

Kapitel 6:

Schließungsansatz für turbulente Strömungen



Schließungsansatz

- Die große Zahl von Gleichungen die bisher (Kap. 3-5) entwickelt wurden deuten an, dass eine mehr oder weniger vollständige Beschreibung turbulenter Flüsse (Bewegungen) möglich ist.
- Eine nähere Betrachtung zeigt aber, dass es eine große Anzahl von Unbekannten gibt. Eine Unbekannte ist hier eine Größe, für die wir keine Bestimmungsgleichung haben.
- Tatsächlich ist die Anzahl der Unbekannten in dem Satz von Gleichungen zur Beschreibung turbulenter Flüsse immer größer als die Zahl der Gleichungen, so dass das Problem nicht geschlossen ist.
- Um weiter zu kommen, müssen wir die Unbekannten parametrisieren.
- Dies nennt man das Schließungsproblem für die Turbulenz.

Eigenschaften des Schließungsproblems

- Betrachte die Bestimmungsgleichung für die mittlere potentielle Temperatur:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

Dieser Term wird zweifache Korrelation oder zweites statistisches Moment genannt.

- Um diese Unbekannte zu entfernen entwickelt man eine "Vorhersage-Gleichung". Leider enthält diese (neue) Bestimmungsgleichung eine dreifache Korrelation (bzw. drittes statistisches Moment) wie $\overline{\theta' u'_i u'_j}$.
- Die Gleichung für das dritte Moment enthält aber ein Term mit einem vierten Moment, u.s.w.

- Tatsächlich ist die Sache noch schlimmer, weil $\overline{\theta' u'_i u'_j}$ insgesamt 9 Terme repräsentiert, einen für jeden Wert von i und j . Wegen der Symmetrie des Tensors verbleiben von diesen 9 Termen 6 als Unbekannte, da z.B.

$$\overline{\theta' u'_1 u'_2} = \overline{\theta' u'_2 u'_1}$$

- Ähnliche Probleme treten bei den Impulsgleichungen turbulenter Bewegungen auf.



Beispiel für eine gewisse Anzahl von Gleichungen und Unbekannten für verschiedene statistische Momente des Impulses, um das Schließungsproblem für turbulente Flüsse zu verdeutlichen:

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
\bar{u}_i	erstes	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	3	6
$\overline{u'_i u'_j}$	zweites	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	6	10
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	drittes	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	10	15

- Der vollständig Satz von Gleichungen enthält sogar noch mehr Unbekannte.

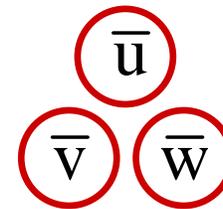
- Es gibt einen einfachen Weg, um zu erahnen, welche Unbekannten auf jedem Niveau der Schließung nach Berücksichtigung der Symmetrien erhalten bleiben (siehe nachfolgende Tabelle für die Impulskorrelationen).
- Im vollständigen Satz der Bewegungsgleichungen gibt es weitere Unbekannte, wie die Druckkorrelationen und die Terme, in denen Viskosität berücksichtigt wird.

- Korrelationsdreiecke zeigen die Unbekannten für verschiedene Niveaus des Schließungsansatzes für Turbulenz (aber nur für die Impulsgleichungen). Beachte das Muster in den Dreiecken, mit den u , v und w Statistiken jeweils an den entsprechenden Scheitelpunkten und den Kreuzkorrelationen dazwischen.

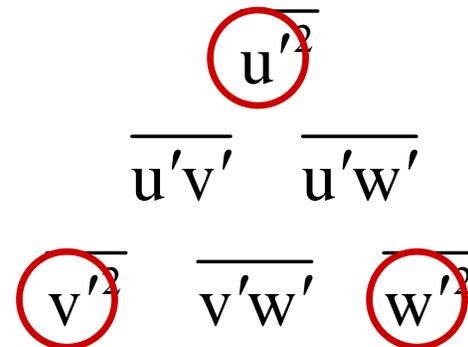
Ordnung der Schließung

Korrelationsdreieck der Unbek.

null



erster



Ordnung der Schließung

Korrelationsdreieck der Unbek.

zweiter

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \overline{u'^3} & & \\ & & & & \overline{u'^2 v'} & \overline{u'^2 w'} & \\ & & & & \overline{u' v'^2} & \overline{u' v' w'} & \overline{u' w'^2} \\ & & & & \overline{v'^3} & \overline{v'^2 w'} & \overline{v' w'^2} & \overline{w'^3} \end{array}$$

- Um die mathematische/statistische Beschreibung von Turbulenz handhabbar zu machen ist ein Ansatz, nur eine endliche Anzahl von Gleichungen aufzustellen und dann die verbleibenden Unbekannten in Termen bekannter Größen zu approximieren.
- Solche Schließungsapproximationen oder Schließungsannahmen werden nach der höchsten Ordnung der Bestimmungsgleichung benannt, die zurück behalten wird.



- Nimmt man die Gleichungen in der Tabelle als Beispiel, wird die erste Gleichung für die Schließung 1. Ordnung benutzt und die zweiten Momente approximiert.
- Genauso: Schließung 2. Ordnung nutzt die zweite Gleichung und die dritten Momente werden approximiert.

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
\bar{u}_i	erstes	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	3	6
$\overline{u'_i u'_j}$	zweites	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	6	10
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	drittes	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	10	15

- Einige Schließungsannahmen verwenden nur einem Teil der verfügbaren Gleichungen innerhalb einer speziellen Momentkategorie.
- Ein Beispiel: Wenn die Gleichungen für TKE-, Temperatur- und Feuchtevarianzen zusammen mit den Impulsgleichungen für das erste Moment (siehe vorherige Tabelle) verwendet werden, kann das Ergebnis als Schließung 1.5-ter Ordnung eingestuft werden.
- Es handelt sich offensichtlich nicht um eine vollständig Schließung 2. Ordnung, weil nicht alle Bestimmungsgleichungen für die zweiten Momente (mit anderen Worten für die Flüsse) verwendet werden, aber der Ansatz ist sicherlich von höherer Ordnung als die Schließung 1. Ordnung.
- Ganz ähnlich kann man Methoden zur Schließung 0. Ordnung und 0.5-ter Ordnung definieren.

Lokale und nicht-lokale Schließungen

- Es gibt zwei Methoden der Behandlung von Turbulenz: Lokale und nicht-lokale Schließungen.
- Weder die eine noch die andere Methode ist exakt, aber beide scheinen gut geeignet zu sein für die physikalische Situationen, für die die Parametrisierungen entwickelt wurden.
- Für lokale Schließungen wird eine unbekannte Größe an jedem Punkt im Raum durch Werte und/oder Gradienten von bekannten Größen am gleichen Punkt parametrisiert.
- Lokale Schließungen nehmen daher an, dass Turbulenz analog zur molekularen Diffusion ist.
- Das Beispiel von Donaldson (siehe unten) verdeutlicht das Vorgehen für eine lokale Schließung 2. Ordnung. In der Literatur findet man Beispiele bis zu lokalen Schließungen 3. Ordnung.

Lokale und nicht-lokale Schließungen

- Für nicht-lokale Schließungen wird die unbekannte Größe an einem Punkt durch Werte von bekannten Größen an verschiedenen Punkten im Raum parametrisiert.
- Dies setzt voraus, dass Turbulenz eine Überlagerung von verschiedenen Eddies darstellt, von der ein jeder ein Fluid transportiert, wie etwa bei der Advektion.
- Nicht-lokale Methoden werden meist im Zusammenhang mit Schließungen 1. Ordnung verwendet.
- Die folgende Tabelle fasst die enorm große Anzahl von Schließungsmethoden zusammen, die in der Fachliteratur gefunden werden.
- Generell kann man sagen, dass lokale und nicht-lokale Schließungen höherer Ordnung genauere Ergebnisse liefern als Schließungen niedrigerer Ordnung, aber dies geht zu Lasten von Kosten und Komplexität.

Klassifikation von Schließungstechniken, die in der Literatur häufig zur Anwendung kommen (sogenannte Bulk- oder Ähnlichkeitsmethoden werden später diskutiert):

Ordnung der Schließung	lokal	nicht- lokal	Andere (Bulk- und Ähnlichkeitsmethoden)
0			X
0.5	X	X	X
1	X	X	
1.5	X		
2	X		
3	X		

Regeln für Parametrisierungen

- Ungeachtet welcher Ordnung der verwendete Schließungsansatz auch ist, es bleiben unbekannte Turbulenzterme, die als Funktion bekannter Größen und Parameter parametrisiert werden müssen.
- Eine bekannte Größe ist jede Größe, die durch eine prognostische oder diagnostische Gleichung bestimmt ist.



- Ein Beispiel: Wenn eine Schließung 2. Ordnung verwendet wird, kann die unbekannte Größe $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ als Funktion von $\overline{u_i}$ und $\overline{u'_i u'_j}$ parametrisiert werden, da wir prognostische Gleichungen für diese Größen haben.

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
$\overline{u_i}$	erstes	$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	3	6
$\overline{u'_i u'_j}$	zweites	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	6	10
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	drittes	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	10	15

- Ein Parameter ist für gewöhnlich eine Konstante, deren Wert empirisch bestimmt wird. Ein Parameter kann zum Beispiel ein separater Term sein, ein konstanter Faktor oder ein Exponent.
- Per Definition ist eine Parametrisierung eine Approximation der Realität. Mit anderen Worten, man ersetzt die "wahre" (natürliche) Gleichung, die einen Wert beschreibt, durch eine künstlich erzeugten Approximation.
- Manchmal werden Parametrisierung auch verwendet, da die wahre Physik nicht (vollständig) erforscht ist.
- Manchmal ist die bekannte Physik aber auch zu kompliziert, um sie in bestimmten Anwendungen zu benutzen (z.B. Einschränkung durch Computerleistung).
- Parametrisierungen werden selten perfekt sein - man hofft, dass sie angemessen sind.

- Parametrisierungen setzen menschliches Interpretationsvermögen und Kreativität voraus. D.h., dass verschiedene Personen unter Umständen zu unterschiedlichen Parametrisierungen der gleichen Unbekannten kommen.
- Schon 1973 erkannte Donaldson: "*There are more models for closure of the equations of motion at the second-order correlation level than there are principal investigators working on the problem*".
- Obwohl es wahrscheinlich ist, dass es für jede Größe einen unendlichen Satz von Parametrisierungen gibt, müssen alle Parametrisierungen bestimmten, allgemein akzeptablen Regeln folgen.
- Am wichtigsten dabei ist, dass die Parametrisierung für eine unbekannte Größe physikalisch vernünftig sein sollte.

Regeln für Parametrisierungen

- Eine Parametrisierung muss folgende Regeln erfüllen:
 - gleiche Dimension wie die Unbekannte,
 - gleiche Tensoreigenschaften,
 - gleiche Symmetrien,
 - unveränderlich bei einer beliebigen Transformation des Koordinatensystems,
 - unveränderlich bei einer Galilei-Transformation (Änderung des Inertialsystems),
 - gleiche Budgetgleichungen und Randbedingungen.
- Diese Regeln gelten für Schließungen aller Ordnungen!

- Beispiel: Donaldson (1973) schlug vor, die unbekannte Größe $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ wie folgt zu parametrisieren:

$$-\Lambda \bar{e}^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_j u'_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} \right]$$

wobei Λ ein Parameter mit der Dimension einer Länge (m) ist und die Bekannten \bar{e} (TKE pro Einheitsmasse in $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$) und $\overline{u'_i u'_j}$ (Impulsfluss in $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$).

(Siehe Stull, Seite 202: Dort wird gezeigt und diskutiert, dass alle soeben aufgestellten Regeln eingehalten werden.)

- Im folgenden werden einige gängige Parametrisierung kurz vorgestellt, die auch in der Literatur besprochen werden.
- Die Beispiele dienen der Demonstration verschiedener Typen der Schließung und ihrer jeweiligen Merkmale.
- Ungeachtet des Typs der verwendeten Parametrisierung schließt das Ergebnis die Bewegungsgleichung für turbulente Flüsse und erlaubt daher die Lösung für verschiedene Vorhersagen, Diagnostiken oder andere praktische Anwendungen.

Lokale Schließungen 0-ter Ordnung

- Schließung 0-ter Ordnung bedeutet, dass keine prognostische Gleichungen vorhanden sind, noch nicht einmal Gleichungen für mittlere Größen.
- Mit anderen Worten, der mittlere Wind, Temperatur, Feuchte und andere mittlere Größen sind direkt als Funktion von Raum und Zeit parametrisiert.
- Offensichtlich handelt es sich dabei weder um eine lokale oder nicht-lokale Schließung, da die Behandlung (Parametrisierung) von Turbulenz insgesamt vernachlässigt wird.
- Aus diesem Grund beschäftigen wir uns im folgenden nicht weiter mit Schließungen 0-ter Ordnung, werden aber später bei der Behandlung von Ähnlichkeitstheorien darauf zurück kommen (nächstes Kapitel).

Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Schließungen 0.5-ter Ordnung benutzen eine Untermenge der Gleichungen der 1. Momente.
- Eine Variante dieses Ansatzes ist die Bulk-Methode (ebenfalls ein Schließungsansatz für Turbulenz): Bei dieser Methode wird eine Profilform für Wind oder Temperatur angenommen, wobei das resultierende Wind- oder Temperaturprofil verschoben sein kann, abhängig von dem Mittelwert ("Bulk-Mittel")* des Hintergrundwindes bzw. der Hintergrundtemperatur.

* Bulk-Mittel: Eine meteorologische Variable gemittelt über eine vertikale Strecke einer Schicht, wie z.B. die konvektive ML.

Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Beispiel: Ein Bulk-Mittel der GS $\langle \bar{\theta}(t) \rangle$ wird vorhergesagt mittels Gleichungen wie:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{L_v E}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

- Dann wird eine Form für das Profil $\Delta \bar{\theta}(z)$ angenommen und die Werte von $\bar{\theta}(z,t)$ können bestimmt werden durch:

$$\bar{\theta}(z, t) = \langle \bar{\theta}(t) \rangle + \Delta \bar{\theta}(z)$$

Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Solche Schemata werden verwendet für:
- 1) sog. Bulk oder "slab"* ML Modelle mit $\Delta\bar{\theta}(z) = 0$ in allen Höhen;
 - 2) für Wolkenmodelle, wobei $\Delta\bar{\theta}(z)$ linear mit der Höhe modelliert wird, mit separaten Wolkenschichten und Zwischenschichten ohne Wolken; und
 - 3) für eine stabile GS, wobei $\Delta\bar{\theta}(z)$ entweder linear, als Polynom oder durch ein Profil mit exponentieller Form, approximiert wird. (Siehe nächste Kapitel.)

*slab = Platte; 'slab model': Modell einer gut durchmischten Oberflächen- oder Bodenschicht.

(Lokale) Schließung 1. Ordnung

- Schließungen 1. Ordnung verwenden die prognostischen Gleichungen nur für die mittleren Variablen 0-ter Ordnung wie Wind, Temperatur und Feuchte.
- Man betrachte ein idealisiertes Szenario in einer trockenen Atmosphäre (Vernachlässigung der Feuchte), horizontaler Homogenität und keinem Absinken.
- Ferner wird angenommen, dass der geostrophische Wind bekannt ist.

(Lokale) Schließung 1. Ordnung

- Die grundlegenden prognostischen Gleichungen für die Variablen 0-ter Ordnung reduzieren sich somit zu:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'}$$

- Die Unbekannten in diesem Satz von Gleichungen sind die zweiten Momente: $\overline{u'w'}$ $\overline{v'w'}$ $\overline{w'\theta'}$
- Um diesen Satz Gleichungen (Ekman Gleichungen) zu schließen, müssen die turbulenten Flüsse parametrisiert werden.

- Wenn ξ eine beliebige Variable sei, dann ist eine mögliche Schließung 1. Ordnung für den Fluss $\overline{u'_j \xi'}$ gegeben durch:

$$\overline{u'_j \xi'} = -K_\xi \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial x_j}$$

wobei der Parameter K_ξ ein Skalar ist (in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$).

- Für positive K_ξ legt der obige Ausdruck nahe, dass der Fluss $\overline{u'_j \xi'}$ abwärts zum lokalen Gradienten von $\overline{\xi}$ fließt.

- Diese Schließungsapproximation wird oft die "Gradienten-Transport Theorie" oder K-Theorie genannt.
- Obwohl es sich hierbei um eine der einfachsten Parametrisierungen handelt, verfehlt sie oft ihren Zweck, wenn z.B. großskalige Eddies in der Strömung vorkommen.
- Daher kann man diesen Ansatz als Schließungstechnik für kleine Eddies klassifizieren.

Lokale Schließung

- K (= skalare Größe) hat verschiedene Namen:
 - Eddy Viskosität,
 - Eddy Diffusivität,
 - Eddy-Transferkoeffizient,
 - turbulenter Transferkoeffizient,
 - Gradienten-Transferkoeffizient.
- Letztere Bezeichnung wird gewählt, da (wie oben gezeigt) durch K die Beziehung zwischen dem turbulenten Fluss und dem Gradienten der entsprechenden mittleren Variablen hergestellt wird.
- Manchmal werden verschiedene K -Werte für verschiedene Variable verwendet. Ein Index "M" wird z.B. für den Impuls (engl. momentum) eingesetzt und somit ergibt sich K_M als Eddy Viskosität.

Lokale Schließung

- Für Wärme und Feuchte benutzt man K_H und K_E für die entsprechenden Eddy-Diffusivitätskoeffizienten.
- In einigen Experimenten findet man, dass sich für statisch neutrale Bedingungen ergibt:

$$K_H = K_E = 1.35K_M$$

- Es ist nach wie vor nicht klar, warum K_M kleiner sein sollte als andere K Werte.
- Möglicherweise haben Effekte der Druckkorrelation die Messungen beeinflusst, worauf der Ausdruck ja basiert.

Beispiel 1

- Gegeben $K_H = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ für Turbulenz in einer stabilen Umgebung, mit einem lokalen Temperaturgradienten $\partial \bar{\theta} / \partial z = 0.01 \text{ K/m}$. Finde $\overline{w'\theta'}$.

Lösung: nehme $\overline{u'_j \xi'} = -K_{\xi} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_j}$ mit $\bar{\xi} = \bar{\theta} \quad j = 3$

$$\overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \times 0.01 \text{ K m}^{-1} = -0.05 \text{ K m s}^{-1}$$

Diskussion:

Normalerweise würde man in einem stabil geschichteten Umfeld einen negativen Wärmefluss erwarten, wenn man nur kleine Eddies annimmt. Mit anderen Worten: In einer Umgebung mit warmer Luft über kalter Luft verfrachtet Turbulenz warme Luft in kältere Gebiete, was in diesem Fall einen abwärtsgerichteten (oder negativen) Wärmefluss darstellt.

Beispiel 2

- Entwickle einen Satz von Parametrisierung, um die Ekman Gleichungen zu schließen.

Lösung:

$$\overline{u'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\overline{v'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$\overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Diskussion: Wenn diese Gleichungen in die Ekman-Gleichungen eingesetzt werden, dann erhält man drei Gleichungen mit drei Unbekannten \bar{q} , \bar{u} , und \bar{v} . Dies ist ein geschlossener Satz der analytisch gelöst werden kann, wenn die K-Werte bekannt sind.

Beispiel 3

- Gegeben $K_H = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ für Turbulenz in einem horizontal homogenen Hintergrund, bestimme $\overline{u'\theta'}$.

Lösung:

$$\overline{u'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$$

Horizontal homogen $\Rightarrow \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \overline{u'\theta'} = 0$

Diskussion: Es macht keinen Unterschied ob K_H positiv, negativ oder außergewöhnlich groß ist – die K-Theorie führt in einer gleichförmigen Umgebung (Hintergrund) immer dazu, dass der Fluss gleich Null ist.

Analogie mit der Viskosität

- Für ein Newton'sches Fluid kann die molekulare Spannung τ_{mol} approximiert werden durch (siehe Kapitel 2):

$$\tau_{\text{mol}} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

- Durch Vergleich kann man erwarten, dass die turbulente Reynolds Spannung durch Terme der mittleren Scherung ausgedrückt werden kann, wobei ν ersetzt wird durch die Eddy Viskosität K_M :

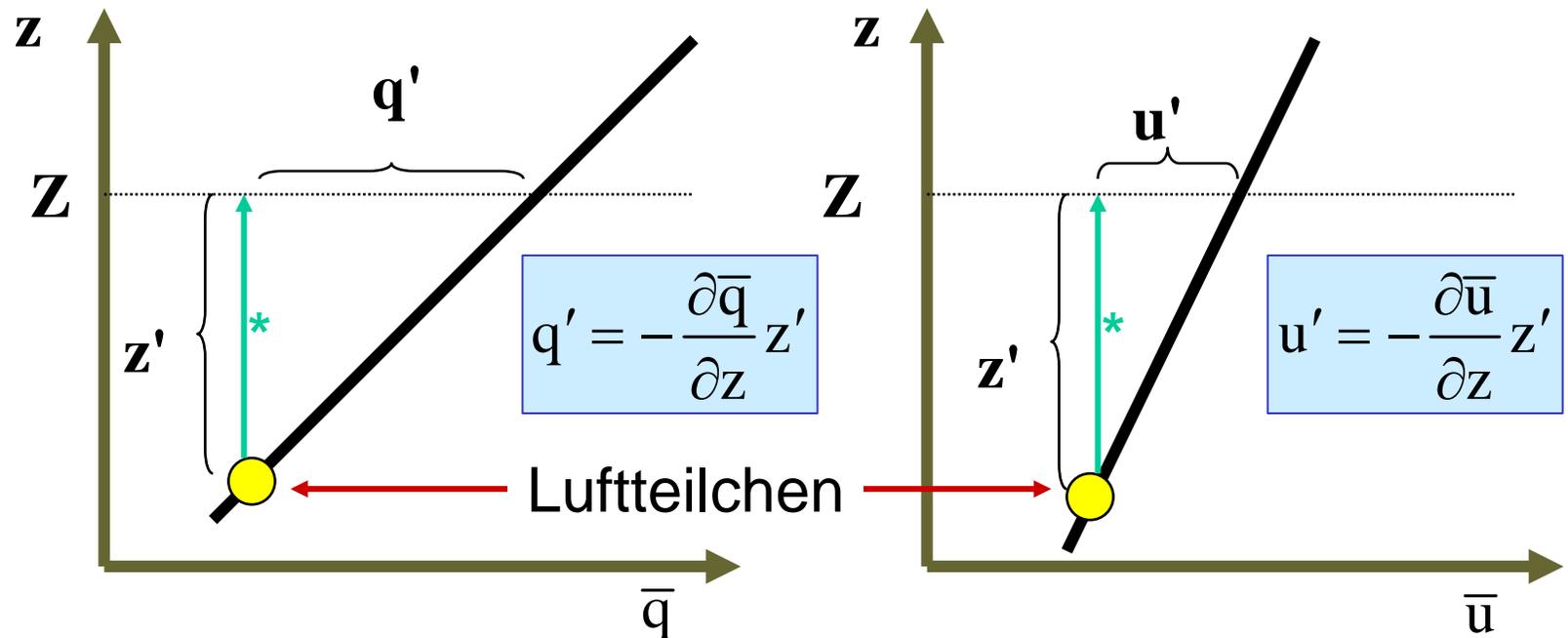
$$\tau_{\text{Reynolds}} = \rho K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

- Division durch ρ ergibt die gebräuchliche kinematische Form.
- ρK_M wird manchmal auch Austauschkoefizient genannt.

- Da Turbulenz bei der Erzeugung von Mischung effektiver ist als Viskosität, würde man erwarten, dass $K_M > \nu$.
- Werte von K_M , die man in der Literatur findet, variieren von $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ bis $2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, mit typischen Werten von ≈ 1 to $10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- Werte von ν sind viel kleiner: $\approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- Die Größe ist nicht der einzige Unterschied zwischen molekularer und Eddy Viskosität: Ein weiterer wichtiger Unterschied ist, dass ν eine Funktion des Fluids ist, K_M aber eine Funktion des Flusses.
- Während ν einzig durch die chemische Zusammensetzung des Fluids und seinen Zustand (Temperatur, Druck, etc.) bestimmt ist, variiert K_M in dem Maß, wie die Turbulenz variiert.
- Daher muss man K_M als Funktion anderer Variable wie z.B. z/L (Richardsonzahl) oder die Stabilität $\partial\theta_v / \partial z$, parametrisieren.

Theorie der Mischungslänge (Prandtl, 1925)

- Angenommen, es existiere Turbulenz in einer statisch neutralen Umgebung mit einem linearen mittleren Feuchtegradienten in vertikaler Richtung.



*: Bewegung des Luftpartikels

- Wenn ein Partikel über eine Distanz z' nach oben wandert, muss es eine Geschwindigkeit w' haben.
- Wenn die Natur der Turbulenz so ist, dass w' proportional zu u' ist, dann erwartet man $w' = -cu'$ für die lineare Windscherung, wie in der vorherigen Abbildung angedeutet (d.h. für $\partial u/\partial z > 0$) und $w' = cu'$ für $\partial u/\partial z < 0$, wobei c eine Proportionalitätskonstante ist.

$$u' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} z' \quad \longrightarrow \quad w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z' \quad (6.4.4c)$$

Daraus ergibt sich, dass die Größe der Scherung wichtig ist!

➤ Kapitel 2: Der kinematische Eddy Feuchtefluss ist $R = \overline{w'q'}$

➤ Wir wissen, dass $q' = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} z'$ und $w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z'$.

