

Kapitel 9: Ähnlichkeitstheorie



Ähnlichkeitstheorie

- Für eine ganze Anzahl von Situationen in der GS ist die Kenntnis über die bestimmende Physik unzureichend, um grundlegende Gesetzmäßigkeiten abzuleiten.
- Dennoch zeigen Beobachtungen der GS häufig wiederkehrende Charakteristiken; man kann deshalb empirische Beziehungen für die Variablen, die von Interesse sind, ableiten.
- Die Ähnlichkeitstheorie bietet eine Möglichkeit Variable so zu ordnen und zu gruppieren, dass man den maximalen Nutzen daraus ziehen kann; damit erhält man z.B. Hinweise, wie Feldexperimente angelegt werden müssen, um die möglichst umfassende Informationen zu erhalten.
- Die Grundidee ist, Variable in dimensionslosen Gruppen zu organisieren (zusammen zu fassen).

- Ähnlichkeitstheorien liefern keine Informationen über die Form der Bestimmungsgleichungen oder die Beziehung zwischen den dimensionslosen Gruppen. Durch physikalische Betrachtungen, ausprobieren oder automatisierte Techniken versucht man ein Ergebnis zu erzielen, was in möglichst guter Übereinstimmung mit Beobachtungen ist.
- Ähnlichkeitsbeziehungen werden für gewöhnlich entwickelt, um sie für Gleichgewichtsbetrachtungen (stationäre Zustände) zu verwenden; z.B. Gleichgewichtsprofile mittlerer Variabler und/oder Turbulenzstatistiken.
- Es gibt aber Variable für die man keine Ähnlichkeitsbeziehungen entwickeln kann, z.B. die Dicke der GS, die sehr stark zeitabhängig ist.

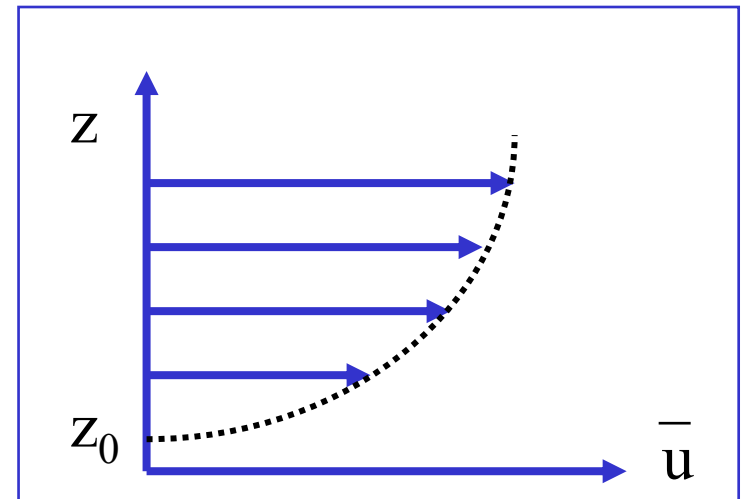
- Ähnlichkeitstheorien sind eine Art Schließung 0-ter Ordnung.
- Wenn erst einmal eine Ähnlichkeitsbeziehung gefunden wurde, kann man sie zur Untersuchung von Gleichgewichtswerten heranziehen (Profile des mittleren Winds, Temperatur, Feuchte), ohne eine Annahme über die Schließung für Turbulenz vorzunehmen.

Buckingham Pi Theorie (1914)

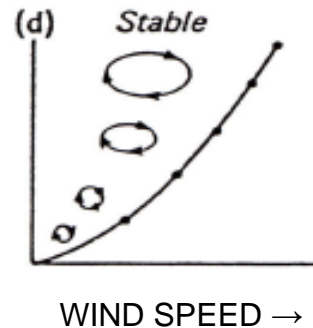
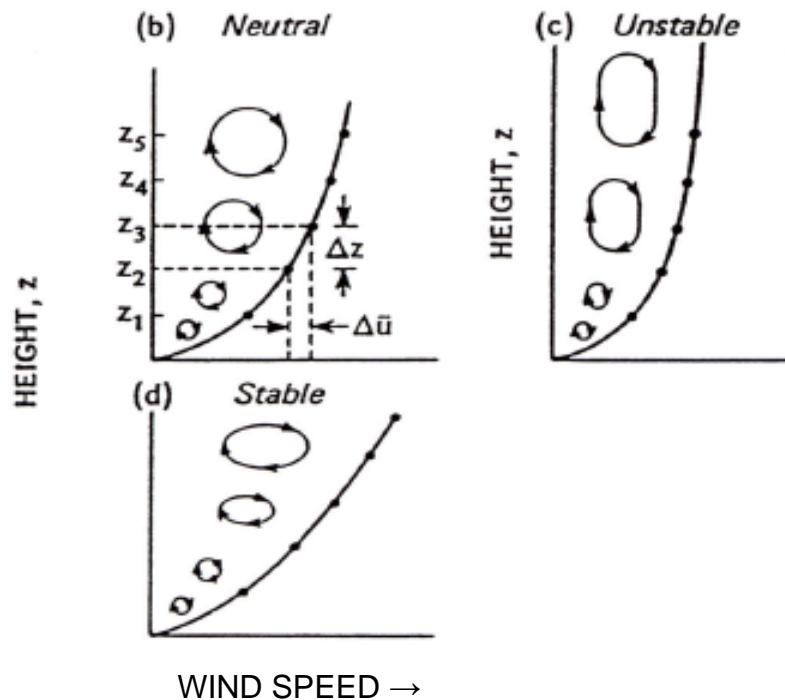
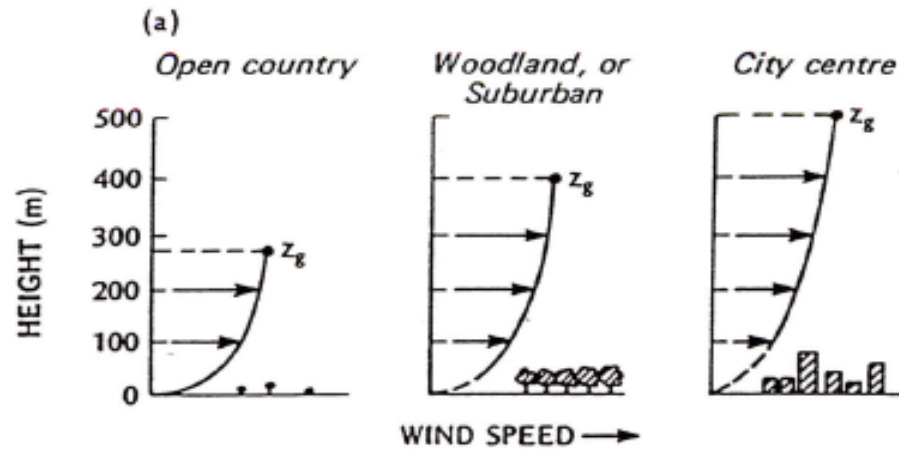
- Diese Theorie hilft dimensionslose Gruppen von ausgewählten Variablen zu bilden.
- Die Erwartung ist, dass die geeignete Wahl von Gruppen zu empirischen Beziehungen zwischen den Gruppen führt, die universell gelten, mit anderen Worten, dass sie überall und zu jeder Zeit in bestimmten Situationen gültig sind.
- Es gibt vier Schritte eine Ähnlichkeitstheorie zu entwickeln:
 - 1) Auswahl (Annahme), welche Variablen für die entsprechende Situation relevant sind;
 - 2) Ordnung der Variablen in dimensionslosen Gruppen;
 - 3) Nutzung von Messdaten, um die Werte der Gruppen zu bestimmen;
 - 4) Anpassung einer (empirischen) Kurve an die Daten. (Siehe Stull für einige Beispiele.)

