

# Kapitel 5 (1): Kinetische Energie der Turbulenz



# Kinetische Energie der Turbulenz

- Kinetische Energie der Turbulenz (engl. turbulence kinetic energy, TKE) ist eine der wichtigsten Variablen in der Mikrometeorologie, da sie ein Maß für die Intensität der Turbulenz darstellt.
- Sie steht in direktem Zusammenhang mit dem Transport von Impuls, Wärme und Feuchte durch die GS.
- Die individuellen Terme in der TKE Bestimmungsgleichung beschreiben physikalische Prozesse, die Turbulenz erzeugen.
- Die relative Größe dieser Prozesse bestimmt die Fähigkeit des Flusses Turbulenz aufrecht zu erhalten oder turbulent zu werden; folglich ist sie ein Maß für die Stabilität des Flusses.

# Die TKE Bestimmungsgleichung

- Definition der TKE (siehe Kapitel 2):

$$\text{TKE} / m = \bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

- Summationsschreibweise (wie vorher)  $\Rightarrow$

$$\bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u_i'^2})$$

- Man erkennt sofort, dass TKE/m nichts anderes ist, als die Varianz der Geschwindigkeit geteilt durch 2.
- Deshalb beginnt man mit der prognostischen Gleichung für die Summe der Varianzen der Geschwindigkeit und teilt diese durch 2  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

- Term I**      Änderungsrate der TKE
- Term II**      Advektion der TKE durch den mittleren Wind
- Term III**      Produktions- oder Verbrauchsterm von TKE durch den Wärmefluss (hängt davon ab, ob dieser positiv oder negative ist; engl. buoyancy prod. term)
- Term IV**      Produktionsterm von TKE durch mechanische Vorgänge, z.B. Scherung (Impulsfluss)
- Term V**      Turbulenter Transport von TKE; er beschreibt wie TKE durch turbulente Eddies ( $u'_j$ ) umher bewegt wird, in der Regel von unten nach oben)

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

**Term VI** Druckkorrelationsterm der beschreibt, wie TKE durch die Druckstörungen neu verteilt wird; ist häufig mit Schwerewellen assoziiert

**Term VII** viskose Dissipation der TKE, d.h. Umwandlung von TKE in Wärme.

Wähle ein Koordinatensystem, welches nach der mittleren Windrichtung ausgerichtet ist, nehme horizontale Homogenität an und vernachlässige Absinken der Luft  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

I

III

IV

V

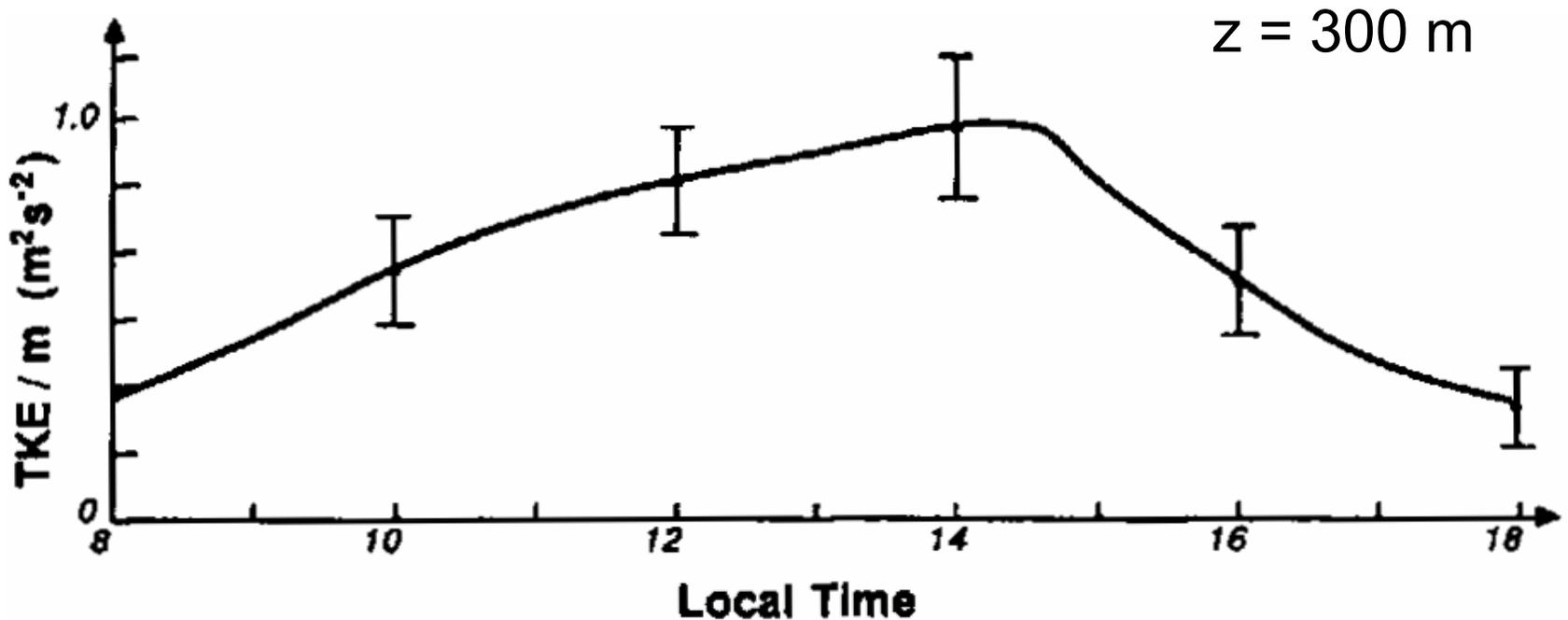
VI

VII

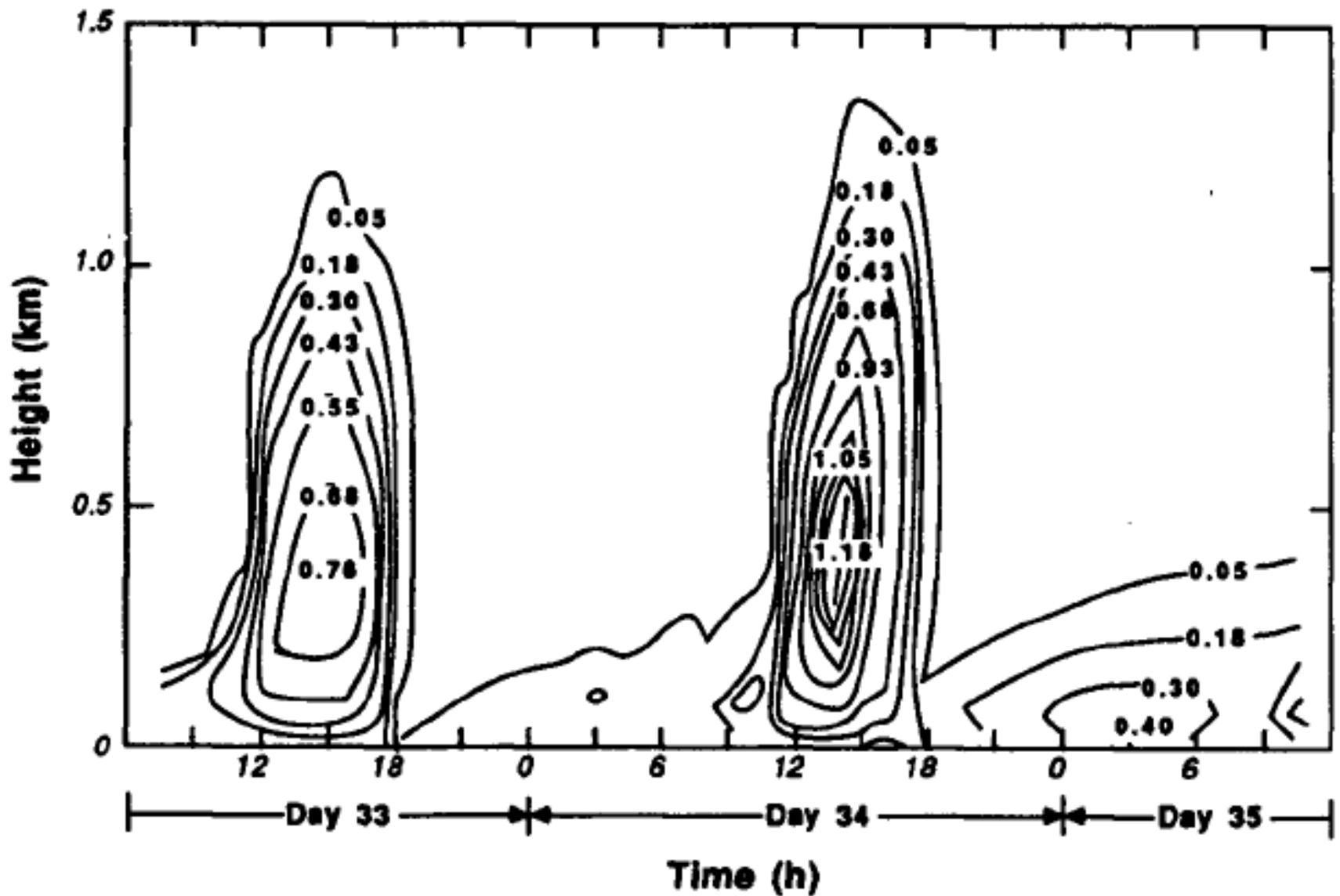
- Turbulenz ist dissipativ! Term VII ist ein Verlustterm der immer dann existiert, wenn TKE ungleich Null ist.
- Physikalisch heißt das, dass Turbulenz mit der Zeit schwächer wird und verschwindet, bis sie lokal neu erzeugt oder heran transportiert wird.
- Somit ist TKE keine Erhaltungsgröße.
- Die GS kann nur dann turbulent sein, wenn es einzelne physikalische Prozesse gibt, die Turbulenz erzeugen.