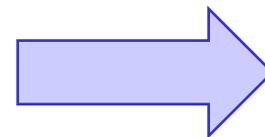
➤ Multiplikation der beiden Gleichungen und Mittelung über das Spektrum der verschiedenen Eddy-Größen z' , um den mittleren Fluss R zu erhalten:

$$R = -c \overline{(z')^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

$\overline{(z')^2}$ ist die Varianz der Abstandverschiebung des Teilchens.

$\sqrt{\overline{(z')^2}}$ ist ein Maß der mittleren Strecke, die sich ein Teilchen während eines Mischungsprozesses, der den Fluss R erzeugt, bewegt.

➤ Auf diese Weise kann man eine Mischungslänge l definieren durch $l^2 = c \overline{(z')^2}$



$$R = -l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

- Hierbei handelt es sich um eine direkte Analogie zur K-Theorie, wenn

$$\underline{K_E = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|} \quad \text{mit} \quad R = -K_E \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

Angenommen, dass $|K_E|$ anwächst, so wie die Scherung zunimmt (d.h. als ein Maß für die Turbulenzintensität) und auch wie die Mischungslänge zunimmt (d.h. als ein Maß der Turbulenz, Mischung zu erzeugen).

- In der Bodenschicht ist die Größe der turbulenten Eddies durch die Erdoberfläche begrenzt. Deshalb wird manchmal angenommen, dass $l^2 = k^2 z^2$, $k =$ von Kármán Konstante \Rightarrow die Eddy Viskosität in der Bodenschicht:

$$K_E = k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$$

- Delage schlug 1974 eine Parametrisierung für die Mischungslänge in stabilen Grenzschichten vor, die seitdem als Startpunkt für andere Parametrisierungen verwendet wird:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{kz} + \frac{1}{0.0004U_g / f} + \frac{\beta}{kL_L}$$

wobei L_L eine lokale Obukhov Länge darstellt, die auf lokalen Werten der Scherspannung und des Wärmeflusses oberhalb der Erdoberfläche basiert; U_g ist die geostrophische Windgeschwindigkeit und β ist eine empirische Konstante.

Einschränkungen der Theorie der Mischungslänge

- Die Beziehung $w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z'$ ist nur dann gültig, wenn Turbulenz mechanisch erzeugt ist.
- Deshalb ist die Herleitung einer Mischungslänge nur für statisch neutrale Bedingungen gültig, obwohl die K-Theorie auf statisch stabile Bedingungen angewendet wird.
- Ferner werden lineare Gradienten für Wind und Feuchte angenommen, was aus $q' = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} z'$ abgeleitet wird.
- In der realen Atmosphäre können Gradienten nur über kleine Entfernungen linear approximiert werden (d.h. der Term 1. Ordnung in einer Taylorreihenentwicklung) \Rightarrow Die Theorie der Mischungslänge gilt nur für kleine Eddies.

Annahmen bei der Parametrisierung von K

- Am besten wird die Eddy Viskosität als nicht konstant angenommen, sondern als Funktion des Flusses (der Bewegung) parametrisiert.
- Eine Parametrisierung für K sollte folgende Bedingungen erfüllen:
 - $K = 0$, wo es keine Turbulenz gibt;
 - $K = 0$ am Erdboden ($z = 0$);
 - K wächst in gleichem Maße, wie die TKE;
 - K variiert mit der statischen Stabilität (tatsächlich sollte man erwarten, dass in jeder Koordinatenrichtung bei anisotroper Turbulenz ein anderer Wert für K verwendet wird);
 - K ist positiv (wenn man die Analogie mit der Viskosität verwendet).
- Die letzte Randbedingung wird zuweilen ignoriert.

Bemerkungen zur Eddy Viskosität

- Das gängige Konzept der Eddy Viskosität oder der Theorie für kleine Eddies ist, dass ein turbulenter Fluss hin zu kleineren Werten gerichtet ist.
- Solch ein "Gradienten-abwärts" (engl. down-gradient) gerichteter Transport bedeutet, dass Wärme von warm nach kalt geht, Feuchte von feucht zu trocken, u.s.w.
- Dieser Transport ist mit positiven Werten für K verbunden und ist konsistent mit der Analogie zur molekularen Viskosität.
- In der Atmosphäre gibt es aber auch Situationen, wo der Transport in entgegengesetzter Richtung geht (engl. counter-gradient).
- Dies kann physikalisch so erklärt werden, dass große (überlagerte) Eddies den Transport bestimmen, egal wie der lokale Gradient des Hintergrundes ist.

- Um die K-Theorie (die für kleine Eddies gilt) auch für größere Eddies in einer konvektiven GS anwendbar zu machen, muss man von negativen K-Werten Gebrauch machen.
- Da dies dazu führt, dass Wärme auch von kalt nach warm fließen kann, ist dies nicht in Übereinstimmung mit unserem allgemeinen Verständnis des Diffusionskonzeptes.
- Aus diesem Grund ist die K-Theorie nicht in konvektiven ML zu verwenden.
- Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten K zu parametrisieren.
- Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht von verschiedenen Parametrisierungen für K.
- Dabei werden auch Variationen von K in der Horizontalen vorgeschlagen, um z.B. das Phänomen der mesoskaligen, zellenförmigen Konvektion zu erklären.

Beispiele von Parametrisierungen für K in der GS

Neutrale Bodenschicht:

$$K = \text{constant}$$

not the best parameterization

$$K = u_*^2 T_0$$

where u_* is the friction velocity

$$K = U^2 T_0$$

where T_0 is a timescale

$$K = k z u_*$$

where k is von Karman's constant

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z)^2 + (\partial \bar{v} / \partial z)^2]^{1/2}$$

from mixing-length theory

$$K = l^2 (\partial \bar{u} / \partial z)^2$$

where $l = k(z+z_0) / \{1 + [k(z+z_0)/\Lambda]\}$, Λ = length scale

Diabatische Bodenschicht: $K_{\text{statically unstable}} > K_{\text{neutral}} > K_{\text{statically stable}}$

$$K = k z u_* / \phi_M(z/L)$$

where ϕ_M a dimensionless shear (see appendix A),

and L is the Obukhov length (appendix A)

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z) + \{(g / \bar{\theta}_v) \cdot |\partial \bar{\theta}_v / \partial z|\}]^{1/2} \text{ for statically unstable conditions}$$

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z) - (L_* / z)^{1/6} \{(15g / \bar{\theta}_v) \cdot |\partial \bar{\theta}_v / \partial z|\}]^{1/2} \text{ for statically stable conditions, where}$$

$$L_* = -\theta u_*^2 / (15 k g \theta_*)$$

Beispiele von Parametrisierungen für K in der GS

Neutral oder stabile GS:

$K = \text{constant}$

see Ekman Spiral derivation in next subsection

$$K = K(h) + [(h-z)/(h-z_{SL})]^2 \{K(z_{SL}) - K(h) + (z-z_{SL})[\partial K/\partial z|_{z_{SL}} + 2(K(z_{SL})-K(h))/(h-z_{SL})]\}$$

this is known as the O'Brien cubic polynomial approximation (O'Brien, 1970), see Fig 6-2, where z_{SL} represents the surface layer depth.

Instabile (konvektive) GS:

$$K = 1.1 [(R_c - Ri) / Ri]^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$$

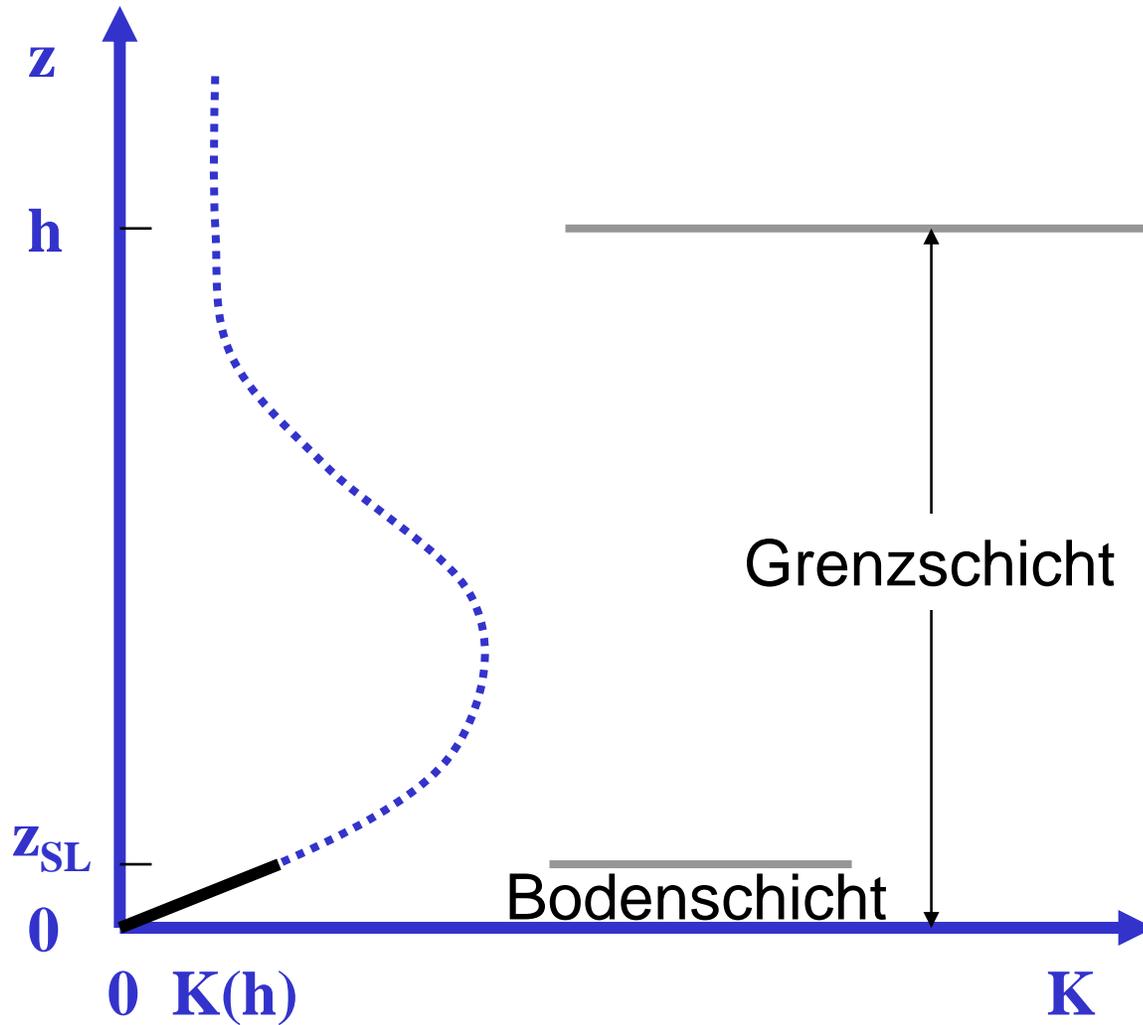
for $\partial \bar{\theta}_v / \partial z > 0$ where $l = kz$ for $z < 200$ m and

$$K = (1 - 18 Ri)^{-1/2} l^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$$

for $\partial \bar{\theta}_v / \partial z < 0$ $l = 70$ m for $z > 200$ m.

Numerische Approximation für einen unelastischen 3D Fluss:

$$K = (0.25 \Delta)^2 \cdot |0.5 \sum_j \sum_j [\partial \bar{u}_j / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_j - (2/3) \delta_{ij} \sum_k (\partial \bar{u}_k / \partial x_k)]^2|^{1/2} \quad \text{where } \Delta = \text{grid size}$$



Typische Variation der Eddy Viskosität K mit der Höhe in der GS.

Die Ekmanspirale

- Selbst mit einem Schließungsansatz 1. Ordnung ist eine analytische Lösung der Ekmangleichungen zu schwierig.
- Eine Ausnahme ist der Fall einer stationären ($\partial(-)/\partial t = 0$), horizontal homogenen ($\partial(-)/\partial x = 0, \partial(-)/\partial y = 0$), statisch neutralen ($\partial\bar{\theta}_v/\partial z = 0$), barotropen Atmosphäre (\bar{u}_g, \bar{v}_g konstant mit der Höhe) ohne Absinken ($\bar{w} = 0$).

$$-f(\bar{v} - \bar{v}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$f(\bar{u} - \bar{u}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

vereinfachte
Ekman

- Ekman fand 1905 eine analytische Lösung dieser Gleichungen für den Ozean; kurz danach wurde sie für die Atmosphäre modifiziert.