Das logarithmische Windprofil

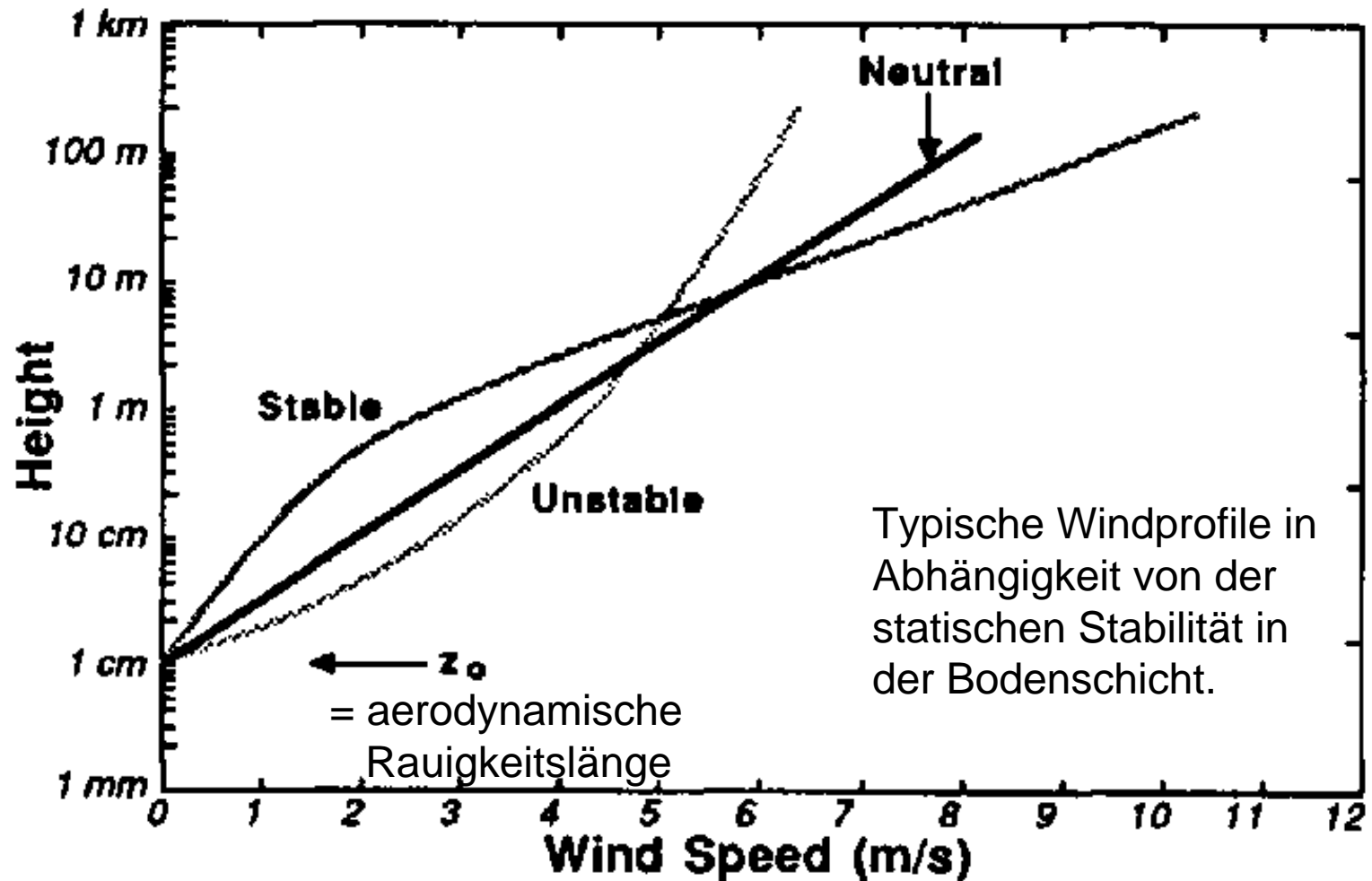
- Eine wichtige Anwendung der Ähnlichkeitstheorie ist bezogen auf das mittlere Windprofil in der Bodenschicht.
- Dieses Windprofil ist für viele Anwendung wichtig, z.B. Konstruktion von Gebäuden, Brücken und Windrädern, Ausbreitung von Schadstoffen.
- Über das Windprofil in der Bodenschicht hat man viele Informationen. Aufgrund der Vielzahl von Messdaten konnte man es ausgiebig untersuchen.
- In der Bodenschicht ändert sich das Windprofil für gewöhnlich logarithmisch mit der Höhe. Reibungskräfte führen dazu, dass die Windgeschwindigkeit am Boden gleich Null ist.



Windprofile für verschiedene Stabilitäten und Oberflächen



- Wenn man die Daten in einem semi-logarithmischen Koordinatensystem darstellt, erscheint das Windprofil in einer statisch neutralen Atmosphäre als gerade Linie.



Windprofile in statisch neutraler Umgebung

- Wir suchen eine Beziehung für den mittleren Wind $\bar{U}(z)$.
- Die relevanten Variablen sind:
Scherspannung am Boden (repräsentiert durch u_*) und Rauigkeit des Boden (gegeben durch die aerodynamische Rauigkeitslänge z_0).

- Aus der Buckingham Pi Theorie ergeben sich zwei dimensionslose Gruppen: \bar{U}/u_* und z/z_0 .

Aus dem vorherigen Bild ergibt sich:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

von Kármán Konstante
= Proportionalitätskonstante

- Über den genauen Wert gibt es keine Einigkeit, in der neueren Literatur findet man $k = 0.4 \pm 0.01$.

