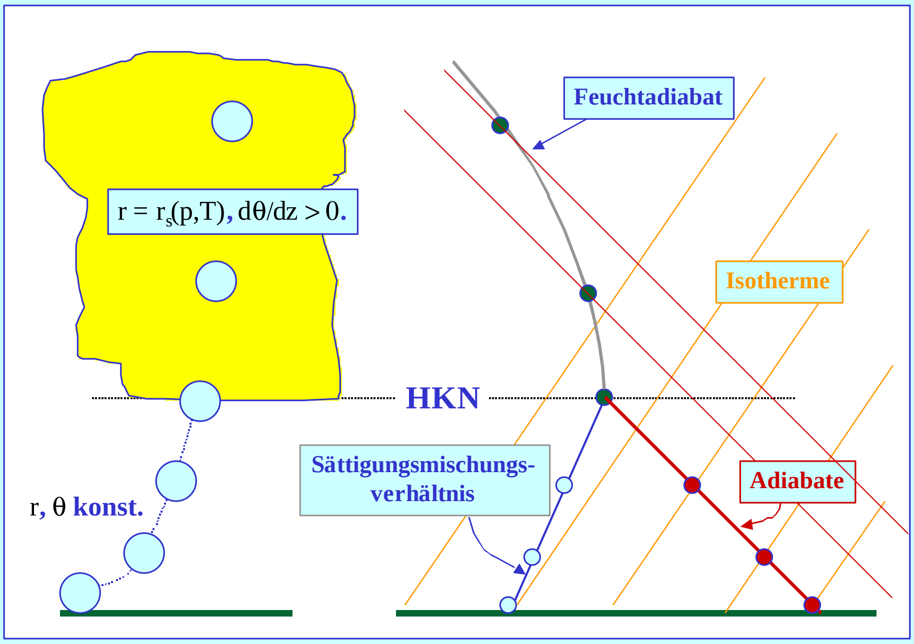
$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{p}\left(L\frac{dr_s}{dT} + c_p\right)^{-1}$$

- **Die Kurven, die die Abhängigkeit der Temperatur vom Druck bei der feuchtadiabatischen Vertikalbewegung eines Luftpakets wiedergeben, nennt man Feuchtadiabaten.**

Feuchtadiabaten 8

- **Jedes thermodynamische Diagramm enthält neben den Isobaren, Isothermen, Sättigungsmischungs-verhältnislinien und Trockenadiabaten auch die Feuchtadiabaten.**
- **Die Feuchtadiabaten nähern sich in großer Höhe (geringer Druck, tiefe Temperaturen) asymptotisch den Trocken-adiabaten, denn bei der Hebung von kalter, wasserdampfarmer Luft mit niedrigem $r_s(p,T)$ ist auch Lr_s klein, d. h. dem Luftpaket wird nur wenig latente Wärme zugeführt.**
- **Die feuchtadiabatische Temperaturabnahme beträgt in sehr warmer Luft 0,4 K pro 100 m, in mittleren Breiten in der unteren Troposphäre 0,6 K pro 100 m und nähert sich bei sehr tiefen Temperaturen 1 K pro 100 m.**

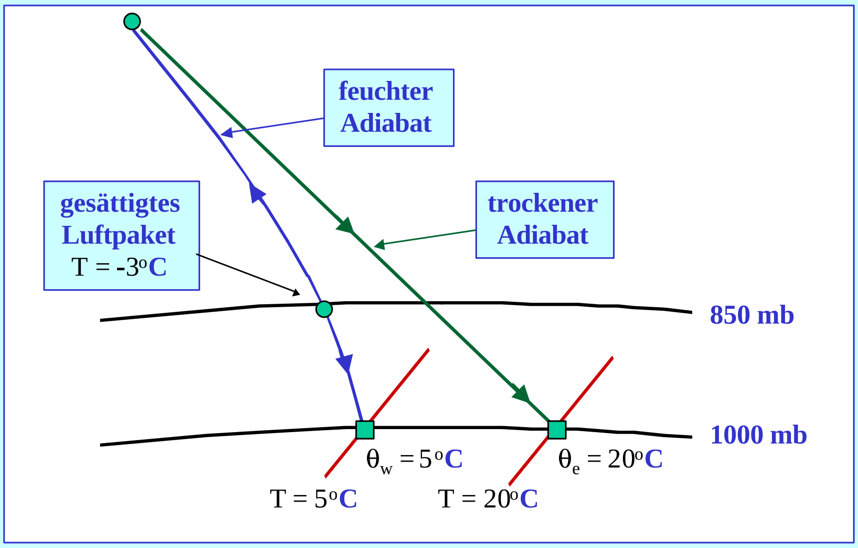
Feuchtadiabaten 9



Feuchtadiabaten 10

- Die Feuchtadiabaten werden in thermodynamischen Diagrammen meist mit der **pseudopotentiellen Temperatur** gekennzeichnet.
- Die **pseudopotentielle Temperatur** θ_e nimmt eine gesättigte Luftmenge an, wenn sie vom Kondensationsniveau solange **feuchtadiabatisch aufsteigt**, bis der gesamte Wasserdampf kondensiert und ausgefallen ist, und dann **trockenadiabatisch** auf einen Druck von 1000 mb **absinkt**.
- Manchmal gibt man zu den Feuchtadiabaten auch die zugehörige **feuchtpotentielle Temperatur** (auf Englisch, **wet-bulb potential temperature**) θ_w an.
- Diese Temperatur herrscht in gesättigter Luft, wenn sie **feuchtadiabatisch** auf das Druckniveau von 1000 mb gebracht wird. Es muß flüssiges Wasser vorhanden sein.

q_e , q_w



Feuchtadiabaten 11

- **Die pseudopotentielle Temperatur wird häufig zur Bestimmung der Luftmassen im Druckniveau** p = 850 **mb verwendet.**
- **Innerhalb einer Luftmasse variiert oft der Feuchtegehalt und damit die Differenz zwischen der Lufttemperatur** T **und dem Taupunkt** T_d **(Taupunktdifferenz** $T - T_d$**) (auf Englisch, Taupunktdifferenz = dew-point depression) .**
- **Charakteristisch für eine Luftmasse ist also weniger ihre (Trocken-)Temperatur, sondern mehr ihr Energiegehalt.**
- **Die Werte** $T = T_d = -3$°**C,** $T = 0$°**C**/$T_d = -8$°**C,** $T = 2$°**C**/$T_d = -14$°**C führen alle zur gleichen pseudopotentiellen Temperatur von** 20°**C.**

Feuchtadiabaten 12

- Auf einer θ_e-Karte kann man Gebiete mit einheitlichen pseudopotentiellen Temperaturen (Luftmassen) und Gebiete mit großem θ_e-Gradienten (Luftmassengrenzen) unterschieiden.
- Zur Bestimmung der pseudopotentiellen Temperatur von ungesättigter Luft werden T und T_d z. B. in ein Tephigramm eingetragen.
- Die zum Taupunkt gehörende Sättigungsmischungs-verhältnislinie (= Wasserdampfgehalt des Luftpakets) verfolgt man dann bis zum Schnittpunkt mit der durch T verlaufenden Trockenadiabaten.
- In der Höhe des Schnittpunktes ist das Lufpaket gesättigt. θ_e läßt sich dann an der Feuchtadiabaten ablesen.

Ende