- Ausrichtung der x-Achse mit dem geostrophischen Wind (d.h. wähle $v_g = 0$).
- Nutzung einer lokalen Schließung 1. Ordnung mit konstanten K_M . Da

$$\overline{u'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad , \quad \overline{v'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad \text{folgt:}$$

$$f\bar{v} = -K_M \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

$$f(\bar{u} - \bar{u}_g) = K_M \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}$$

- Die Randbedingungen sind:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ in } z = 0 \text{ und } (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (\bar{u}_g, 0) \text{ für } z \rightarrow \infty$$

- Lösung:

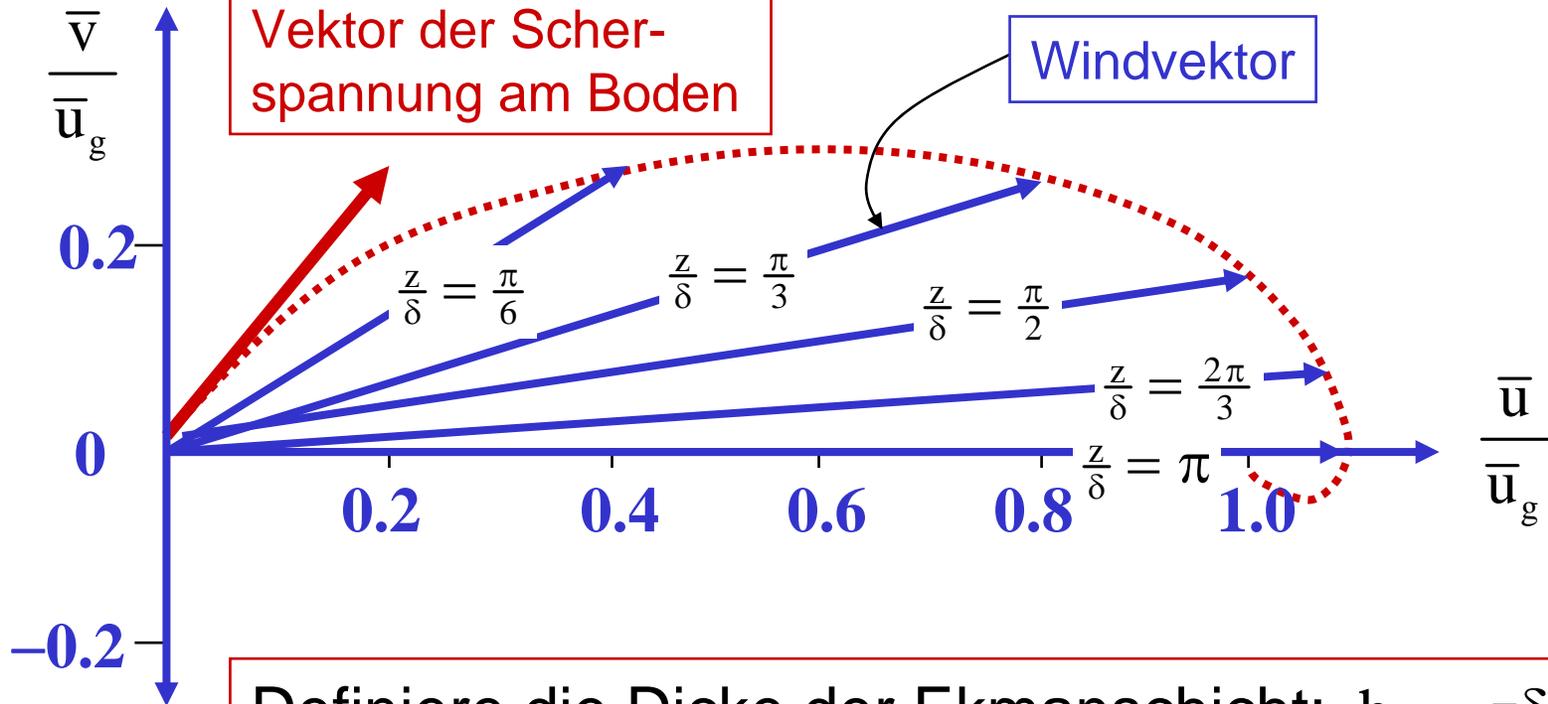


Lösung für die Ekman'schicht

$$\bar{u} = \bar{u}_g [1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)] \quad \bar{v} = \bar{u}_g [e^{-z/\delta} \sin(z/\delta)]$$

$$1/\delta = (f / 2K_M)^{1/2} = \gamma_E$$

Atmosphäre



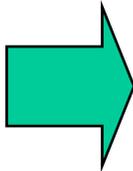
Definiere die Dicke der Ekman'schicht: $h_E = \pi\delta$.

Scherspannung am Boden

- Verwende u_*^2 als Maß für die Scherspannung am Boden

$$u_*^2 = \sqrt{\left(\overline{u'w'}\right)_s^2 + \left(\overline{v'w'}\right)_s^2} = K_M \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_s^2}$$

- Nehme $\bar{u} = \bar{u}_g [1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)]$ $\bar{v} = \bar{u}_g [e^{-z/\delta} \sin(z/\delta)]$

- Setze $z = 0$  $u_*^2 = \bar{u}_g \sqrt{K_M f}$

Dicke der Ekman-schicht

- Bei $z = \pi\delta = \pi/\gamma_E$ wird die Windgeschwindigkeit supergeostrophisch; es ist ebenso die niedrigste Höhe, wo der Wind parallel zum geostrophischen Wind ist.
- Manchmal wird diese Höhe auch als Abschätzung für die Dicke der neutralen GS verwendet.
- Daher ist die Dicke der Ekman-schicht definiert durch $h_E = \pi\delta = \pi/\gamma_E$.
- Angenommen, dass $K_M = (ck) u_* h_E$, wobei c eine Proportionalitätskonstante ≈ 0.1 und k die von Kármán Konstante ist, dann folgt

$$h_E = 2ck\pi^2 u_* / f \quad [= 2 \pi^2 (u_* / f)]$$

Ekman Pumpe (engl. Ekman pumping)

- Die wichtigste Schlussfolgerung aus der Lösung der Ekmangleichungen ist, dass Reibung die Windgeschwindigkeit in der GS auf Werte unterhalb der geostrophischen Geschwindigkeit reduziert und somit der Wind hier die Isobaren von hohem zu niedrigen Drucken kreuzt.
- In einer synoptischen Situation, in der die Isobaren gekrümmt sind, so wie in einem Tief- oder Hochdruckgebiet, begründet dieser Fluss nahe der Oberfläche quer zu den Isobaren entweder eine Konvergenz oder eine Divergenz.
- Aus Gründen der Masseerhaltung muss daher in einem Tiefdruckgebiet Luft aufsteigen und in einem Hochdruckgebiet absinken.
- Dieser Prozess der Berücksichtigung von vertikaler Bewegung, verursacht durch Reibung in der GS, wird Ekman Pumpe genannt.

Die ozeanische Ekman-schicht

- Ozeanische Ströme werden durch Scherspannungen des Windes an der Oberfläche angetrieben; unter Vernachlässigung des Druckgradienten im Ozean ergibt sich

$$f\bar{v} = -K_M \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad f\bar{u} = K_M \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}$$

- Wähle das Koordinatensystem mit der x-Achse in Richtung der Scherspannung am Boden sowie die z-Achse positiv nach oben.
- Die Randbedingungen sind:

$$K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad \text{in } z = 0 \quad \text{und } (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (0, 0) \quad \text{für } z \rightarrow -\infty$$

K_M und u_* beziehen sich auf entsprechende Ozeanwerte

$$\rho u_*^2 \Big|_{\text{water}} = \text{surface stress} = \rho u_*^2 \Big|_{\text{air}}$$

➤ Lösung:

$$\bar{u} = \bar{u}_o e^{z/\delta_E} \cos(z/\delta_E - \pi/4)$$

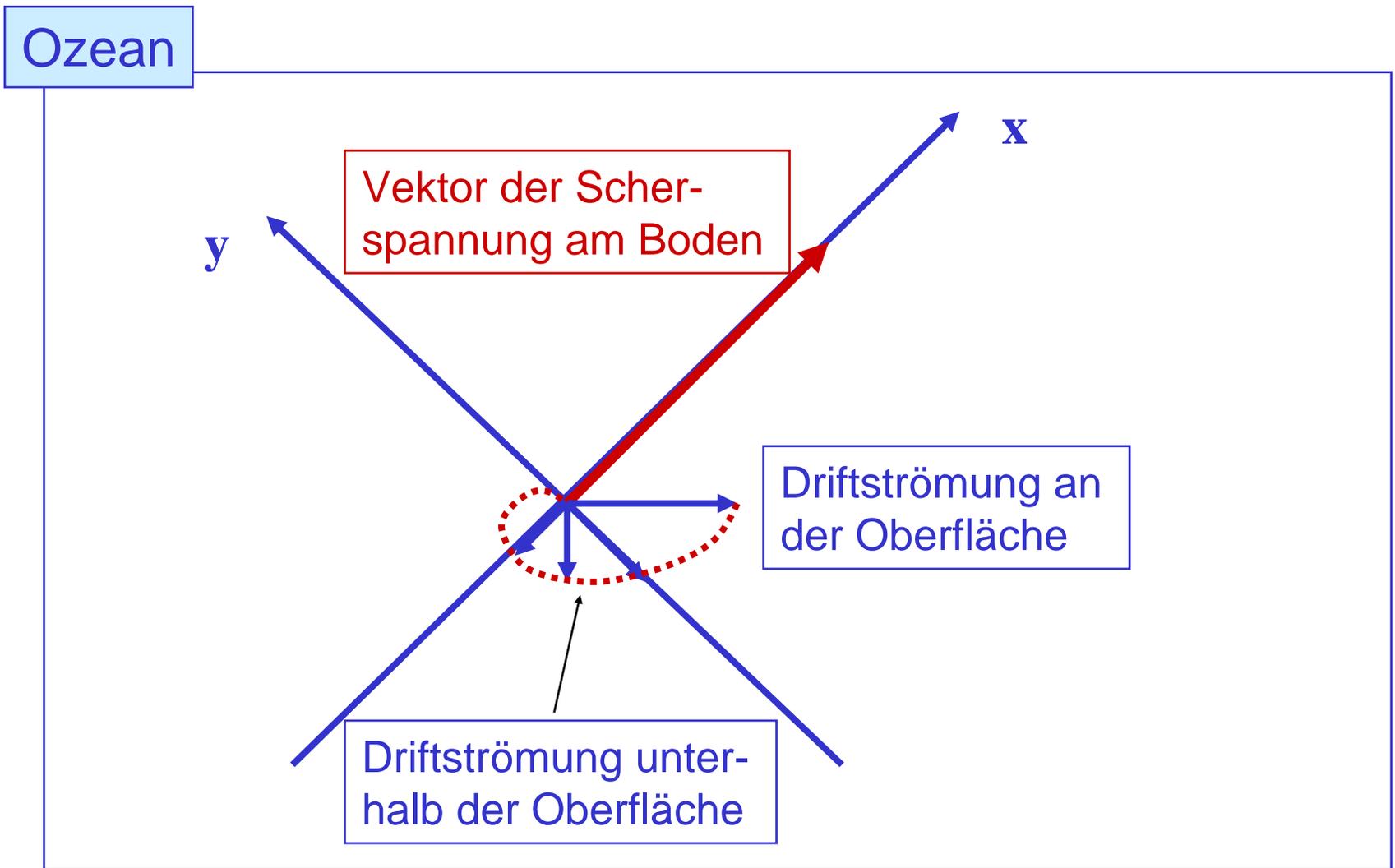
$$\bar{v} = \bar{u}_o e^{z/\delta_E} \sin(z/\delta_E - \pi/4)$$

$$\bar{u}_o = \frac{u_*^2}{\sqrt{K_M f}}$$

➤ K_M und δ_E entsprechen Werten für den Ozean.



Abbildung



Die Oberflächenströmung ist, bezogen auf die Scherspannung am Boden, um 45° nach rechts gedreht in Richtung von u_g . Die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist $\approx |u_g|/30$.

Diskussion

- Obwohl eine analytische Lösung der Ekman Gleichungen existiert, gibt es entsprechende Situationen (mit den so gewählten Randbedingungen) in der Atmosphäre äußerst selten.
- Bestenfalls ergibt sie eine quantitative Abschätzung für eine statisch neutrale GS, d.h. mechanische Erzeugung von Turbulenz durch starke Winde ohne Auftriebseffekte.
- In konvektiven ML kann man die Form des Ekmanprofils nicht beobachten, obwohl es qualitativ mit beobachteten Winden übereinstimmt, die subgeostrophisch sind und die Isobaren kreuzen.
- Beobachtete stabile GS können in geringer Höhe supergeostrophische Windgeschwindigkeiten aufweisen und somit die Lösung der Ekman Gleichungen auch qualitativ falsch werden lassen.