Alternative Herleitung des Windprofils

- Der Impulsfluss in der Bodenschicht ist gegeben durch:

$$\overline{u'w'} = -k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$$

- Der Impulsfluss in der Bodenschicht ist aber ungefähr konstant mit der Höhe:

$$\overline{u'w'}(z) = \overline{u'w'}(0) = u_*^2$$

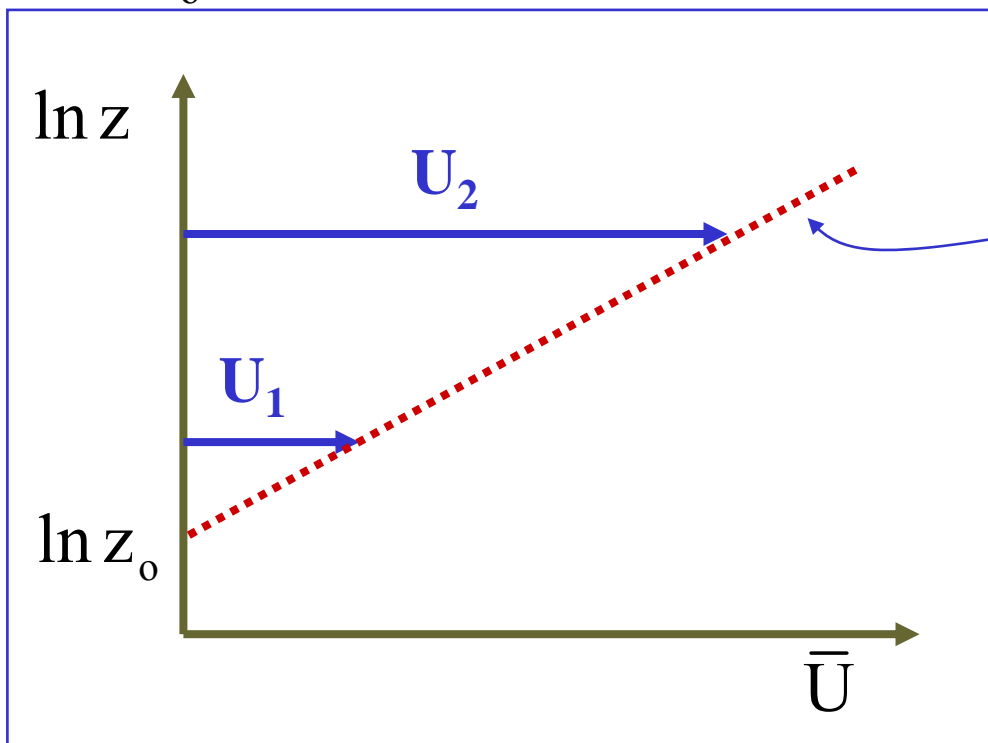
Einsetzen ergibt: $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$

Integration von z_0 hinsichtlich z ergibt:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

Aerodynamische Rauigkeitslänge

- Die aerodynamische Rauigkeitslänge z_0 ist definiert als die Höhe, in der die Windgeschwindigkeit Null wird.
- Wenn Beobachtungen der Windgeschwindigkeit in zwei oder mehr Höhen vorliegt, kann man einfach die Werte für z_0 und u_* bestimmen:



$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} (\ln z - \ln z_0)$$



Aerodynamische Rauigkeitslänge

- Die Rauigkeitslänge ist nicht gleich der Höhe von einzelnen "Hindernissen" am Erdboden! Aber es gibt eine eins-zu-eins Beziehung zwischen diesen Hindernissen und der aerodynamischen Rauigkeitslänge.
- Mit anderen Worten, wenn die Rauigkeitslänge z_0 einmal für eine bestimmte Oberfläche ermittelt wurde, dann ist sie unabhängig von der Windgeschwindigkeit, der Stabilität oder der Scherspannung.
- Ändern kann sich z_0 nur, wenn sich die Elemente, die die Rauigkeit bestimmen, verändern.

Rauigkeitslänge über dem Ozean (Wasser)

- Beziehung für die Rauigkeit über Ozeanen nach Charnock:

$$z_0 = \frac{\alpha_c u_*^2}{g}$$

Für Wasseroberflächen gilt: $\alpha_c = 0.016$.

- Da die Rauigkeitslänge direkt im Zusammenhang mit der Höhe der Wellen steht, ist z_0 eine Funktion der Scherspannung am Boden oder der Windgeschwindigkeit (siehe dazu Stull, Kapitel 7, Seite 265).