# Beiträge zum TKE Budget

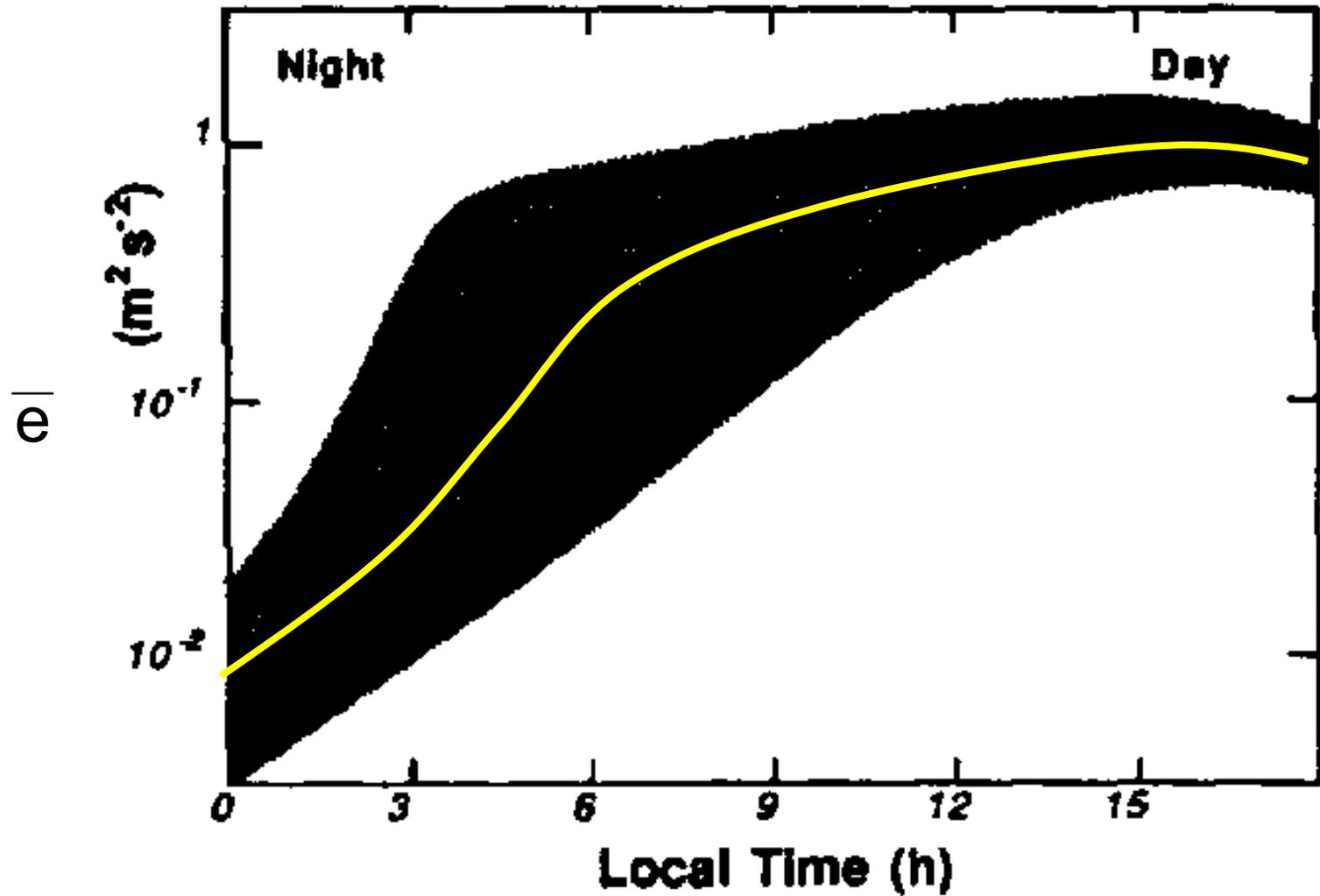
## ➤ Term I: Zeitliche Variation



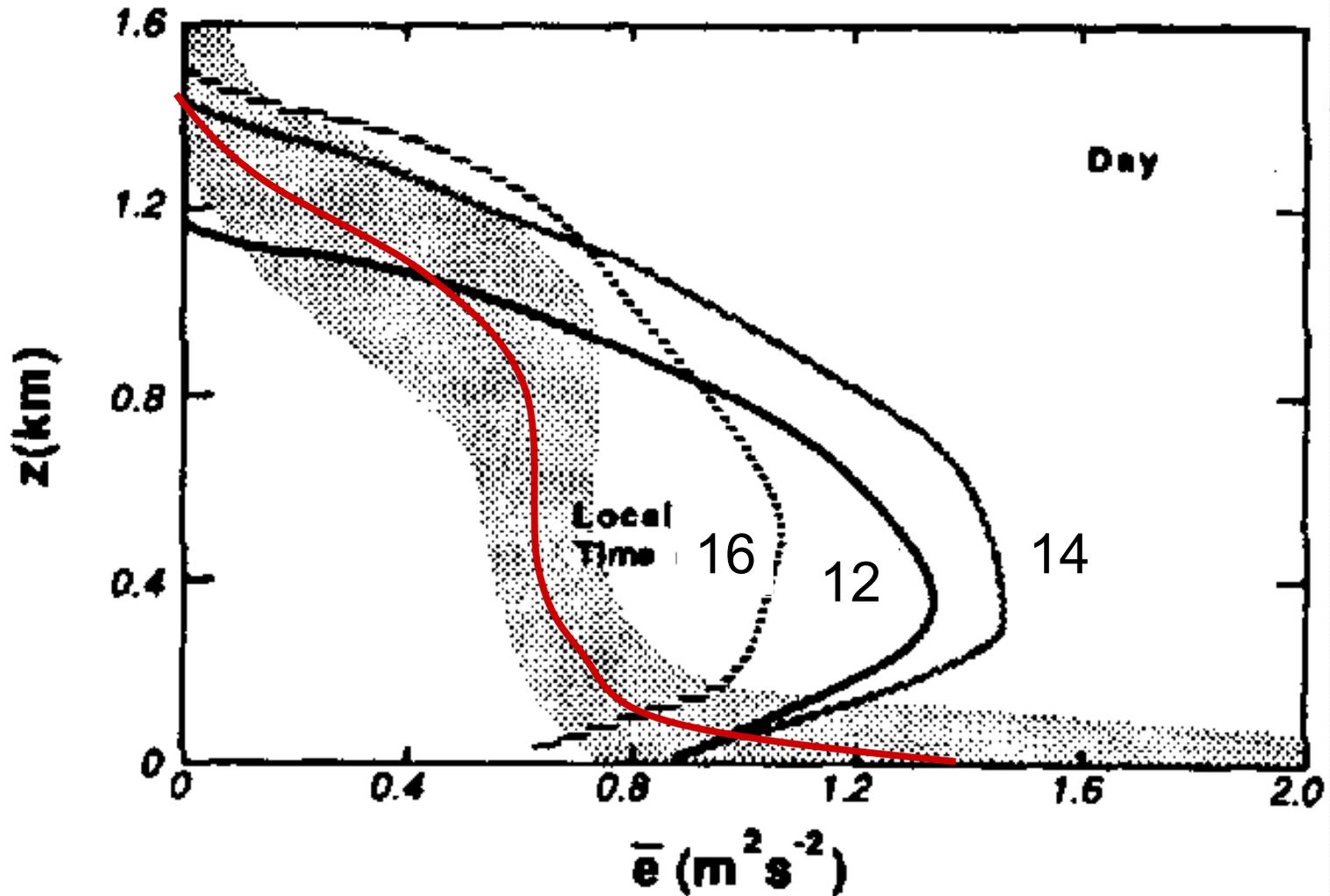
Beispiel für einen typischen Tagesgang der TKE bei konvektiven Bedingungen.



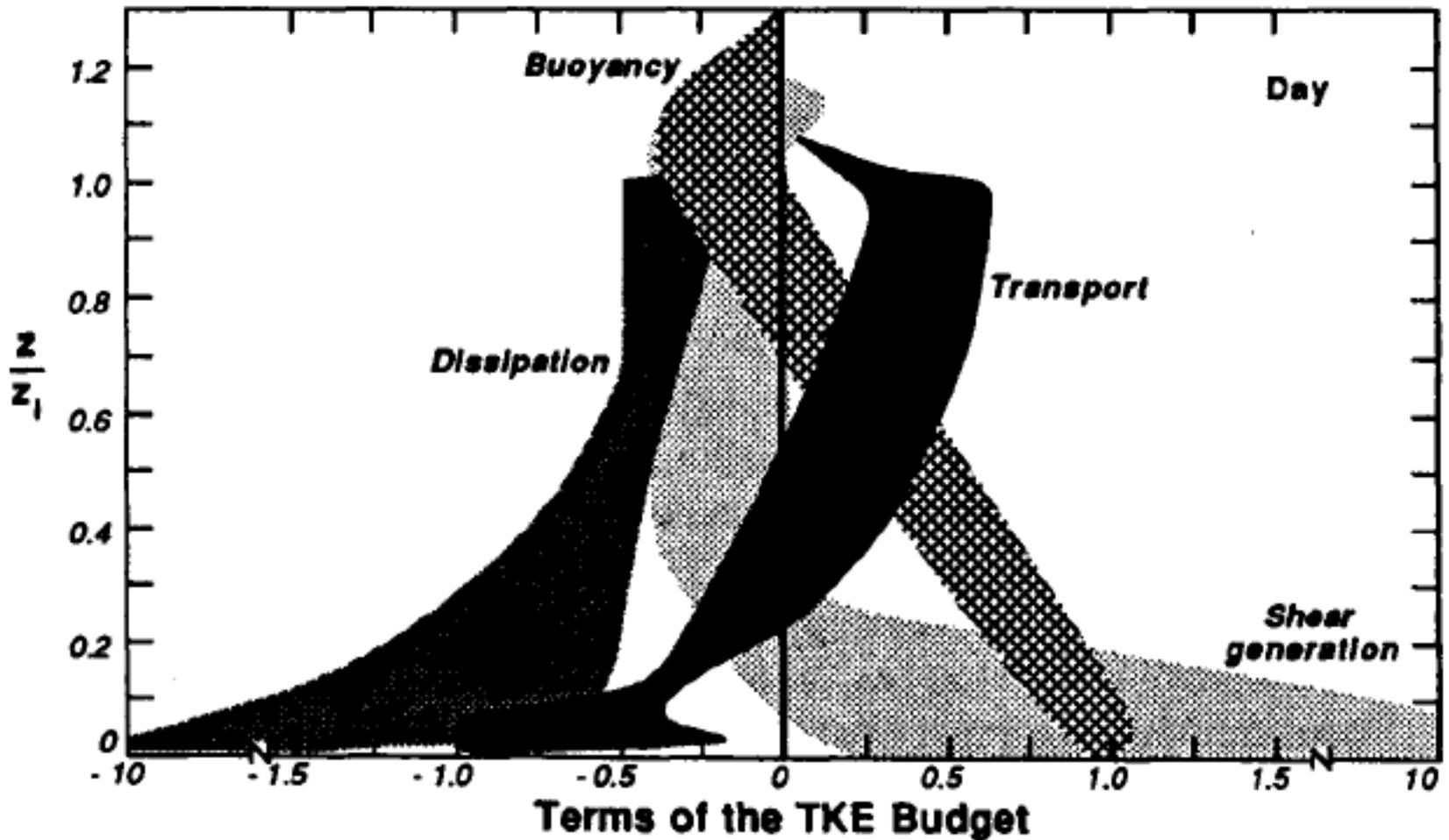
Modellierte zeitliche und räumlich Variation der TKE  
(Einheiten in  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ).



Beispiel für den Variationsbereich des Tagesgangs der TKE im November, beobachtet in der Bodenschicht. Man erkennt, dass die TKE um Größenordnungen variiert.



Die Linien zeigen modellierte vertikale Profile der TKE, wenn freie Konvektion dominiert. Das "rote" Profil tritt auf, wenn sowohl Scherung als auch Auftrieb berücksichtigt werden.



Normalisierte Terme TKE Gleichung. Die schattierten Bereiche geben den Wertebereich der einzelnen Terme an. Alle Terme wurden durch  $w_*^3/z_i$  dividiert (siehe unten); der Wert hierfür ist in der Größenordnung von  $10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-3}$ .