Lokaler Schließungsansatz 1.5-ter Ordnung

- Schließungen 1.5-ter Ordnung verwenden die Bestimmungsgleichungen für statistische Größen 0-ter Ordnung wie mittlerer Wind, Temperatur, Feuchte und sie verwenden ferner die Gleichungen für die entsprechenden Varianzen dieser Größen.
- Die TKE Gleichung wird für gewöhnlich anstelle der Gleichungen für die Geschwindigkeitsvarianzen benutzt.
- Das nun folgende Beispiel betrachtet eine horizontal homogene, trockene Atmosphäre ohne Absinken (wie auch schon zuvor).
- Die Bestimmungsgleichungen sind:

Impuls

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f(\bar{v} - \bar{v}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + f(\bar{u} - \bar{u}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

Wärme

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'}$$

TKE

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w' \left(\frac{p'}{\bar{\rho}} + e \right)} \right] - \varepsilon$$

Temperaturvarianz

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} = -2\overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w'\theta'^2}}{\partial z} - 2\varepsilon_\theta - \varepsilon_R$$

Unbekannte

$$\underline{\overline{u'w'}, \overline{v'w'}, \overline{w'\theta'}, \overline{w'p'}/\bar{\rho}}, \quad \underline{\overline{w'e}, \overline{w'\theta'^2}}, \quad \underline{\varepsilon, \varepsilon_\theta, \varepsilon_R}$$

2. Momente (Flüsse)

3. Momente

Dissipations-
terme

Diskussion

- Auf den ersten Blick scheint die Hinzunahme von den Varianzgleichungen eher zu schaden als zu nutzen.
- Mit dem Schließungsansatz 1. Ordnung hatte man 3 unbekannte Flüsse: $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$, $\overline{w'\theta'}$
- Nun hat man zusätzlich 6 Unbekannte! Warum?
- Der Grund ist, dass die Kenntnis der Varianzen von TKE und Temperatur ein Maß für die Intensität und Effektivität der Turbulenz geben.
- Diese Information kann man nutzen, um eine verbesserte Parametrisierung der Eddy Diffusivität $K_M(\bar{e}, \theta'^2)$ zu erhalten.
- Es folgt ein möglicher Satz von Parametrisierungen für die Unbekannten:

$$\begin{aligned}
\overline{u'w'} &= -K_M(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\
\overline{v'w'} &= -K_M(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
\overline{w'\theta'} &= -K_H(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \gamma_c(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \\
\overline{w' \left(\frac{p'}{\bar{\rho}} + e \right)} &= \frac{5}{3} \Lambda_4 e^{-1/2} \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} \\
\overline{w'\theta'^2} &= \Lambda_3 e^{-1/2} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial z} \\
\varepsilon_R &= 0 \quad \varepsilon = \frac{\bar{e}^{3/2}}{\Lambda_1} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\bar{e}^{1/2} \overline{\theta'^2}}{\Lambda_2}
\end{aligned}$$

Λ_n ist ein empirischer Parameter für die Längenskala. Diese werden häufig in einer Weise gewählt, dass Modellergebnisse am besten mit Beobachtungen übereinstimmen.

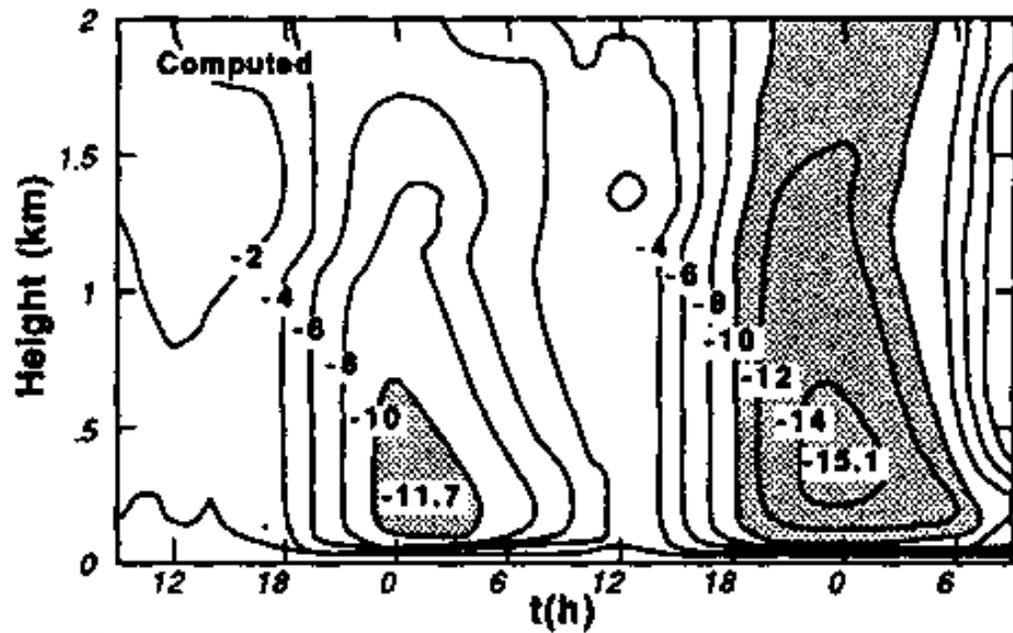
- Ein wesentliches Problem mit dem diskutierten Schließungsansatz ist, dass die Wahl der Längenskala recht willkürlich ist.
- Die Ausdrücke für K sind ebenfalls sehr komplex, sie können jedoch approximiert werden durch:

$$K = \Lambda \bar{e}^{1/2}$$

Λ entspricht einer der empirischen Längenskalen.

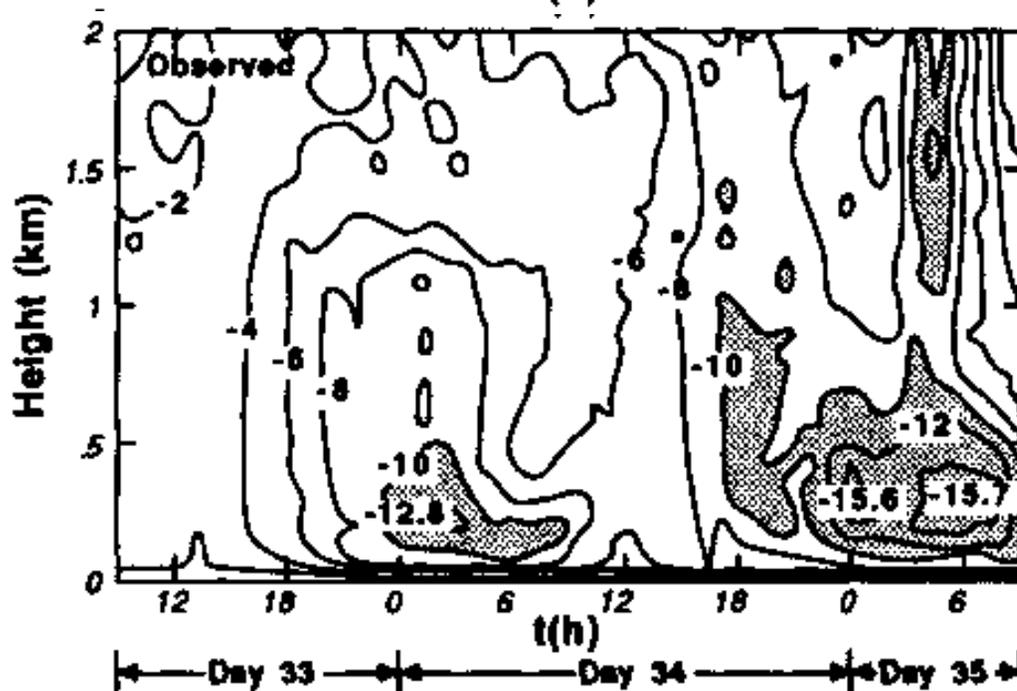
Eine numerische Berechnung

- Der obige Satz von Gleichungen ist viel zu komplex, um ihn analytisch zu lösen.
- Deswegen werden die Gleichungen numerisch, unter Zuhilfenahme der Methode der finiten Differenzen, gelöst.
- In den nachfolgenden Abbildungen wird die numerische Simulation der GS für eine 2-tägige Episode gezeigt (das Wangara Feldexperiment) unter Verwendung einer Schließung 1.5-ter Ordnung (nach Yamada-Mellor, 1975).

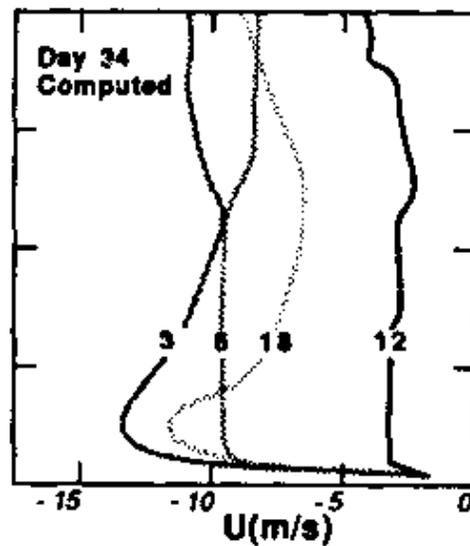
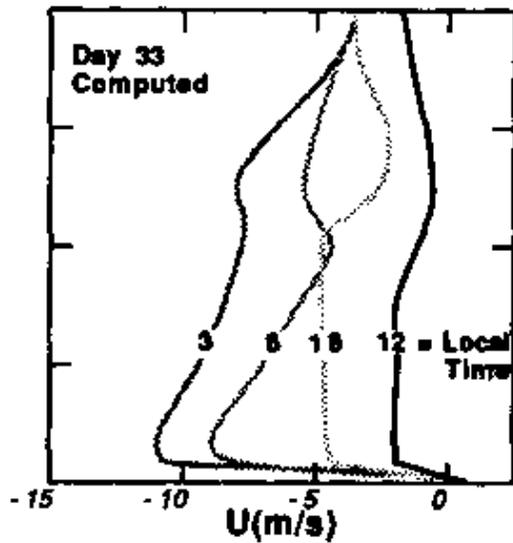


⇐ numerisch simuliert
unter Verwendung einer
Schließung 1.5-ter Ord-
nung

Windgeschwindigkeit
(nach Osten)

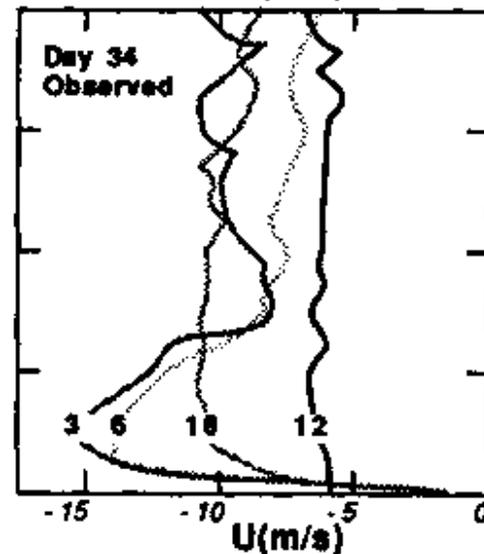
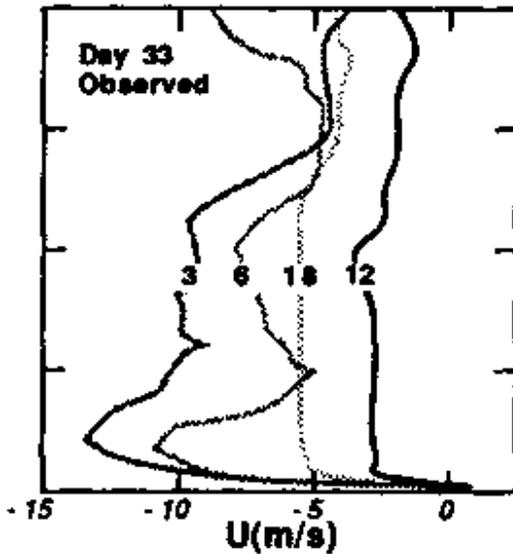