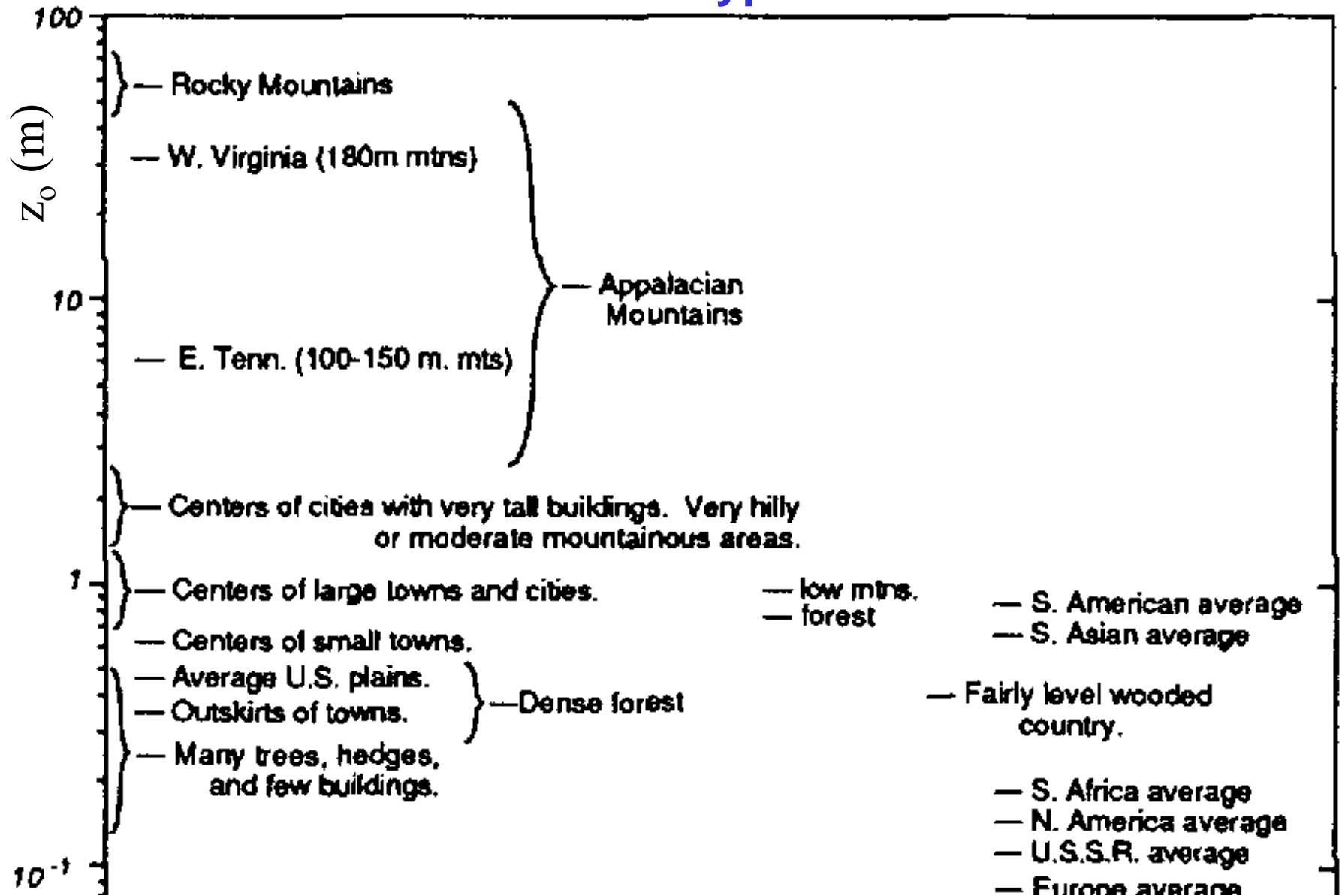
Aerodynamische Rauigkeitslänge

- In vielen größerskaligen Wettervorhersagemodellen ist der niedrigste Modellgitterpunkt in einer Höhe z_1 soweit oberhalb der Erdoberfläche, dass die Bodenschicht nicht aufgelöst ist.
- Trotzdem ist es aber wichtig, die sich verändernde Rauigkeit in Vorhersagemodellen zu berücksichtigen.
- André und Blondin (1986) schlugen die Einführung einer effektiven Rauigkeitslänge ($z_{o\text{ eff}}$) vor, die in Modellen je kleiner ist, desto höher die unterste Modellschicht ist.

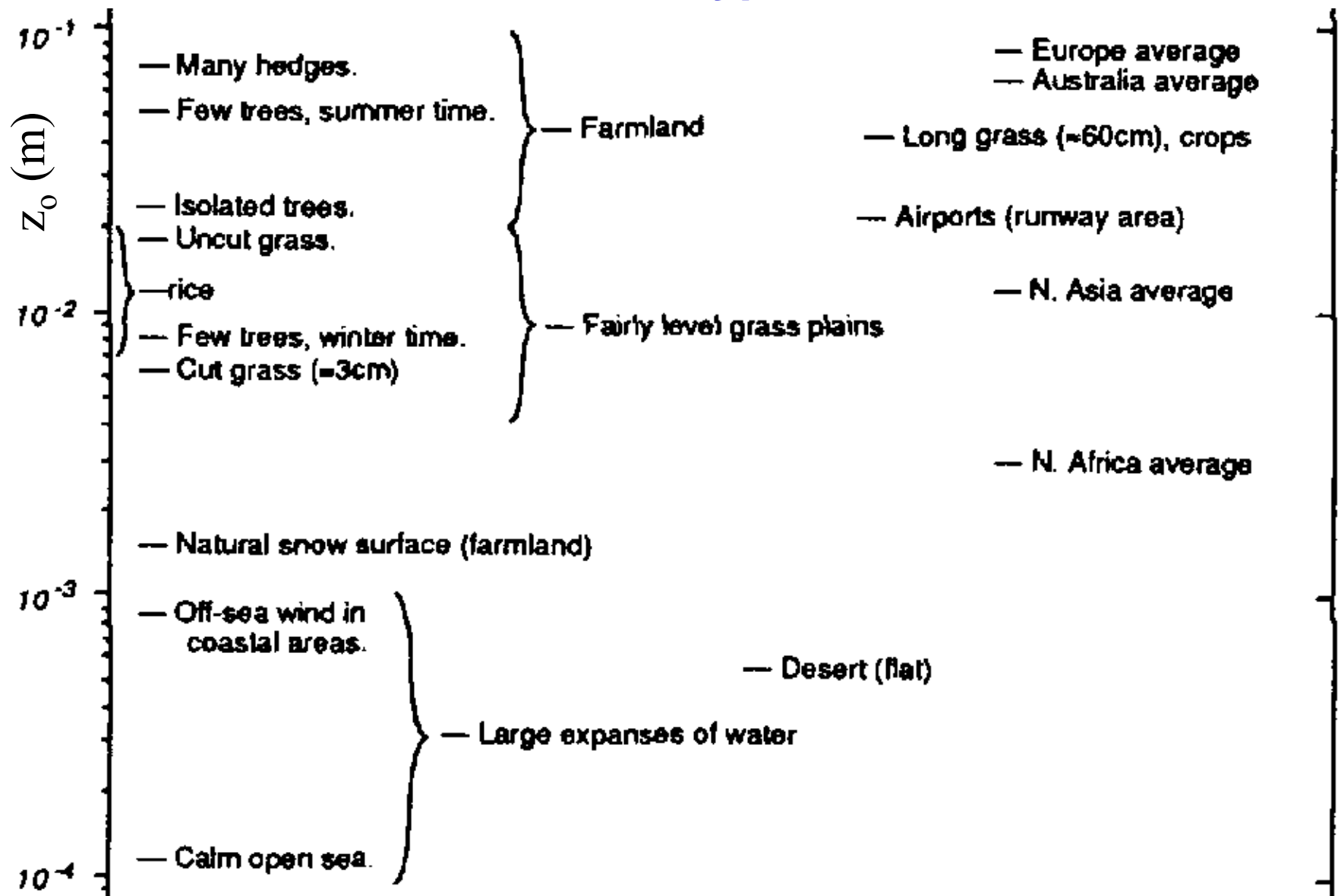
Die Rate von $z_{o\text{ eff}}/h^*$ (h^* : mittlere vertikale Erstreckung der Rauigkeitselemente) nimmt von etwa 0.1 auf 0.01 ab, wenn z_1 von 0.1 km auf 1 km ansteigt.

- Es gibt aber auch Vorschläge (z.B. Taylor, 1987), dass $z_{o\text{ eff}}$ unabhängig von z_1 ist.