# Advektion

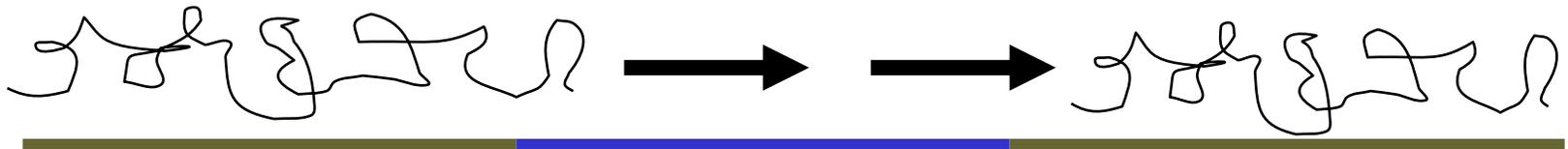
- Term II: Advektion
- Über diesen Term weis man nur sehr wenig.
- Wenn man über einen horizontalen Bereich von mehr als  $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$  mittelt wird häufig angenommen, dass die TKE in der horizontalen nur wenig variiert und der Advektionsterm somit vernachlässigbar ist.
- Dies ist eine durchaus angemessene Annahme über den meisten Landoberflächen.
- Auf kleineren Skalen ist dieser Term aber sicherlich wichtig.



Beispiel

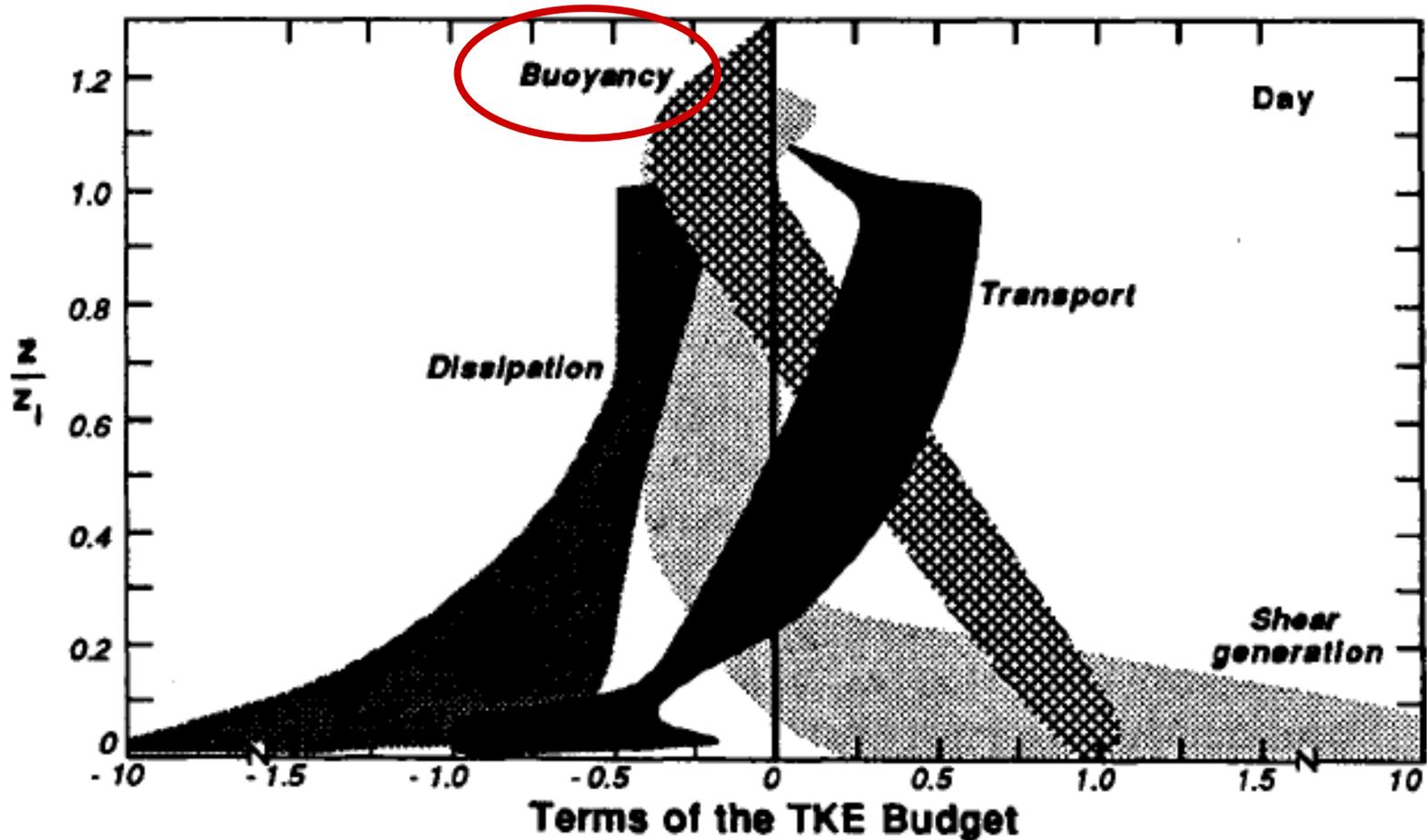
# Advektion

## Advektion der TKE



- Angenommen wir haben ein Wasserreservoir, welches kälter ist als die umgebende Landfläche. Durch das Fehlen der Heizung über dem Reservoir würde hier die Turbulenz in der darüberliegenden Luft zerfallen, während die Luft über den angrenzenden Landoberflächen im Zustand aktiver Konvektion verbleibt. Ein mittlerer Wind, der Luft über die Ufer der Wasserfläche hinweg advehiert, würde zu einer signifikanten Änderung des TKE Budgets führen.
- Über Ozeanen kann der Advektionsterm vernachlässigbar sein, auch für kleinere Skalen.

# Produktion / Verlust von Auftrieb

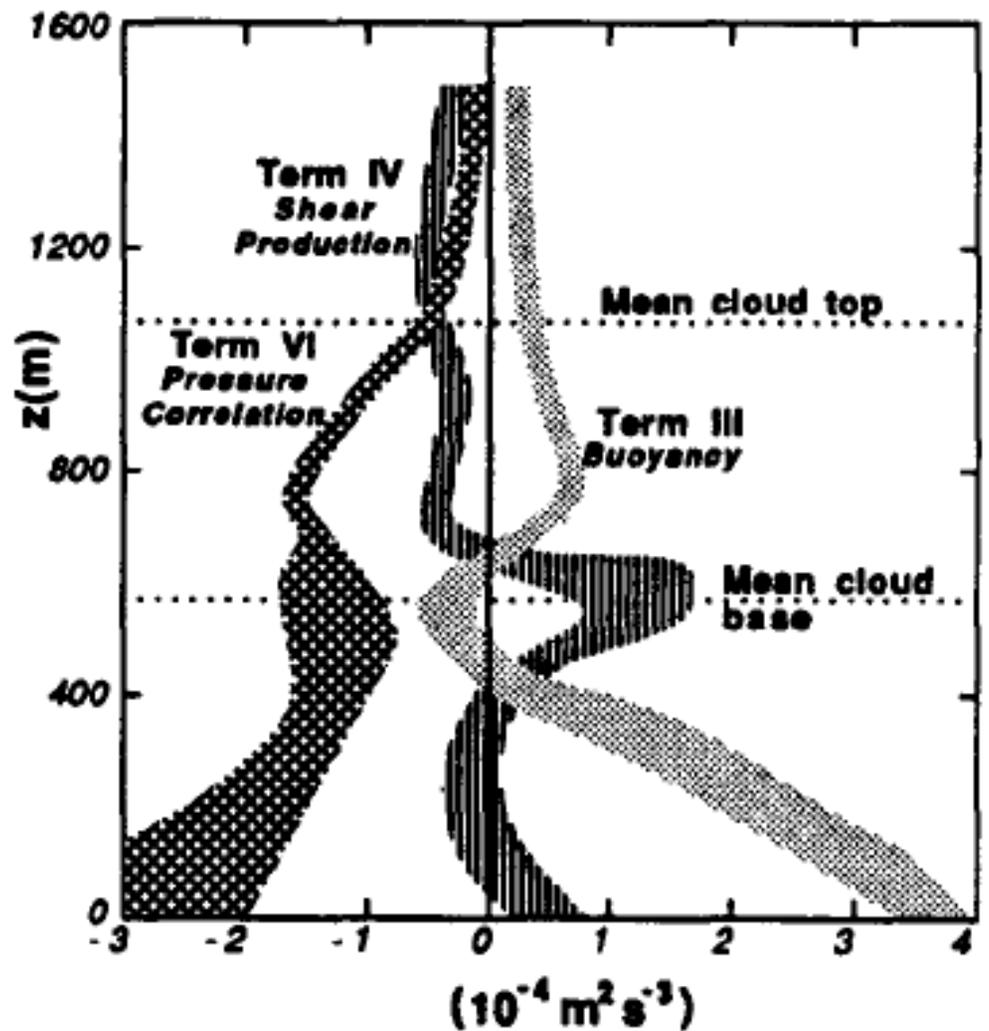
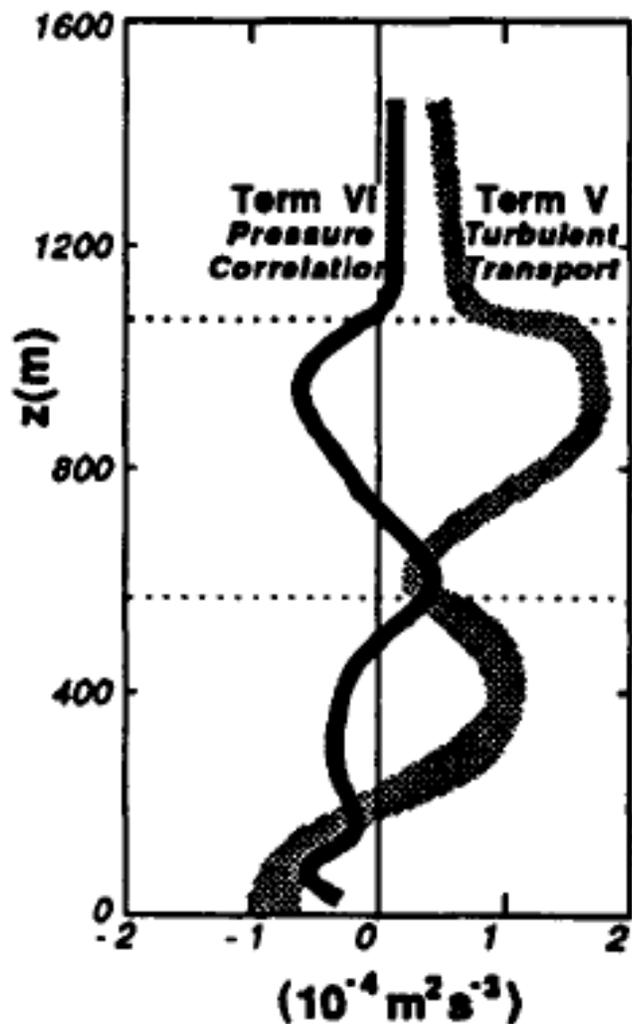


Entscheidend ist hier der vertikale Wärmefluss; er ist in den unteren 2/3 der GS positiv und nimmt mit der Höhe in etwa linear ab.