⇐ Beobachtungen
Wangara, Tage 33-35

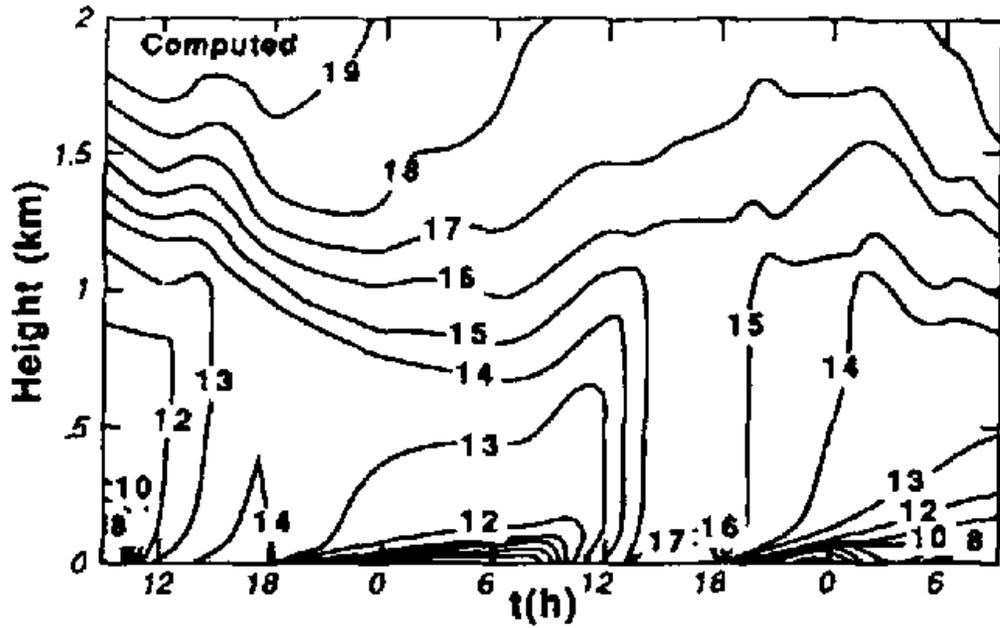


⇐ numerisch simuliert
unter Verwendung einer
Schließung 1.5-ter Ord-
nung

Windgeschwindigkeits-
profile (nach Osten)

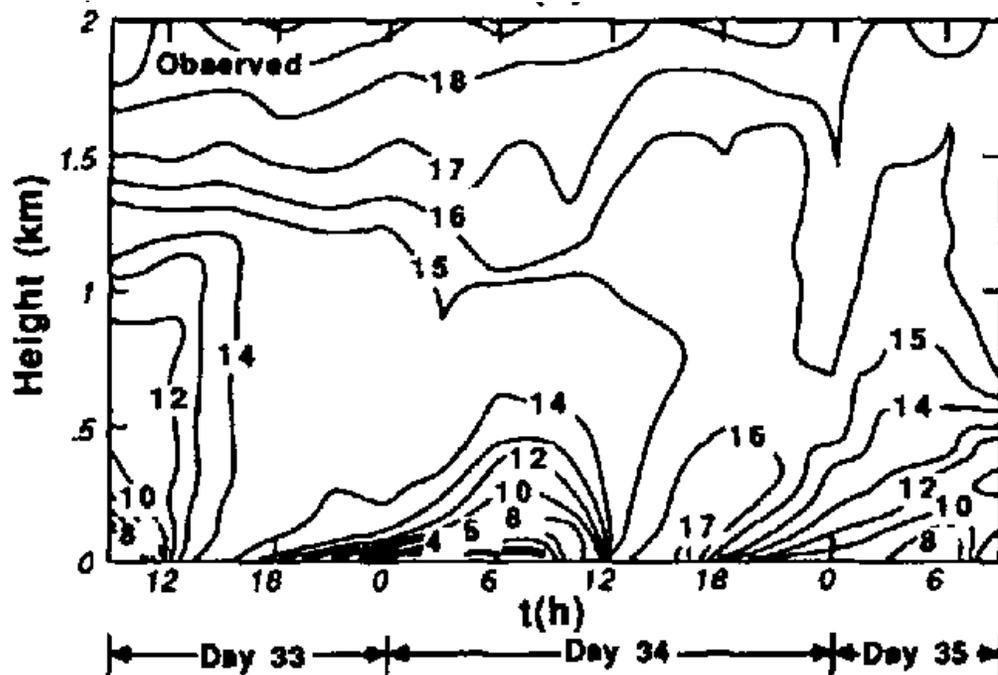


⇐ Beobachtungen
Wangara, Tage 33-35

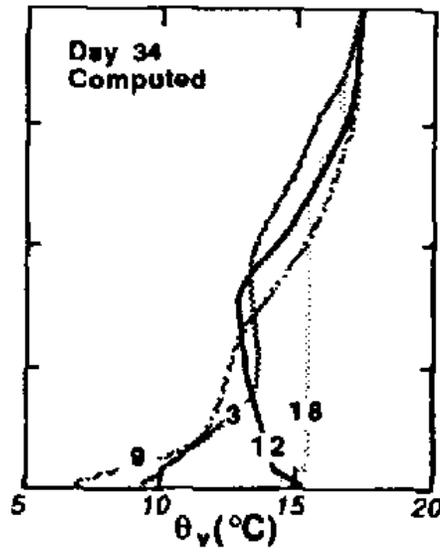
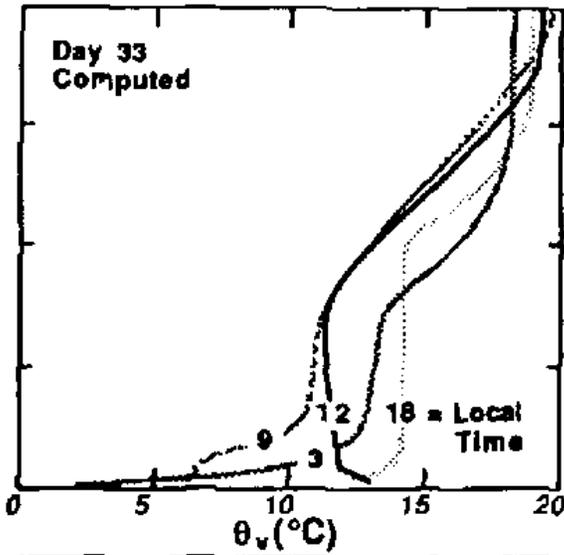


⇐ numerisch simuliert
unter Verwendung einer
Schließung 1.5-ter Ord-
nung

Mittlere virtuelle
potentielle Temperatur

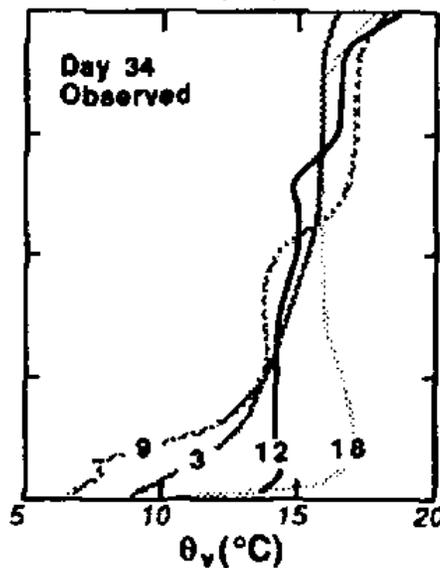
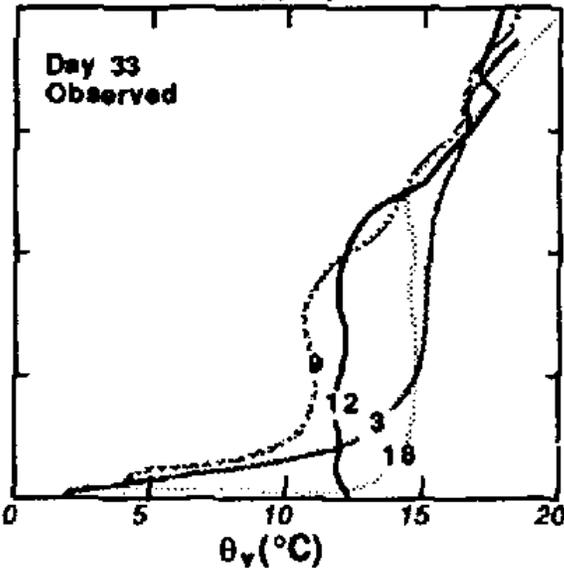


⇐ Beobachtungen
Wangara, Tage 33-35

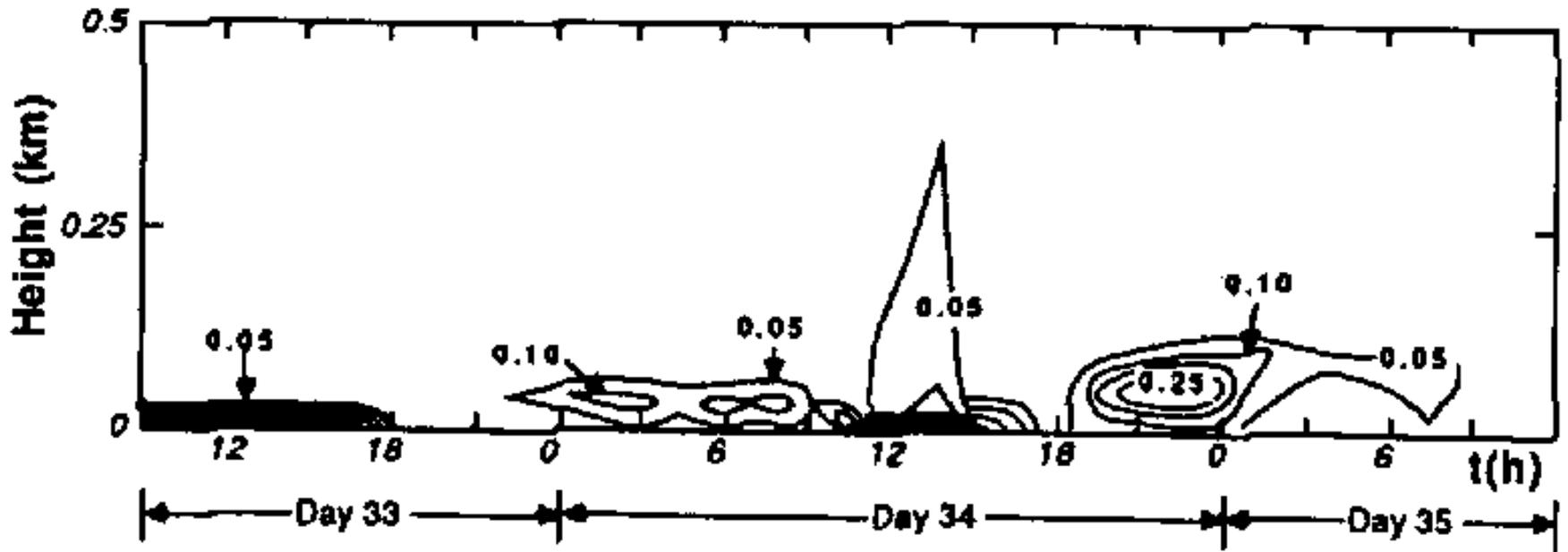


← numerisch simuliert
unter Verwendung einer
Schließung 1.5-ter Ord-
nung

Profile der virtuellen
potentiellen Temperatur



← Beobachtungen
Wangara, Tage 33-35



Änderung der Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur ($\theta_V'^2$) simuliert mit einem Schließungsansatz 1.5-ter Ordnung (Einheiten in K^2) für das Wangara Feldexperiment.

Diskussion

- Durch diese numerischen Studien kann man einiges über die Vorteile von Schließungen höherer Ordnung lernen:
 - 1) Die Schemata höherer Ordnung liefern gut durchmischte Schichten am Tage und ein Anwachsen ihrer Mächtigkeit mit der Zeit.
 - 2) In der Nacht gibt es Anzeichen für die Bildung eines "Jets" nebst der Entwicklung einer statisch stabilen Schicht nahe der Erdoberfläche.
 - 3) Die Turbulenzintensität wächst am Tage deutlich an, aber in der Nacht werden in der GS (engl. nocturnal boundary layer) deutlich kleinere Werte gefunden.

Diskussion

- Auf der anderen Seite geben Schließungen 1. Ordnung keine Information über die Turbulenzintensität oder die Temperaturvarianz.
- Des Weiteren haben diese Schließungsansätze Schwierigkeiten in gut durchmischten Schichten, in denen mittlere Variable keine Gradienten aufweisen.
- Der Vorteil der Schließungsansätze höherer Ordnung geht immer zu Lasten von höheren Kosten (z.B. mehr Computerzeit).

Lokale Schließungsansätze 2. Ordnung

- Die Entwicklung von Schließungen höherer Ordnung (d.h. höher als die 1. Ordnung) war eng verbunden mit der Entwicklung von Computern.
- Obwohl bereits in den frühen 40-er Jahren des letzten Jahrhunderts die Verwendung von Gleichungen höherer Momente zur Bestimmung von Turbulenz vorgeschlagen wurde, war es die große Anzahl von unbekanntem Variablen, die sich als Stolperstein für die Lösung der Gleichungen erwiesen.
- Etwa um 1950 wurden erste Parametrisierungen für unbekannte Größen vorgeschlagen (Rotta und Chou).
- Ende der 60-er Jahre war die verfügbare Computerleistung bereits so groß, dass Schließungen 2. Ordnung, z.B. zur Bestimmung von CAT, versucht wurden.

Lokale Schließungsansätze 2. Ordnung

- Mitte der 70-er Jahre wurden bereits eine Reihe von solchen Modellen (z.B. Dispersionsmodelle zur Berechnung der Schadstoffausbreitung) verwendet.
- In den späten 70-er Jahren und vor allem in den 80-er Jahren gab es eine Vielzahl von Publikationen, die sich bereits mit Schließungsansätzen 3. Ordnung befassten.