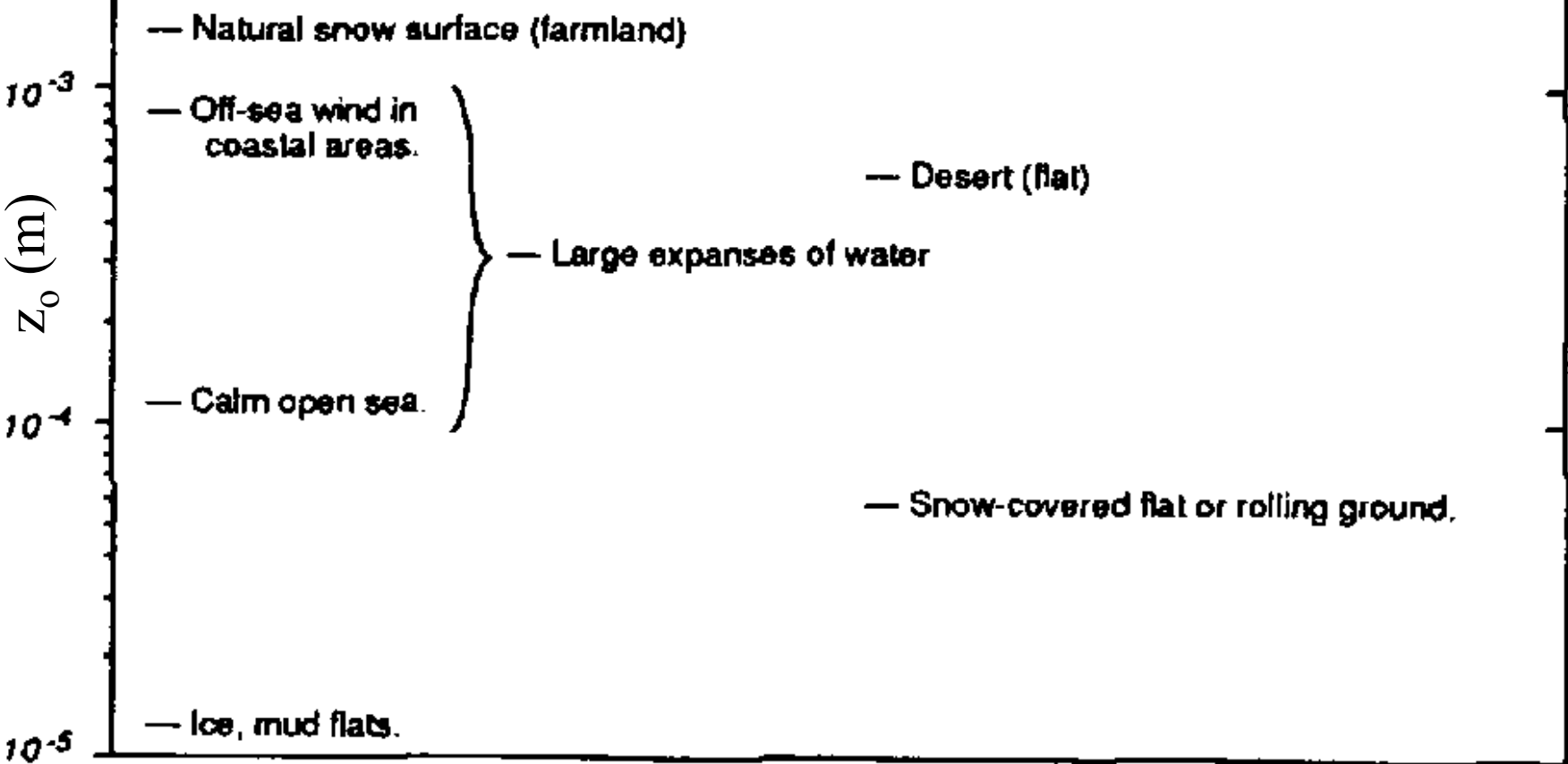
Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen



Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen

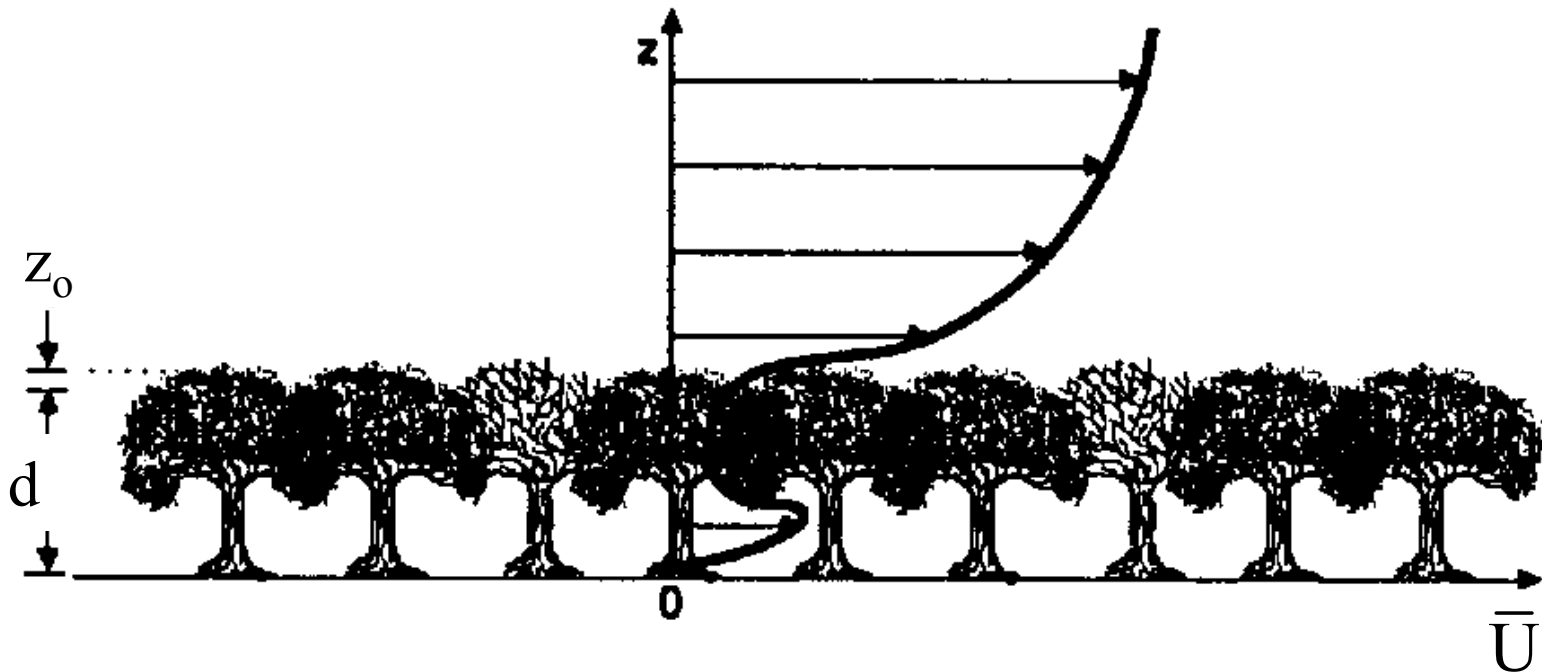


Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen



Verschiebungsabstand (engl. displacement distance)

- Über Land können die individuellen Rauigkeitselemente (Hindernisse) so eng zusammenstehen, dass die Oberkante dieser Elemente wie eine verschobene Oberfläche wirkt (z.B. dichter Wald, enge bebaute Flächen).