- Term III: Da dieser Term an Tagen mit freier Konvektion sehr wichtig ist, wird er oft zur Normalisierung aller anderen Terme benutzt.
- Am Erdboden wird Term III =  $w_*^3 / z_i$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{z_i}{w_*^3} \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} & = & \frac{gz_i}{w_*^3 \bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} & - & \frac{z_i \overline{u'w'}}{w_*^3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & - & \frac{z_i}{w_*^3} \frac{\partial (\overline{w'e})}{\partial z} & - & \frac{z_i}{w_*^3} \bar{\rho} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} & - & \frac{z_i \varepsilon}{w_*^3} \\
 \text{I} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VI} & & \text{VII}
 \end{array}$$

- Per Definition wird Term III an der Erdoberfläche gleich Eins gesetzt.
- Term III wirkt nur auf die vertikale Komponente der TKE.
- Dieser Produktionsterm ist also anisotrop und damit für einen Teil der Umwandlung von vertikaler KE in horizontale Richtungen verantwortlich.



**Terms of the TKE Budget**

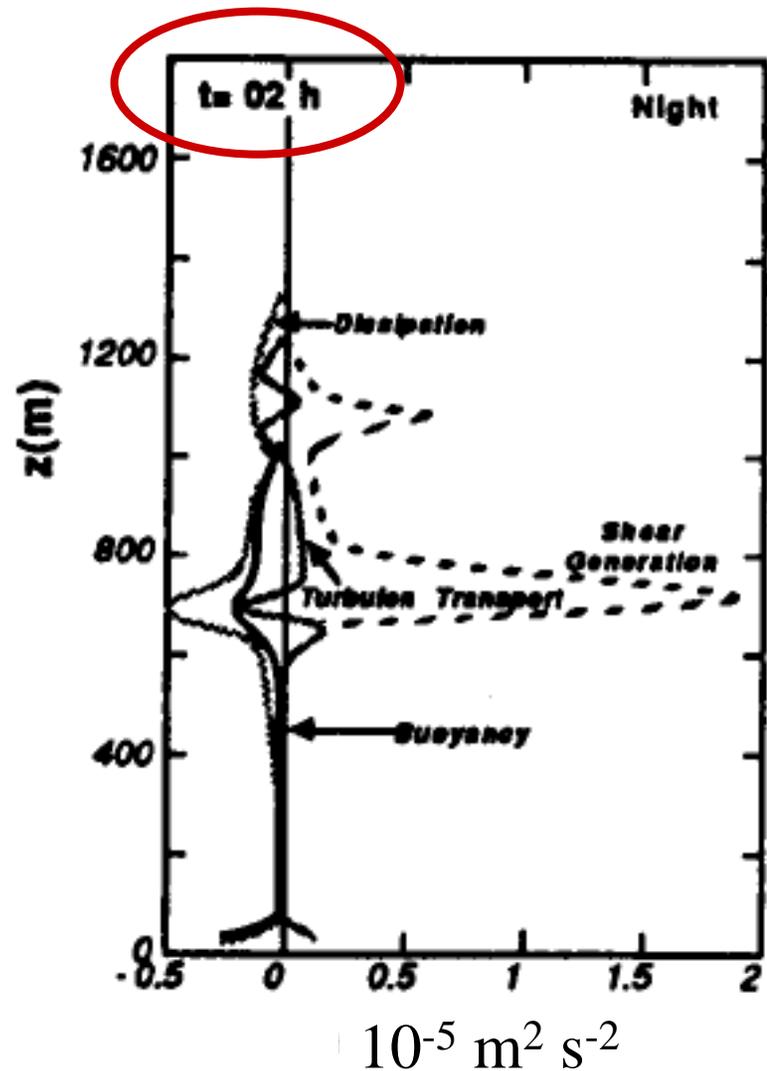
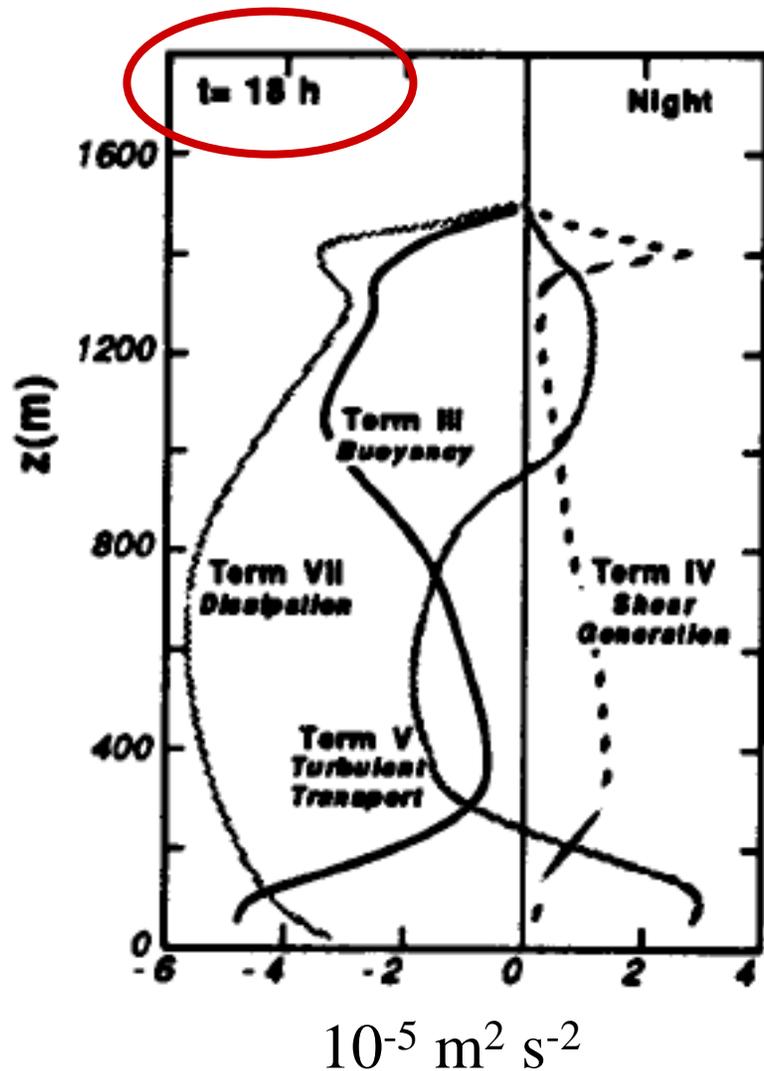
Wertebereich der einzelnen Terme in der TKE Budgetgleichung für eine tropische GS mit Wolkenbedeckung am oberen Rand. Der Transportterm (= "Umverteilungsterm") ist dabei in einen Druckkorrelationsterm (Term VI) und einen turbulenten Transportterm (V) aufgeteilt.

# Verluste

- In einer statisch stabil geschichteten Atmosphäre wird ein Luftpaket, welches durch Turbulenz vertikal verschoben ist, eine (Auftriebs-) Kraft erfahren, die es in seine Ausgangshöhe zurück drückt.
- In diesem Fall tendiert die statische Stabilität dazu TKE zu unterdrücken oder zu verbrauchen und ist deshalb mit einem negativen Wert von Term III assoziiert.
- Diese Bedingungen findet man in einer stabilen nächtlichen GS über Land oder immer dann, wenn die Oberfläche kälter ist als die darüberliegende Luft.



**Beispiel**



**Terms of the TKE Budget**

Modelliertes Budget der TKE am Abend (t = 18 h) und in der Nacht (t = 02 h).

# Produktion durch mechanische Vorgänge

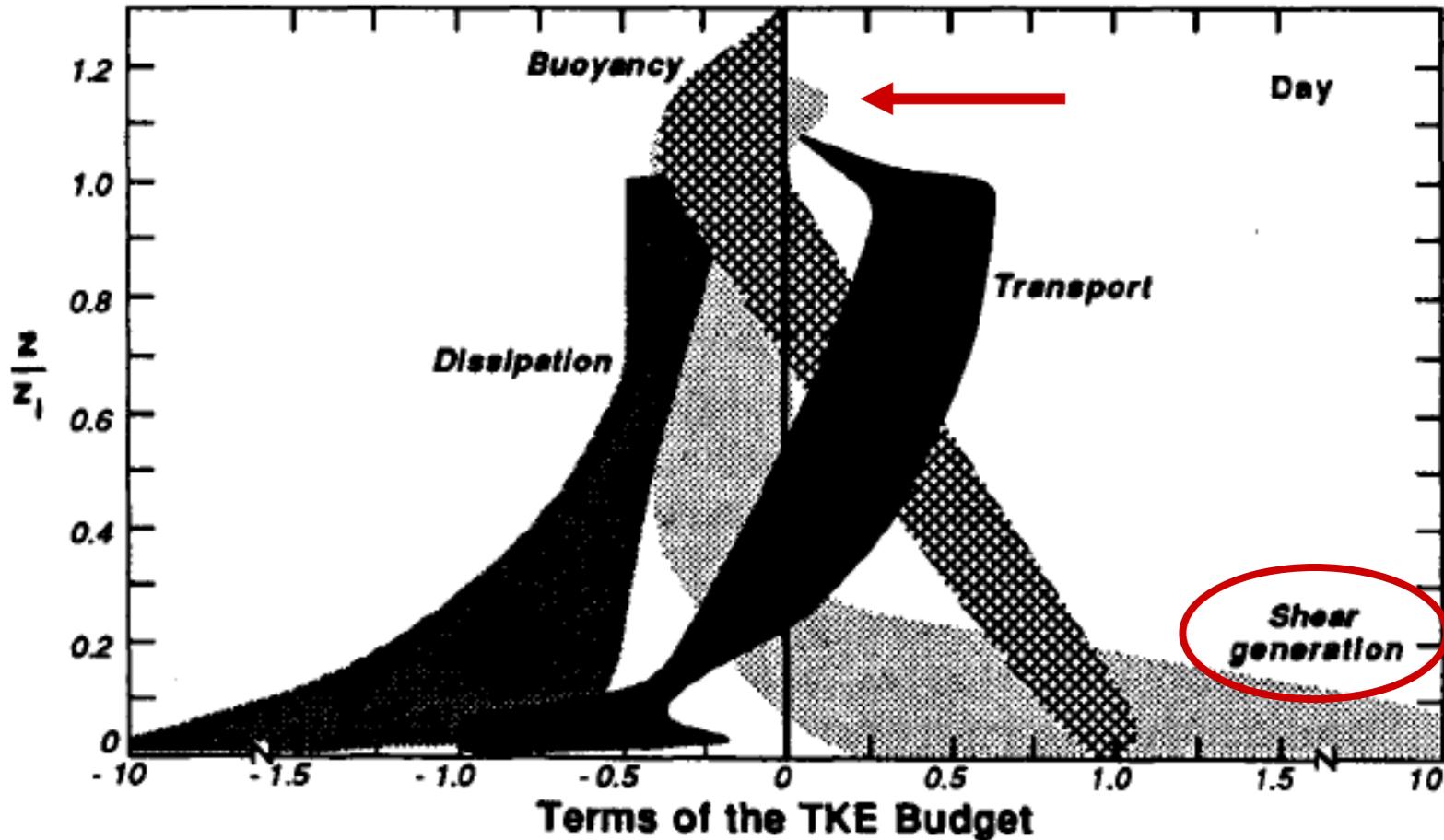
- Betrachtung von Term IV:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