- Der Satz von Turbulenzgleichungen 2. Ordnung beinhaltet nicht nur die der 1.5-ten Ordnung, sondern ebenso die Terme der 2. Momente.
- Es werden wieder die gleichen Annahmen wie vorher gemacht: trockene und horizontal homogene Atmosphäre, ohne großräumiges Absinken.
- Die zusätzlichen Bestimmungsgleichungen sind die für $\overline{u'_i u'_j}$ und $\overline{u'_i \theta'}$.
- Daraus ergibt sich folgender Satz von gekoppelten Gleichungen:



$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} = -f_c \epsilon_{ij3} (\bar{U}_{gj} - \bar{U}_j) - \frac{\partial (\overline{u_i'w'})}{\partial z} \quad (\text{for } i \neq 3) \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial (\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \left(\frac{g}{\bar{\theta}}\right) \overline{w'\theta'} - \frac{\partial [\overline{w'((p'/\bar{\rho}) + e)}]}{\partial z} - e$$

$$\frac{\partial (\overline{\theta'^2})}{\partial t} = -2 \overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{w'\theta'^2})}{\partial z} - 2\epsilon_\theta - \epsilon_R$$

$$\bullet \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial t} = -\overline{u_i'w'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \overline{u_j'w'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j' w'})}{\partial z} + \left(\frac{g}{\bar{\theta}}\right) [\delta_{i3} \overline{u_j'\theta'} + \delta_{j3} \overline{u_i'\theta'}] \\ + \left(\frac{p'}{\bar{\rho}}\right) \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right] - 2\epsilon_{u_i u_j}$$

$$\bullet \frac{\partial (\overline{u_i'\theta'})}{\partial t} = -\overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \overline{u_i'w'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{u_i'w'\theta'})}{\partial z} + \delta_{i3} g \frac{\overline{\theta'^2}}{\bar{\theta}} + \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \left[p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right] - \epsilon_{u\theta}$$

Die Unbekannten in diesem Satz von Gleichungen schließen die Druckkorrelationsterme mit ein:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}}, \quad \overline{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}, \quad \overline{\frac{w' p'}{\rho}}$$

Dritte Momente:

$$\overline{w' e}, \quad \overline{w' \theta'^2}, \quad \overline{u'_j w' \theta'}, \quad \overline{u'_i u'_j w'}$$

und Dissipationsterme:

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_R, \quad \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_{u\theta}, \quad \varepsilon_{u_i u_j}$$

Table 6-5. Sample second-order closure parameterizations suggested by (A) Donaldson, and (B) Deardorff. (Reference: Workshop on Micrometeorology, 1973). The Λ_i are length scales, which are either held constant or based on mixing-length arguments.

1

$$\overline{u_i' u_j' u_k'} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_k' u_j'}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{\Lambda_2}{\bar{e}^{-1/2}} \right) \left[\overline{u_k' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} + \overline{u_j' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_m} + \overline{u_i' u_m'} \frac{\partial \overline{u_k' u_j'}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

2

$$\overline{u_i' u_j' \theta'} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[\frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{\Lambda_2}{\bar{e}^{-1/2}} \right) \left[\overline{\theta' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} + \overline{u_j' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_m} + \overline{u_i' u_m'} \frac{\partial \overline{\theta' u_j'}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

3

$$\overline{u_i' \theta'^2} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{\Lambda_2}{\bar{\theta}^{-1/2}} \right) \left[2 \overline{\theta' u'_m} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_m} + \overline{u'_i u'_m} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

4

$$\left(\frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}} \right) \left[\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right] = - \left(\frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \left[\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\theta} \right] \quad (\text{Rotta, 1951}) \quad (\text{A})$$

$$= - \left(\frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \left[\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\theta} \right] + \frac{2}{5} \bar{\theta} \left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{B})$$

5

$$\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \left[\overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} \right] = - \left(\frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \overline{u'_i \theta'} \quad (\text{A})$$

$$= - \left(\frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \overline{u'_i \theta'} - \frac{1}{3} \delta_{i3} \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}} \overline{\theta'^2} \quad (\text{B})$$

6

$$\frac{1}{\rho} (\overline{p' u_i'}) = - \left(\frac{-1/2}{\Lambda_3} \right) \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \quad (\text{A,B})$$

7

$$\epsilon = \frac{-3/2}{\Lambda_4} \quad (\text{A,B})$$

8

$$\epsilon_\theta = \frac{-1/2 \overline{\theta'^2}}{\Lambda_4} \quad (\text{A,B})$$

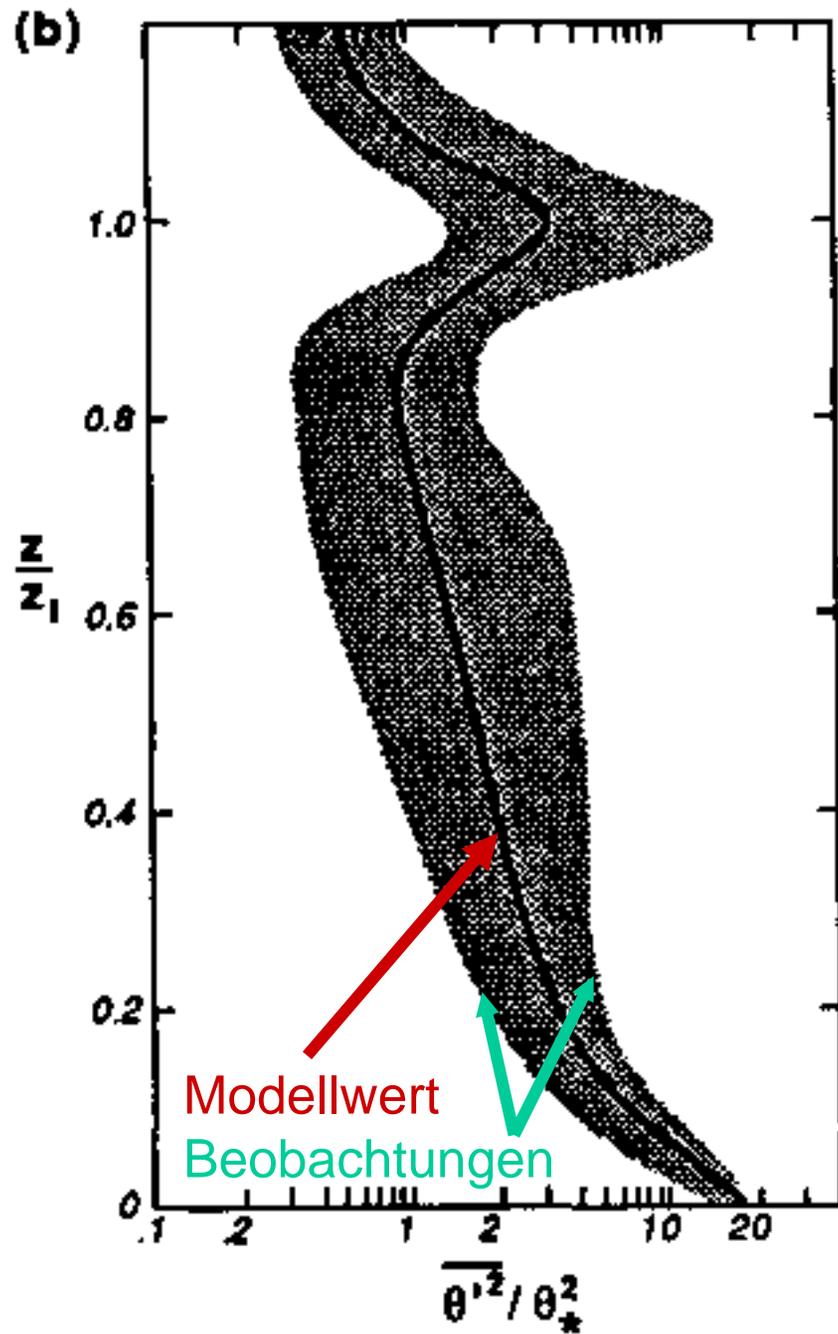
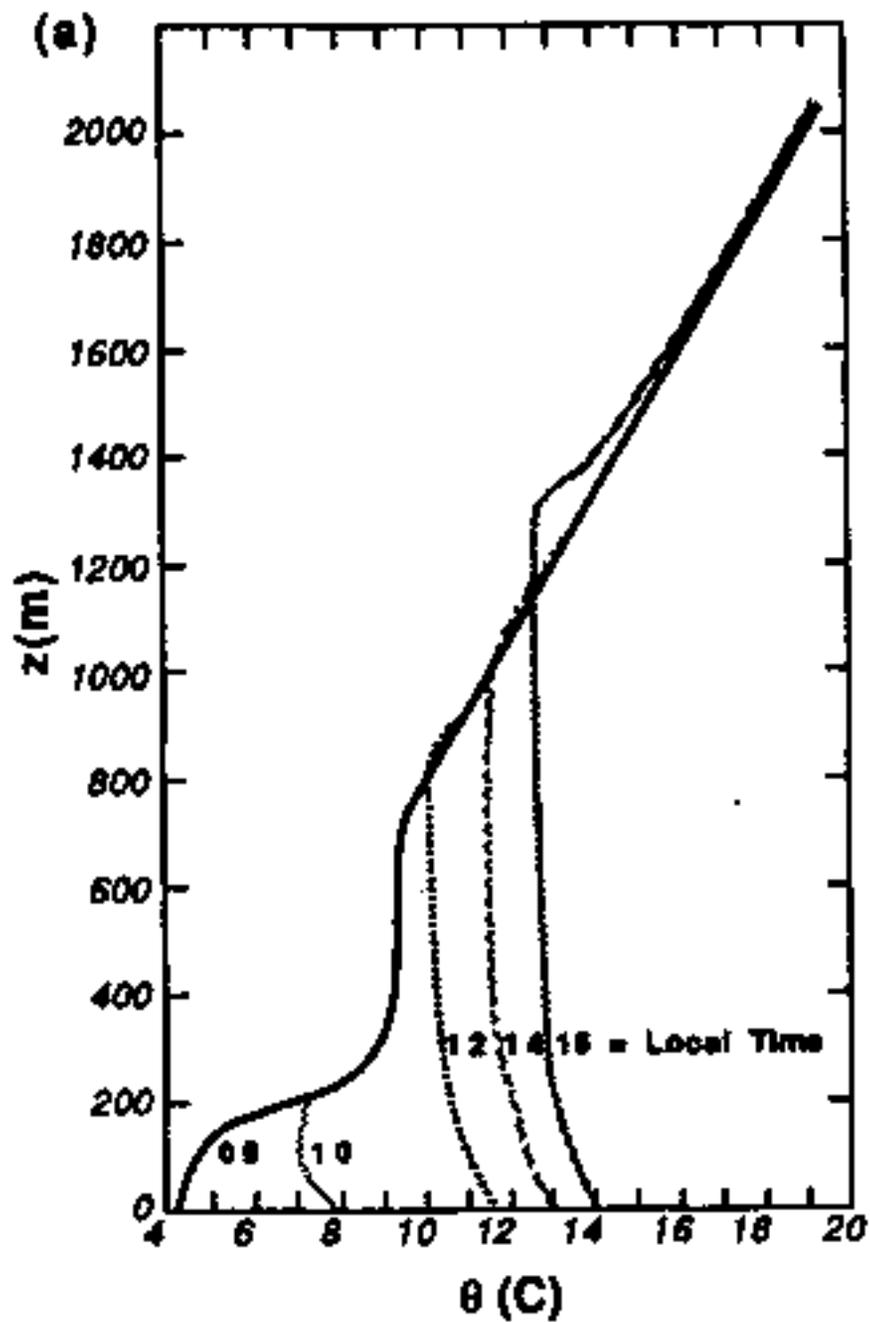
Note: the $\overline{w'\theta}$ parameterization is the same as that for $\overline{u_i' u_j' u_k'}$.