Die Oberkante der Bäume wirkt wie eine Oberfläche, die um den Abstand d nach oben verschoben wurde. z_0 = Rauigkeitslänge.

- Oberhalb dieser verschobenen, künstlichen Oberfläche wächst die Windgeschwindigkeit wieder logarithmisch mit der Höhe an.
- Man kann diesen Verschiebungsabstand d und die Rauigkeitslänge z_0 so definieren, dass für statisch neutrale Bedingungen gilt:

$$\bar{U} = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z - d}{z_0} \right)$$

Definiere: $\bar{U} = 0$ für $z = d + z_0$ ($z_0 = z - d$).

- Wenn bei statisch neutralen Bedingungen Beobachtungen der Windgeschwindigkeit in drei oder mehr Höhen vorliegen, ist es mittels nicht-linearer Regressionsmethoden (z.B. nach Marquardt oder Gauss-Newton) recht einfach, Lösungen für die drei Parameter u_* , z_0 und d zu finden.

Dimensionslose Windscherung

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

- In einer neutralen Bodenschicht (und nur dafür) ist die dimensionslose Windscherung gegeben durch:

$$\phi_U = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 1$$

Windprofile unter nicht-neutralen Bedingungen

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

Ausdrücke wie diese (für statisch neutrale Flüsse!) setzen den Impulsfluss, repräsentiert durch u_*^2 , in Bezug zum Geschwindigkeitsprofil.

- Solche Formeln werden Fluss-Profil Beziehungen genannt.
- Diese Beziehungen können erweitert werden für nicht-neutrale (diabatische) Bodenschichten.
- Unter nicht-neutralen Bedingungen erwartet man, dass der Auftriebsterm und der Wärmefluss am Boden zusätzlich relevante Variable sind.
- Die Buckingham Pi Analyse ergibt drei dimensionslose Gruppen (unter Vernachlässigung des Verschiebungsabstandes) :

L = Obukhov Länge

$$\frac{\bar{U}}{u_*} \quad \frac{z}{z_0} \quad \frac{z}{L}$$

- Wenn man alternativ die Scherung anstelle der Geschwindigkeit berücksichtigt, dann erhält man zwei dimensionslose Gruppen: ϕ_U und z/L .
- Auf der Grundlage von Messdaten entwickelten Businger et al. (1971) und Dyer (1974) den funktionalen Zusammenhang ("Businger-Dyer Beziehung"):

$$\phi_U = \begin{cases} 1 + 4.7z/L & \text{for } z/L > 0 \quad (\text{stable}) \\ 1 & \text{for } z/L = 0 \quad (\text{neutral}) \\ [1 - (15z/L)]^{-1/4} & \text{for } z/L < 0 \quad (\text{unstable}) \end{cases}$$

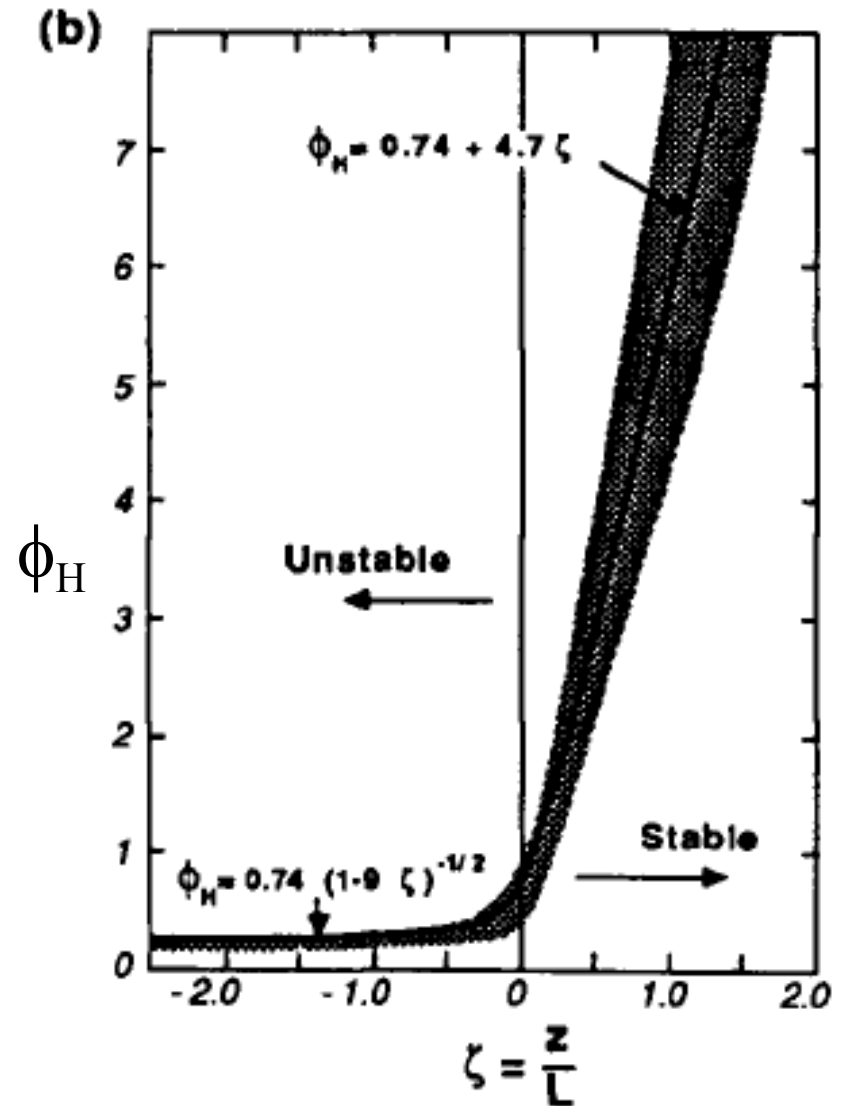
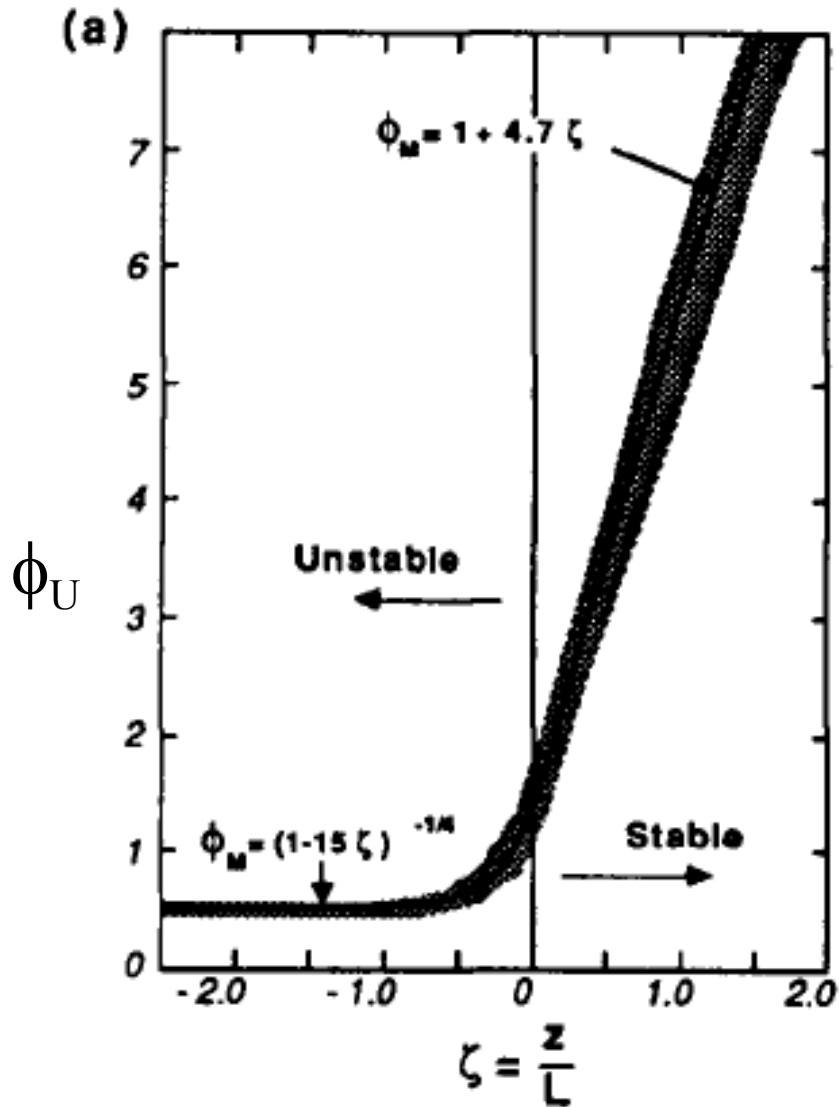
- Ähnliche Ausdrücke wurden für den Wärmefluss und Profile der potentiellen virtuellen Temperatur abgeleitet:



$$\phi_H = \begin{cases} \frac{K_M}{K_H} + \frac{4.7z}{L} & \text{for } \frac{z}{L} > 0 \quad (\text{stable}) \\ \frac{K_M}{K_H} & \text{for } \frac{z}{L} = 0 \quad (\text{neutral}) \\ \frac{K_M}{K_H} \left(1 - \frac{15z}{L}\right)^{-1/4} & \text{for } \frac{z}{L} < 0 \quad (\text{unstable}) \end{cases}$$

wobei K_M/K_H das Verhältnis der Eddy Diffusivität von Impuls und Wärme ist. Diese Verhältnis ist für neutrale Bedingungen gleich 0.74.

- Oft wird angenommen, dass diese Fluss-Profil Beziehungen für Feuchte oder Spurenstoffe gleich sind wie die für Wärme.



Wertebereich der dimensionslosen Windscherung (a) und des Temperaturgradienten (b) in der Bodenschicht, bestimmt mit den Interpolationsformeln.

Diabatische Windprofile

- Die Businger-Dyer Beziehung kann man in der Höhe integrieren, um das Profil der Windgeschwindigkeit zu bestimmen:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \left[\ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \psi_M \left(\frac{z}{L} \right) \right]$$

mit $\psi_M \left(\frac{z}{L} \right) = \frac{4.7z}{L}$ für stabile Bedingungen, d.h. $\frac{z}{L} > 0$,

und $\psi_M \left(\frac{z}{L} \right) = -2 \ln \left(\frac{1+x}{2} \right) - \ln \left(\frac{1+x^2}{2} \right) + 2 \tan^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$

für instabile Bedingungen, d.h. $\frac{z}{L} < 0$, mit $x = \left(1 - \frac{15z}{L} \right)^{1/4}$

- Beide Ausdrücke reduzieren sich zum log. Windprofil, wenn $z/L = 0$.

Spektrale Ähnlichkeit

- Die spektrale Analyse von Daten atmosphärischer Turbulenz ist eine effektive Methode, um tiefer in die Untersuchung der Wirkungsweise turbulenter Flüsse einzusteigen.
- Die Ähnlichkeitstheorie wird u.a. auch auf Spektren angewendet, um die Ergebnisse einer Spektralanalyse zur Verbesserung des Verständnisses von Turbulenz zu nutzen.
- So ist die Intensität (Amplitude) des Energiespektrums ein Maß für die Varianz des Signals bei einer bestimmten Frequenz (-bereich), d.h. z.B. proportional zur Größe (Intensität) eines Eddies (einer Größenklasse von Eddies).

Zwischen- oder Übergangsbereich

- In vielen Situationen gibt es turbulente Eddies mittlerer Größe, die sich weder im Einflussbereich von molekularer Viskosität noch der Erzeugung von TKE befinden.
- Diese Eddies erhalten ihre Energie von größeren Eddies und geben ihre Energie an kleinere Eddies ab.
- Für stationäre turbulente Flüsse muss die Energiekaskade (hin zu höheren Frequenzen) die Dissipationsrate für die kleinsten Eddies balancieren.
- Daher gibt es nur drei Variable, die für die Bewegung (Flüsse) relevant sind: S , die spektrale Energiedichte; κ , die Wellenzahl; ε , die TKE Dissipationsrate (viskose Dissipationsrate der TKE).
- Diese Ähnlichkeitsbetrachtungen wurden erstmals von Kolmogorov (1941) und Obukhov (1941) vorgenommen.