I                    III                    IV                    V                    VI                    VII

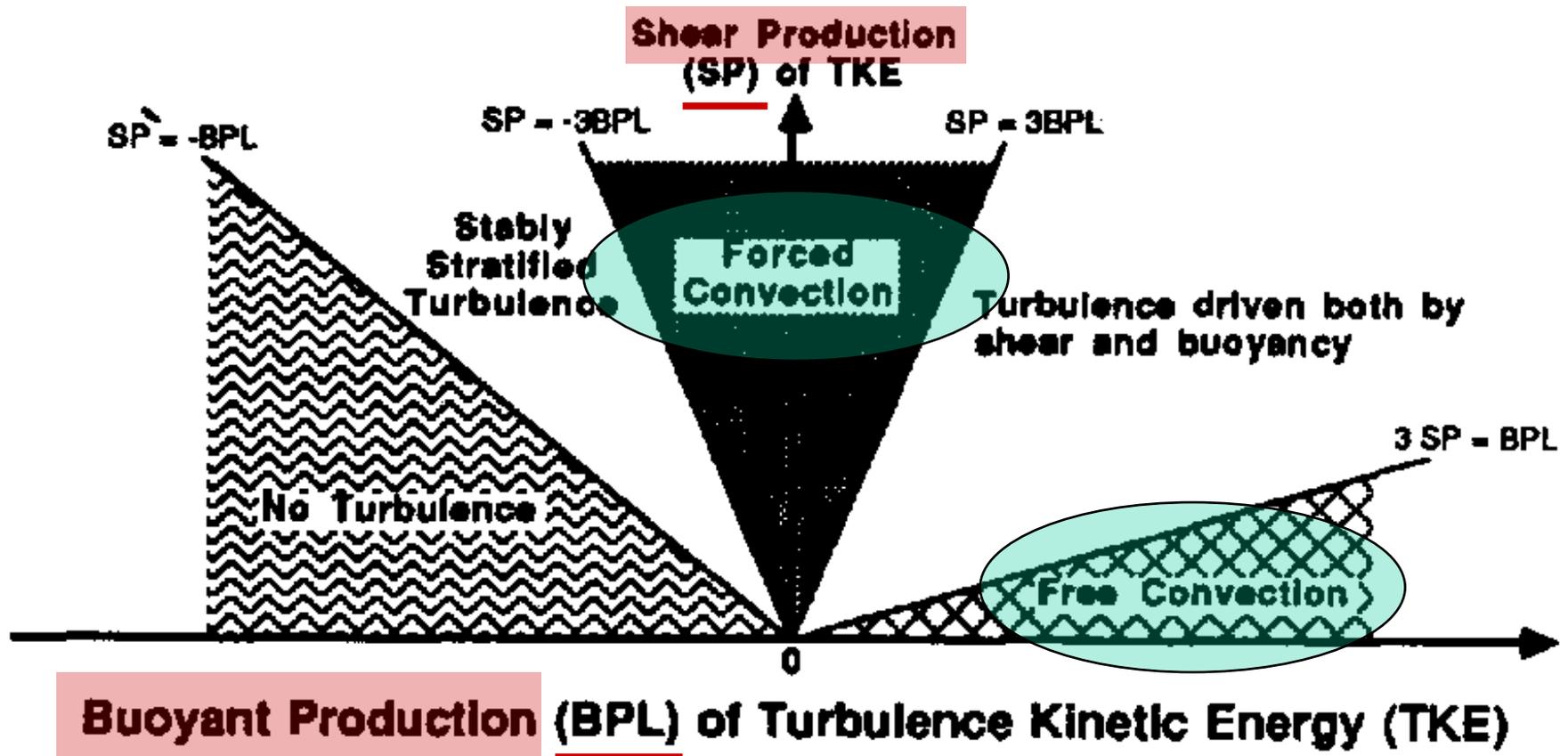
- Wenn ein turbulenter Impulsfluss bei einer mittleren Windscherung existiert, führt die Wechselwirkung zwischen den beiden zur Erzeugung von mehr Turbulenz.
- Term IV ist ein negatives Vorzeichen voran gestellt. Da der Impulsfluss in der Regel ein umgekehrtes Vorzeichen als die mittlere Windscherung hat, ergibt sich, dass Term IV ausschließlich ein Produktionsterm für Turbulenz darstellt.

# Produktion durch mechanische Vorgänge



Größte Werte werden in Bodennähe gefunden. Ein relatives Maximum der Scherproduktion findet man am oberen Rand der ML wegen der Windscherung an der "Entrainment"-Zone (später mehr!).

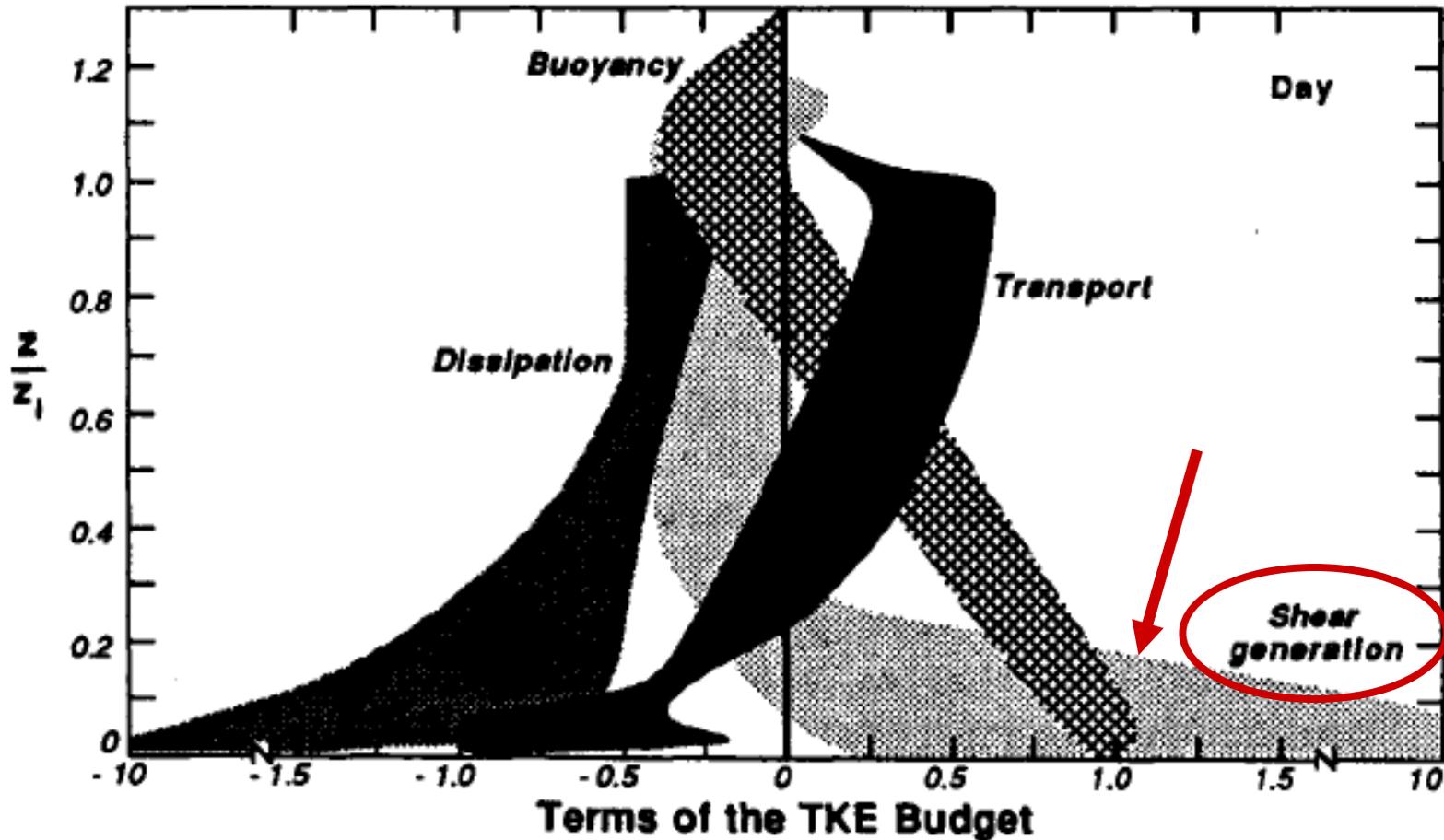
# Produktion von TKE durch Scherung und Auftrieb



Skizzierte Regime für freie und angetriebene Konvektion.

- Die Größe des Scherproduktionsterms in der Bodenschicht ist an einem windigen Tag offensichtlich größer als an einem (dynamisch) ruhigen Tag.
- In synoptisch-skalierten Zyklonen deuten starke Winde und bewölkter Himmel darauf hin, dass angetriebene Konvektion (engl. forced convection) vorhanden ist.
- An vielen Tagen ist die Konvektion weder in einem Zustand freier oder angetriebener Konvektion, da beide Terme (Scherung, Auftrieb) zur Produktion von Turbulenz beitragen.
- In der Nacht über Land oder immer wenn der Boden kälter ist als die Luft, ist der Scherterm der Einzige der, Turbulenz erzeugt.