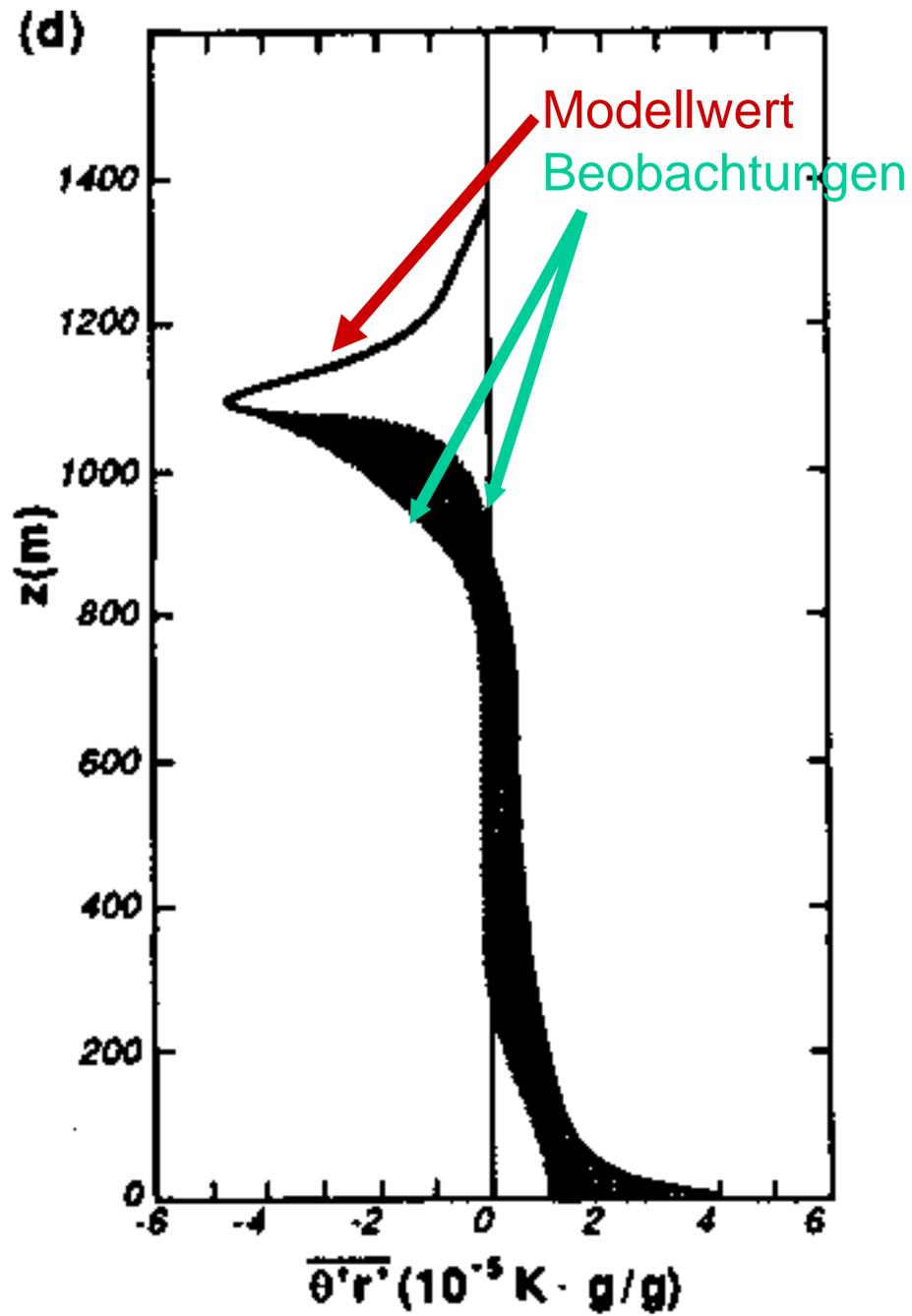
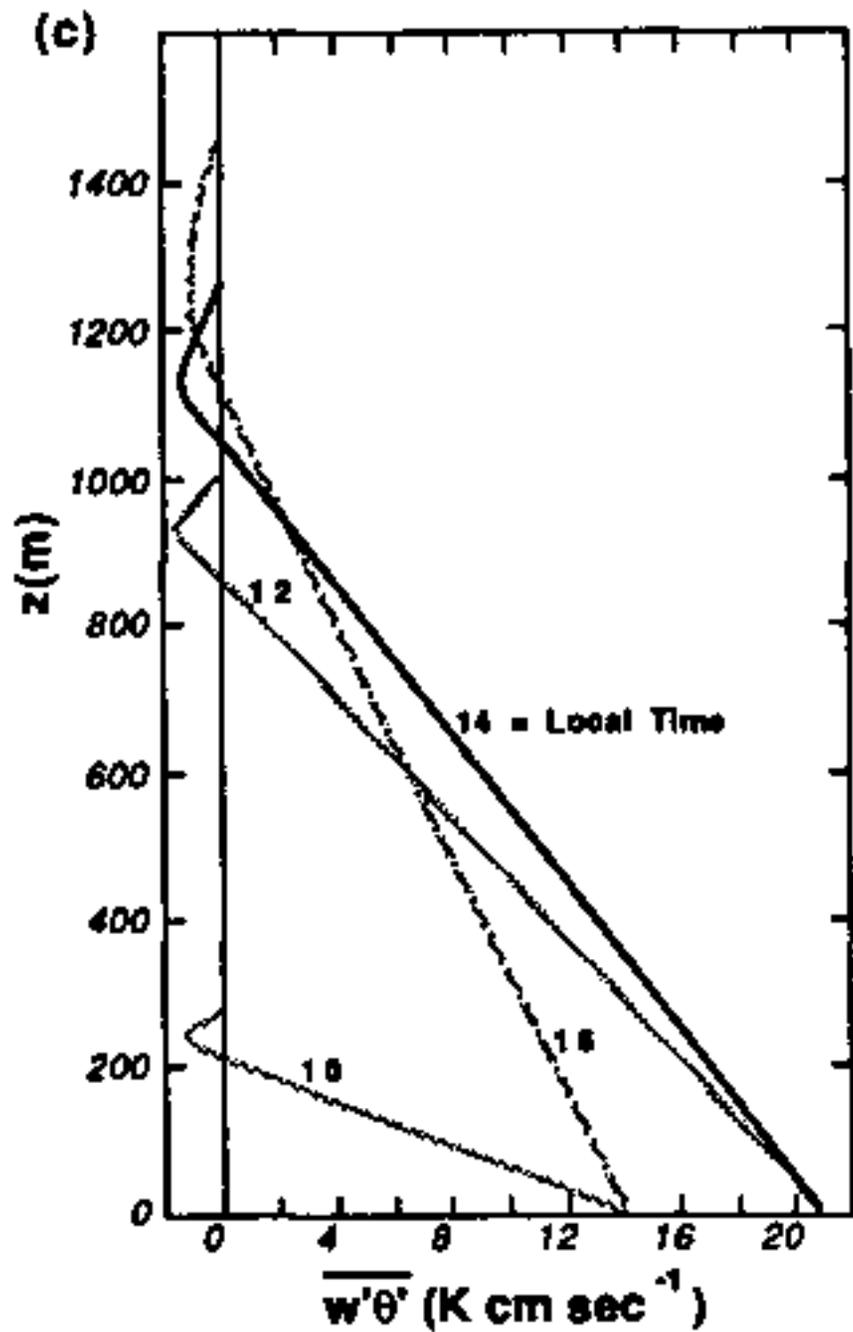
In vorheriger Tabelle findet man 3 grundlegende Ideen eines Schließungsansatzes:

1. Diffusion von höheren zu niedrigeren Werten (engl. down-gradient diffusion; Punkte 1-3 und 6 in der Tabelle), z.B. Diffusion von Statistiken 3. Ordnung hin zu Gradienten von Statistiken 2. Ordnung.
2. Rückkehr zu isotropen Bedingungen (Punkte 4 und 5), proportional zum Grad der Anisotropie.
3. Dissipation (Punkte 7 und 8), proportional zur Stärke (Größe) der Turbulenz.

- Es folgt ein Beispiel für eine Modellrechnung einer Schließung 2. Ordnung ("The moist convective boundary layer simulations" von Sun und Ogura, 1980).
- Zusätzlich zu den obigen Gleichungen führten sie prognostische Gleichungen für das Wasserdampf-mischungsverhältnis \bar{r} , die Feuchtevarianz $\overline{r'^2}$, den Feuchtefluss $\overline{w'r'}$ sowie die Temperatur-Feuchte Kovarianz $\overline{r'\theta'}$ ein.

- Durch den Gebrauch dieses Satzes von Gleichungen 2. Ordnung konnten sie Vorhersagen (Bestimmungen) für mittlere Variable erstellen, wie sie auch mit einem Schließungsansatz 1. Ordnung (allerdings geringerer Genauigkeit) möglich gewesen wäre (Abb. Teil a).
- Sie konnten Varianzen vorhersagen, die mit einer Schließung 1.5-ter Ordnung (allerdings geringerer Genauigkeit) möglich gewesen wäre (Abb. Teil b).
- Am wichtigsten aber ist, dass Vorhersagen von Flüssen (Abb. Teil c) und anderen Kovarianzen (Abb. Teil d) erstellt werden können, die mit anderen Schemata niedrigerer Ordnung nicht bestimmt (vorhergesagt) werden können.





Lokale Schließungsansätze 3. Ordnung

- Es würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen Schließungsansätze 3. Ordnung im Detail zu besprechen.
- Generell werden dazu die prognostischen Gleichungen für Terme der dreifachen Korrelation benötigt, während Parametrisierungen entwickelt werden müssen für die Korrelationsterme 4. Ordnung, für die Druckkorrelationen und für die viskose Dissipation.
- In der Literatur findet man einige Parametrisierungen die annehmen, dass die Momente 4. Ordnung quasi Gauss verteilt sind und so als Funktion von Momenten 2. Ordnung approximiert werden können.
- Jeder unrealistische Wert von Momenten 3. Ordnung wird vernachlässigt oder vereinfacht, um physikalisch realistische Werte zu erhalten. Verschiedene "Dämpfungen" von Eddytermen werden verwendet, um negative Werte zu vermeiden.

- Generell wird angenommen, dass die Lösungen von Gleichungen für Variable geringerer Ordnung (wie z.B. Flüsse des mittleren Windes) genauer werden, wenn Schließungsansätze höherer Ordnung verwendet werden.
- Mit anderen Worten: Parametrisierungen für Terme 4. Ordnung können zwar sehr grob sein, aber sie enthalten genügend Physik (d.h. Terme, die nicht parametrisiert sind) in den Gleichungen für die 3. Momente, dass die 3. Momente wiederum weniger grob, d.h. genauer sind.
- Die Gleichungen für die 2. Momente enthalten "mehr" Physik und machen sie deshalb wiederum genauer, u.s.w., bis herunter zu den Gleichungen zur Beschreibung der mittleren Winde und Temperaturen, etc.
- Die Erfahrung lehrt, dass diese Vorgehensweise zu vernünftigen Ergebnisse führt.
- Momente höherer Ordnung sind in der realen Atmosphäre kaum zu messen.

- Messungen von Flüssen (2. Momente) streuen typischerweise sehr stark.
- Abschätzungen für Korrelationen von Eddytermen der 3. Momente sind noch schwieriger, wobei der Unsicherheits- (Fehler-) bereich häufig so groß ist, dass das Signal nicht vernünftig bestimmt werden kann.
- "Genaue" Messungen von Momenten 4. Ordnung gibt es nicht.
- Dies bedeutet, dass man über das Verhalten von Momenten 3. und 4. Ordnung nur sehr wenig weiß. Daher sind vernünftige Parametrisierungen für diese Momente nur schwer zu erzielen.
- Nun ist klar, warum für Schließungsmodelle der 3. Ordnung häufig nur grobe Approximationen gemacht werden.

- Schließungsmodelle höherer Ordnung haben viele Parameter die so vorteilhaft angepasst werden können, dass eine gute Vorhersage erzielt wird.
- Diese Parameter werden mittels spezieller Studien (z.B. Grenzwertbetrachtungen) oder Laboruntersuchungen (z.B. in Wassertanks) so justiert, dass durch Vereinfachungen einzelne Terme vernachlässigt werden können und somit verbleibende Terme besser bestimmt werden können.

Nicht-lokale Schließungsansätze

- Nicht-lokale Schließungsansätze berücksichtigen, dass größere Eddies Fluide über begrenzte Entfernungen transportieren können, bevor kleinere Eddies die Möglichkeit haben, diese zu vermischen.
- Dieses Konzept (ähnlich wie das der Advektion) wird durch Beobachtungen gestützt: z.B. Thermals steigen auf, während ihr Kern "unverdünnt" bleibt; Existenz von kleinen Wirbeln in Bodennähe (aus Laub oder Schnee); oder aber auch gut organisierte Zirkulationsmuster, die in Fotografien von Wolken erkennbar sind.

Nicht-lokale Schließungsansätze – "Transiliente" Turbulenz Theorie

- Stull präsentiert in seinem Buch zwei nicht-lokale Schließungsansätze 1. Ordnung (ab Seite 225):
 1. "Transilient turbulence theory", welche sich dem Problem aus der Sicht eines physikalischen Raumes nähert*.
 2. Spektrale Diffusionstheorie, die einen spektralen oder Phasenraum-Ansatz verwendet.
- Beide erlauben einen Bereich (ein Spektrum) von Eddies verschiedener Größe, die am Mischungsprozess durch Turbulenz mitzuwirken.

* Transilient turbulence theory:

"A method for parameterising turbulence that allows non-local vertical mixing between every pair of grid points in a vertical column, even between non-neighbouring points."



Ende Kapitel 6