Zwischen- oder Übergangsbereich

- Durch Anwendung einer Buckingham Pi Analyse der Größen, kann man nur eine dimensionslose Gruppe für diese drei Variable entwickeln:

$$\pi_1 = \frac{S^3 \kappa^5}{\varepsilon^2}$$

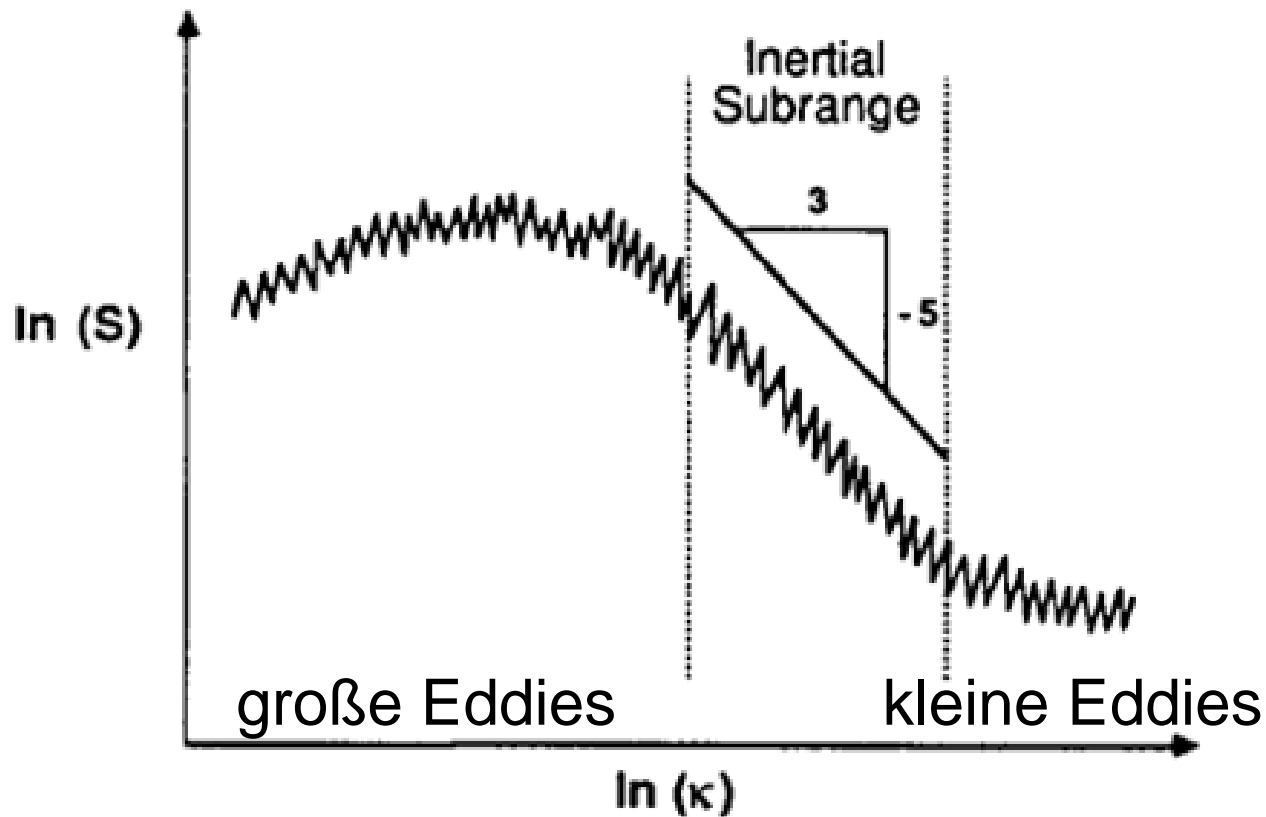
- Man weiß, dass diese Pi-Gruppe gleich einer Konstanten sein muss, da keine anderen Pi-Gruppen als Funktion von ihnen existieren.
- Lösung der obigen Gleichung für S ergibt:

$$S(\kappa) = \alpha_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$$

wobei α_k bekannt ist als die Kolmogorov Konstante.

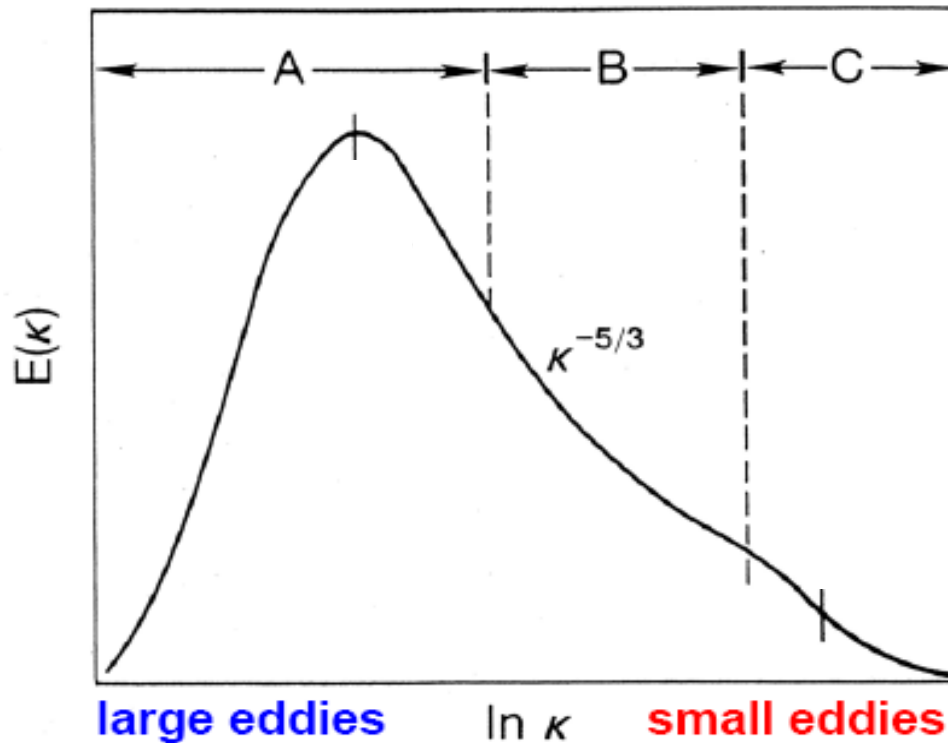
- Der in der Literatur für α_k angegebene Wert variiert zwischen $\alpha_k = 1.53$ und 1.68 .

Zwischen- oder Übergangsbereich (engl. inertial subrange)



Um zu bestimmen, ob ein gemessenes Turbulenzspektrum (d.h. spektrale Energiedichte vs. Wellenlänge bzw. Frequenz) einen Übergangsbereich aufweist, schaut man sich das Spektrum in einem logarithmischen Koordinatensystem an: Der Übergangsbereich erscheint als gerade Linie mit einer Steigung von $-5/3$.

Zwischen- oder Übergangsbereich (engl. inertial subrange)



- A. Energy containing range:** conversion of mean-flow kinetic energy to turbulence kinetic energy, TKE (production of TKE)
- B. Inertial subrange:** spectral transfer of TKE to smaller scales (no production – no dissipation of TKE), spectral roll-off at $-5/3$ power
- C. Dissipation range:** conversion of TKE to heat (by molecular interaction)



Ende Kapitel 9