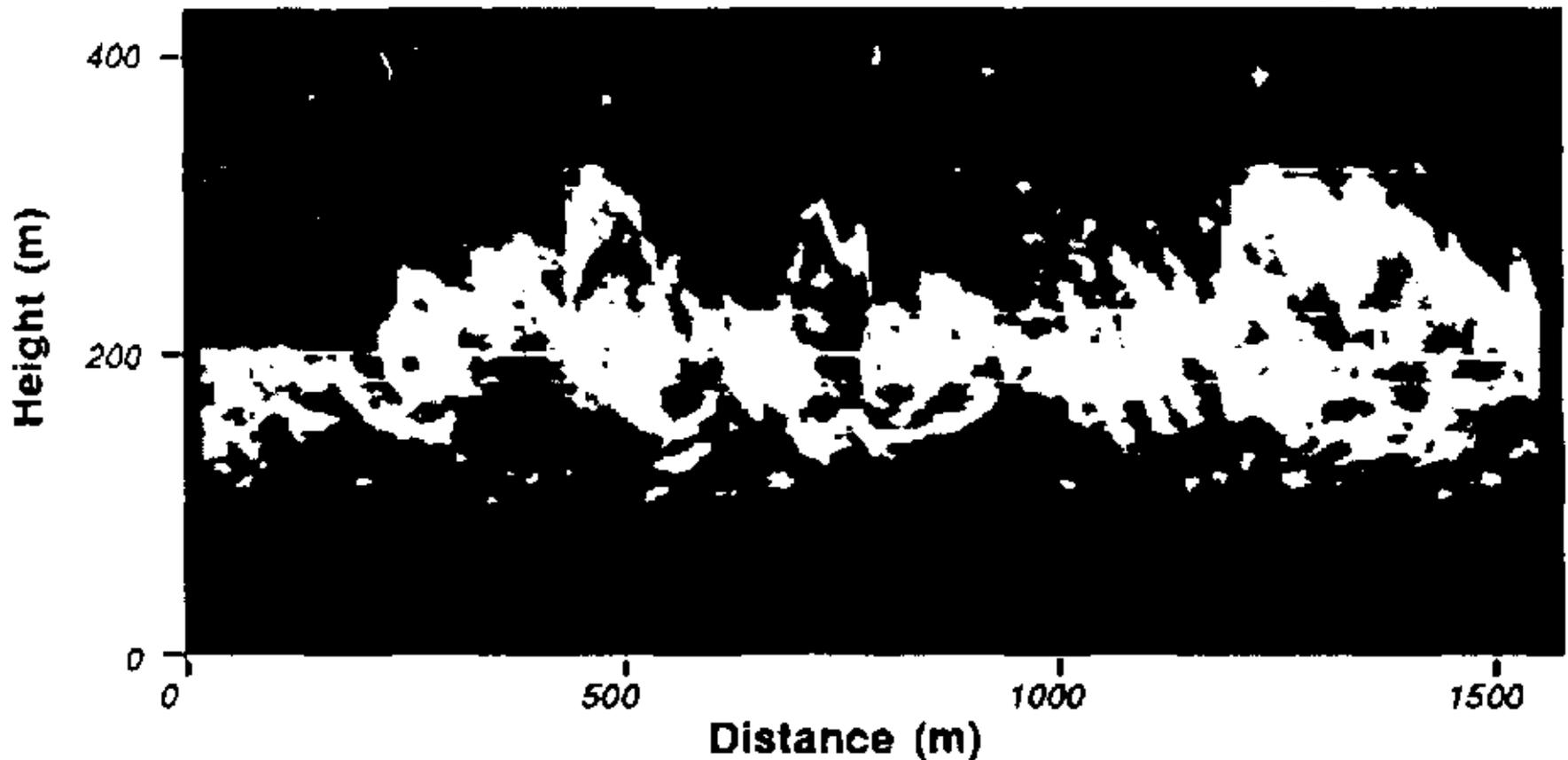
# Produktion durch mechanische Vorgänge



Größte Werte werden in Bodennähe gefunden. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die nächtliche GS dünner ist als die ML am Tage.

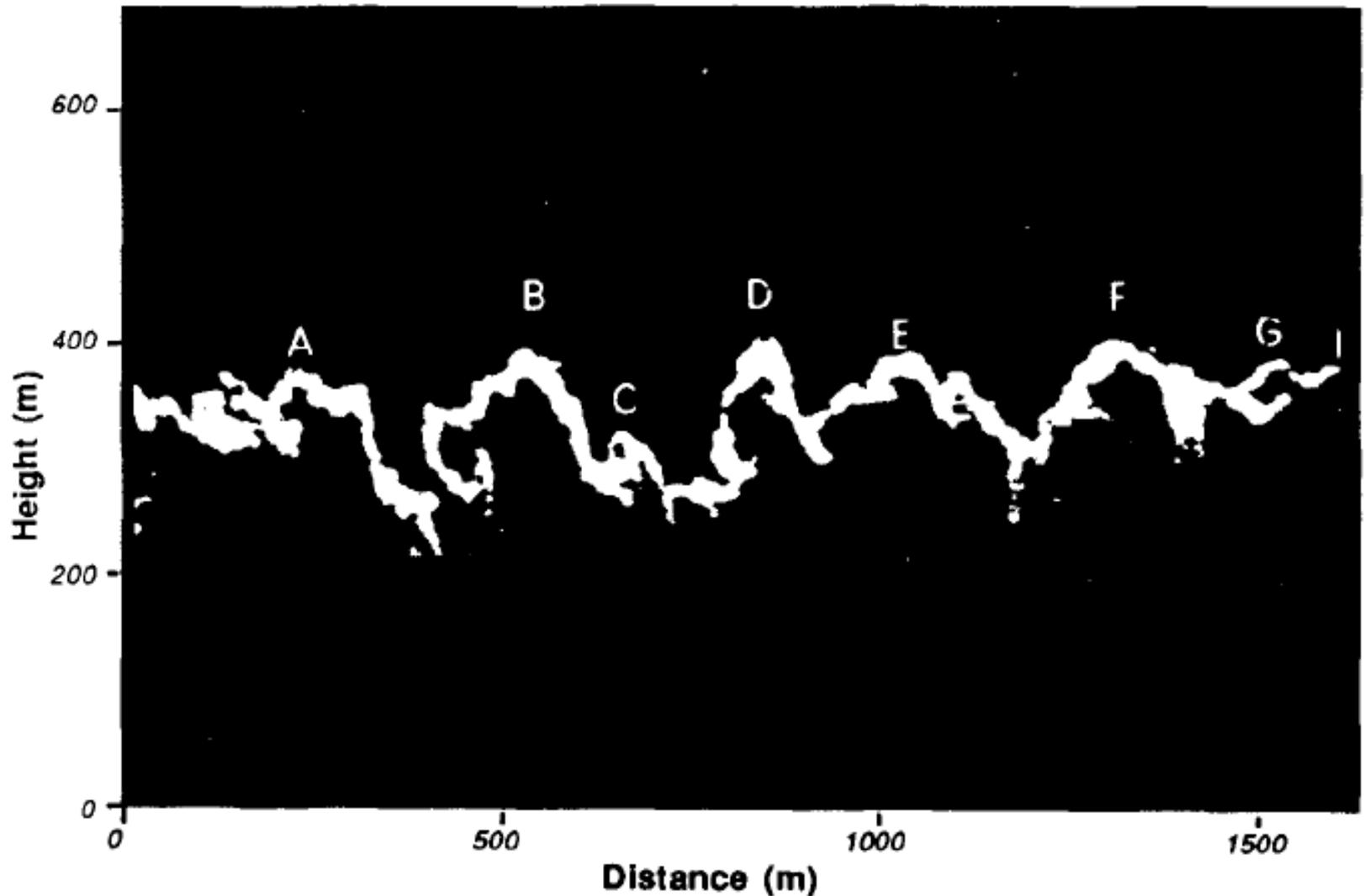
- Die größten Scherungen sind mit Änderungen der u- und v-Komponente des mittleren Windes mit der Höhe verbunden.
- Außer in Gewittern ist die Scherung aufgrund von Änderungen der w-Komponente in der GS vernachlässigbar.
- Aus den Gleichungen für die einzelnen Komponenten der Varianz folgt, dass die Scherproduktion in den x- und y-Komponenten der TKE am größten ist. Daher stellt die Scherproduktion auch einen anisotropen Antrieb dar - am stärksten in der Horizontalen.
- Sowohl der Scherproduktionsterm als auch der Auftriebsterm können anisotrope Turbulenz erzeugen.
- Der Unterschied ist, dass Scherung Turbulenz vorwiegend in horizontalen Richtungen erzeugt, während der Auftrieb im wesentlichen Turbulenz in vertikaler Richtung generiert.
- Die Unterschiede werden in den folgenden Abbildungen deutlich :

**a) Mechanical** Turbulenz durch Scherung



**Fig. 5.8** Radar images of turbulence near the boundary layer top, showing (a) forced convection, and (b) free convection. After Noonkester (1974).  
siehe nächstes Bild für (b)

## b) Thermal Turbulenz durch Auftrieb



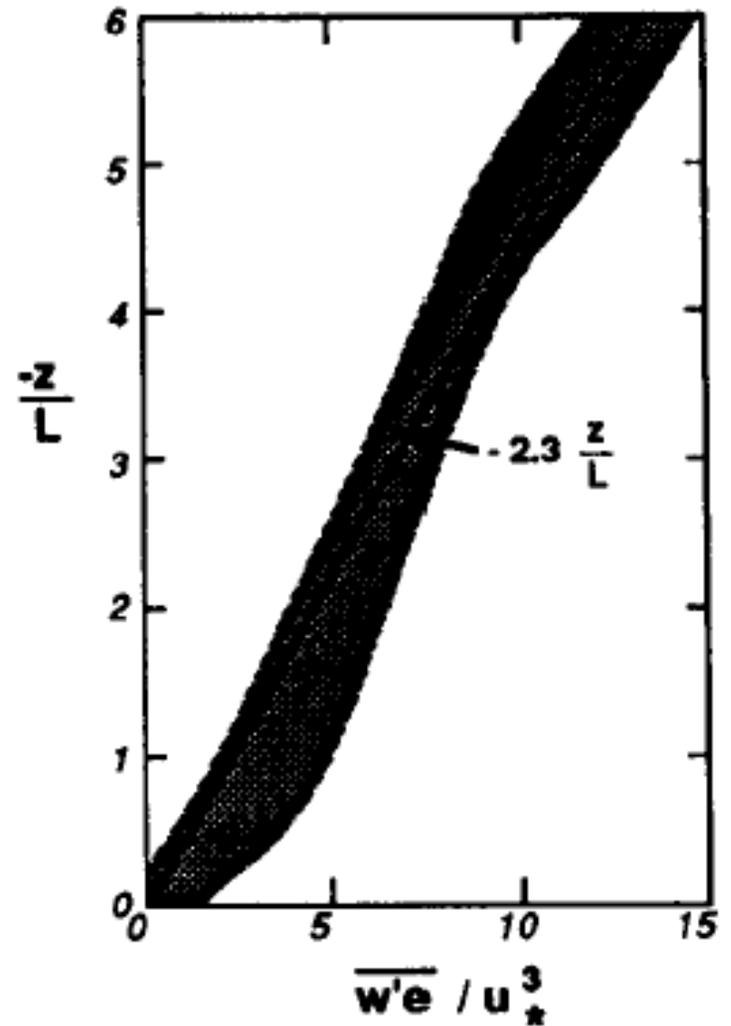
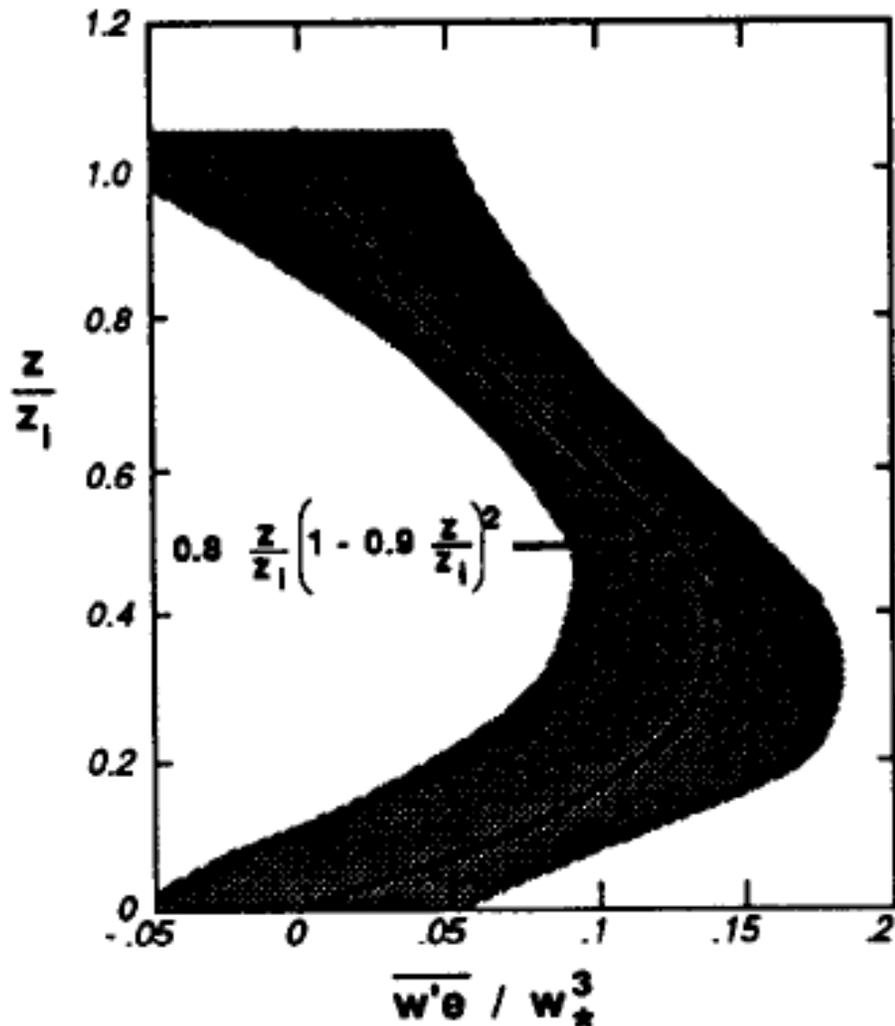
Konvektion, die durch Scherung verursacht wird, ist viel chaotischer als thermisch angetriebene Konvektion!

# Turbulenter Transport

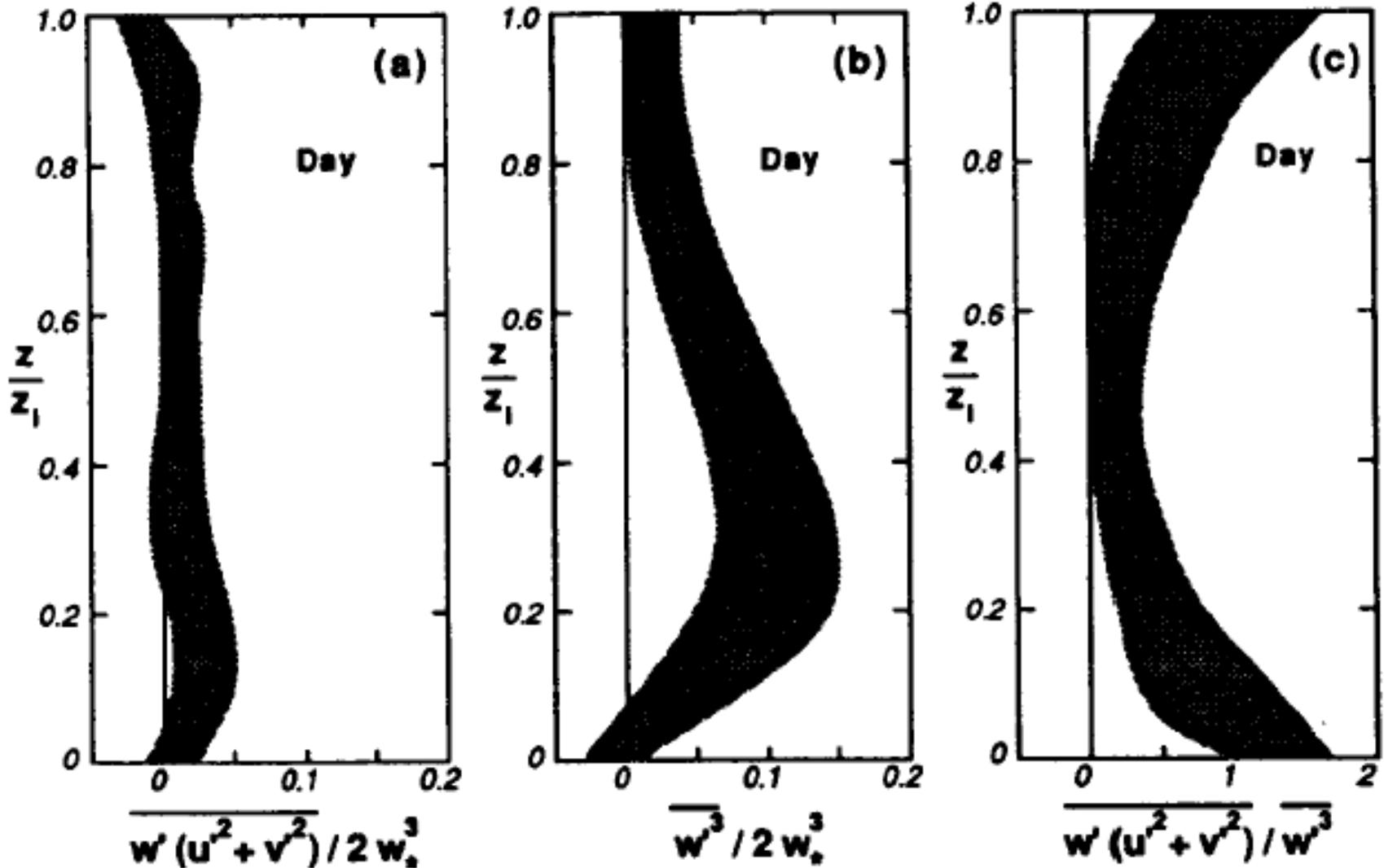
Term V:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\frac{\partial (w'e)}{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

- $\overline{w'e}$  repräsentiert den vertikalen turbulenten Fluss von TKE.
- Wie auch für die anderen Flüsse gilt, dass die Änderung des Flusses mit der Höhe wichtiger ist, als die absolute Größe des Flusses selbst.
- Term V ist ein Flussdivergenzterm; wenn der Fluss, der in eine Schicht hinein geht größer ist als der, der hinaus geht, nimmt die Größe der TKE zu.
- Dieser Term verteilt die TKE einfach um: wenn man über die Dicke der ML integriert, gibt es keinen Beitrag.



Wertebereich von Vertikalprofilen der normalisierten vertikalen Flüsse der TKE unter Ausnutzung der Skalierung der ML (links) und der Skalierung der Bodenschicht (rechts);  $L$  ist die Obukhov Länge (siehe unten).



(a) Wertebereich von Vertikalprofilen des normalisierten vertikalen Flusses der horizontalen Varianz; (b) vertikaler Fluss der vertikalen Varianz; (c) das Verhältnis der beiden am Tage.

# Druck Korrelation - Turbulenz

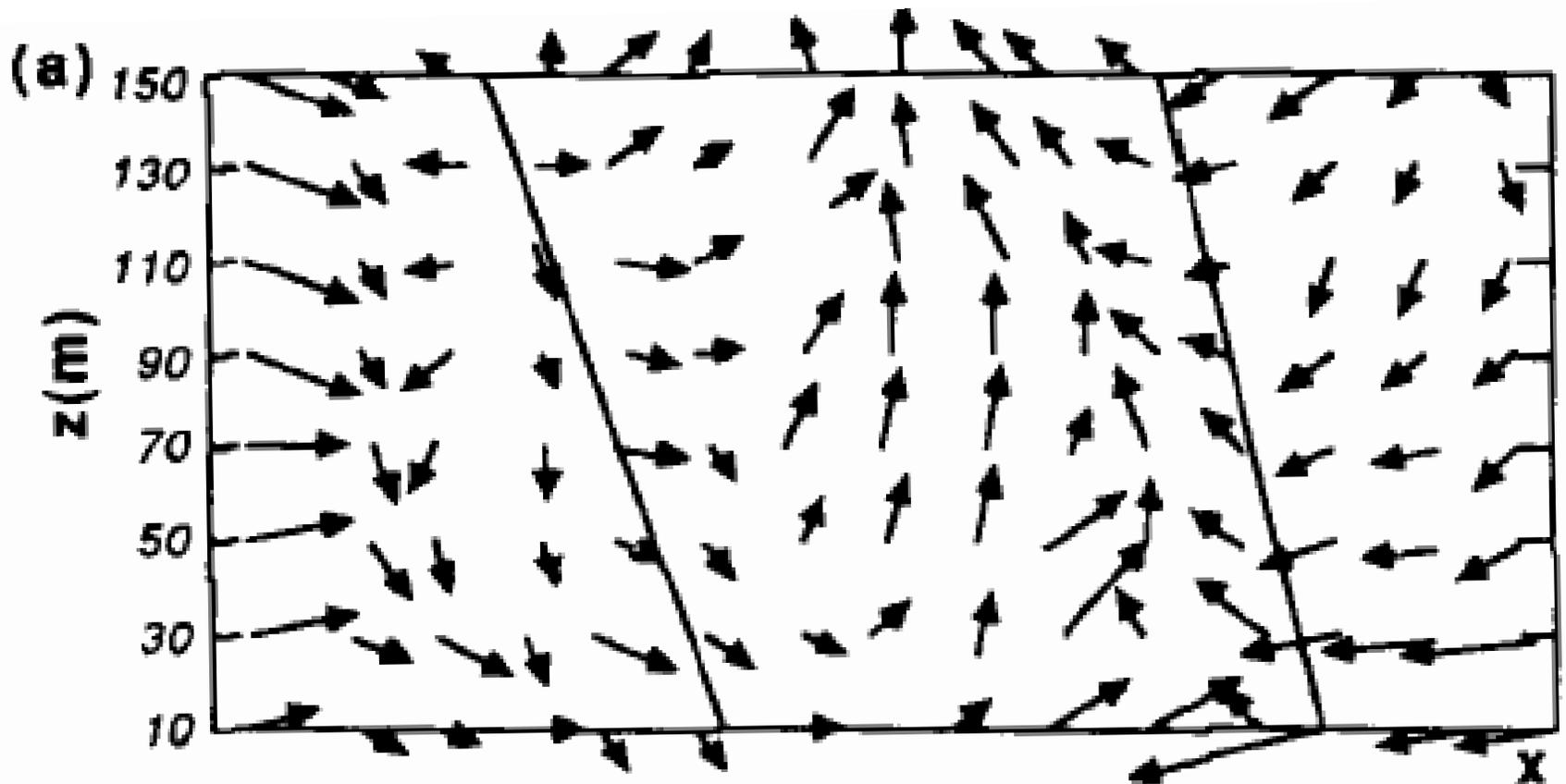
VI

Term VI:

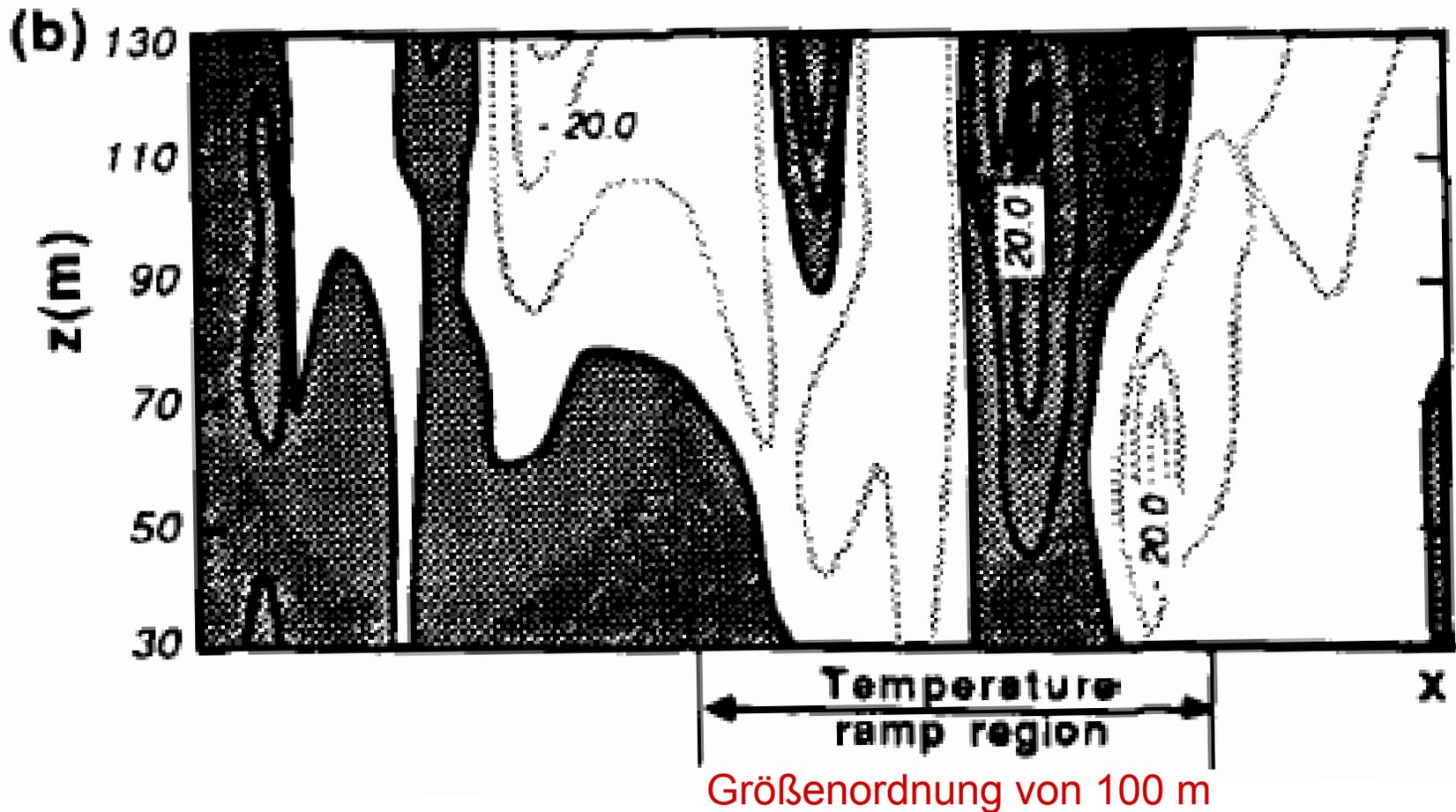
$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

- Stationäre Druckfluktuationen sind in der Atmosphäre überaus schwierig zu messen.
- Die Größe dieser Veränderungen sind sehr klein, etwa 0.005 kPa (0.05 hPa) in der konvektiven Bodenschicht bis 0.001 kPa (0.01 hPa) oder weniger in der ML.
- Drucksensoren mit ausreichender Empfindlichkeit sind durch große Druckänderungen, die durch turbulente oder mittlere Bewegungen verursacht sind, zu sehr beeinflusst.  
⇒ Korrelationen, wie z.B.  $w'p'$  bestimmt aus Messdaten, enthalten meist mehr "Rauschen" als ein wirkliches Signal.

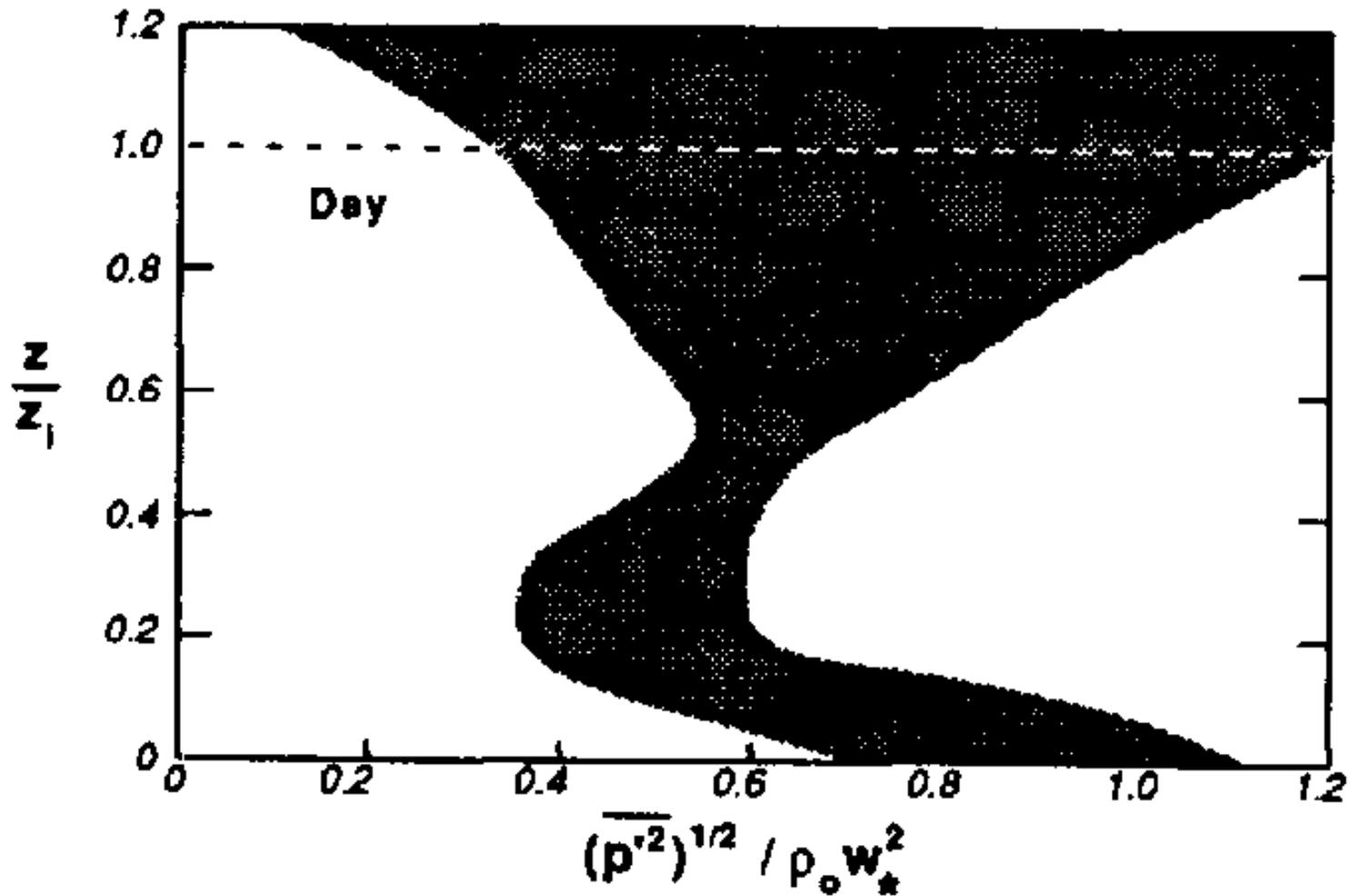
- Das, was man über das Verhalten des Druckkorrelations-term nur unzureichend weiß, schätzt man als "Rest" in der Budgetgleichung ab, wie vorher besprochen.
- Wenn alle anderen Terme in der Budgetgleichung bestimmt (d.h. gemessen oder parametrisiert) wurden, dann schließt der "Restterm", der notwendig ist, um die Gleichung zu balancieren, die unbekanntenen Terme zusammen mit den akkumulierten Fehlern ein.
- Eine offensichtliche Gefahr von diesem Ansatz ist, dass die akkumulierten Fehler der anderen Terme sehr groß werden können.
- Abschätzungen von  $\overline{w'p'}$  in der Bodenschicht, die diese Methode anwenden, sind in der nächsten Abbildung (Teil b) dargestellt, zusammengestellt als Mittel einer großen Anzahl von konvektiven Strukturen.



(a) Zirkulationsmuster durch einen mittleren konvektiven Thermal (mittel aus mehreren Ereignissen) in einem vertikalen Schnitt . Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen die Abweichung vom mittleren Wind. Durchgezogene Linien beschreiben die Grenzen des Temperaturanstiegs, der mit dem thermischen Aufsteigen (freie Konvektion) verbunden ist.



(b) Konturplot von  $w'p'/\rho u_*^3$ , wobei die horizontale Achse wieder ein Mittel aus mehreren Thermals darstellt. Das Konturintervall ist 10.0.



Abschätzung der Druckvarianz mittels einer Doppler-Radar-Messung (Messung der Bewegung innerhalb der ML).

# Druck Korrelation - Wellen

- Abweichungen von Mittel können sowohl durch Turbulenz als auch durch Wellen verursacht sein (siehe oben).
- Liegt ein gemessener Wert für  $\overline{w'p'}$  vor, so ist es unmöglich den Beitrag von Turbulenz und Wellen ohne weitere Informationen zu bestimmen.
- Studien der linearen Schwerewellentheorie zeigen, dass  $\overline{w'p'}$  gleich dem aufwärtsgerichteten Fluss von Wellenenergie einer vertikal propagierenden Schwerewelle in einer statisch stabilen Umgebung ist.
- Dies legt nahe, dass Turbulenzenergie an der Oberkante der ML in Form von Schwerewellen verloren gehen kann, die durch Thermals angeregt werden, die in die stabile Schicht an der Oberkante der ML eindringen.

- Der Energieverlust durch Schwerewellen ist von der Größenordnung 10% oder weniger (bezogen auf die gesamte TKE Dissipationsrate). Die resultierenden Wellen können manchmal Wolkenbildung auslösen oder Wolken (Bedeckungsgrad) vergrößern.
- Turbulenz kann auch in der stabilen nächtlichen Grenzschicht durch Wellen verloren gehen.
- Daraus kann man folgern, dass der Druckkorrelations-term nicht nur eine Umverteilung von TKE in der GS bewirkt, sondern dass Energie auch aus der GS entfernt werden kann.

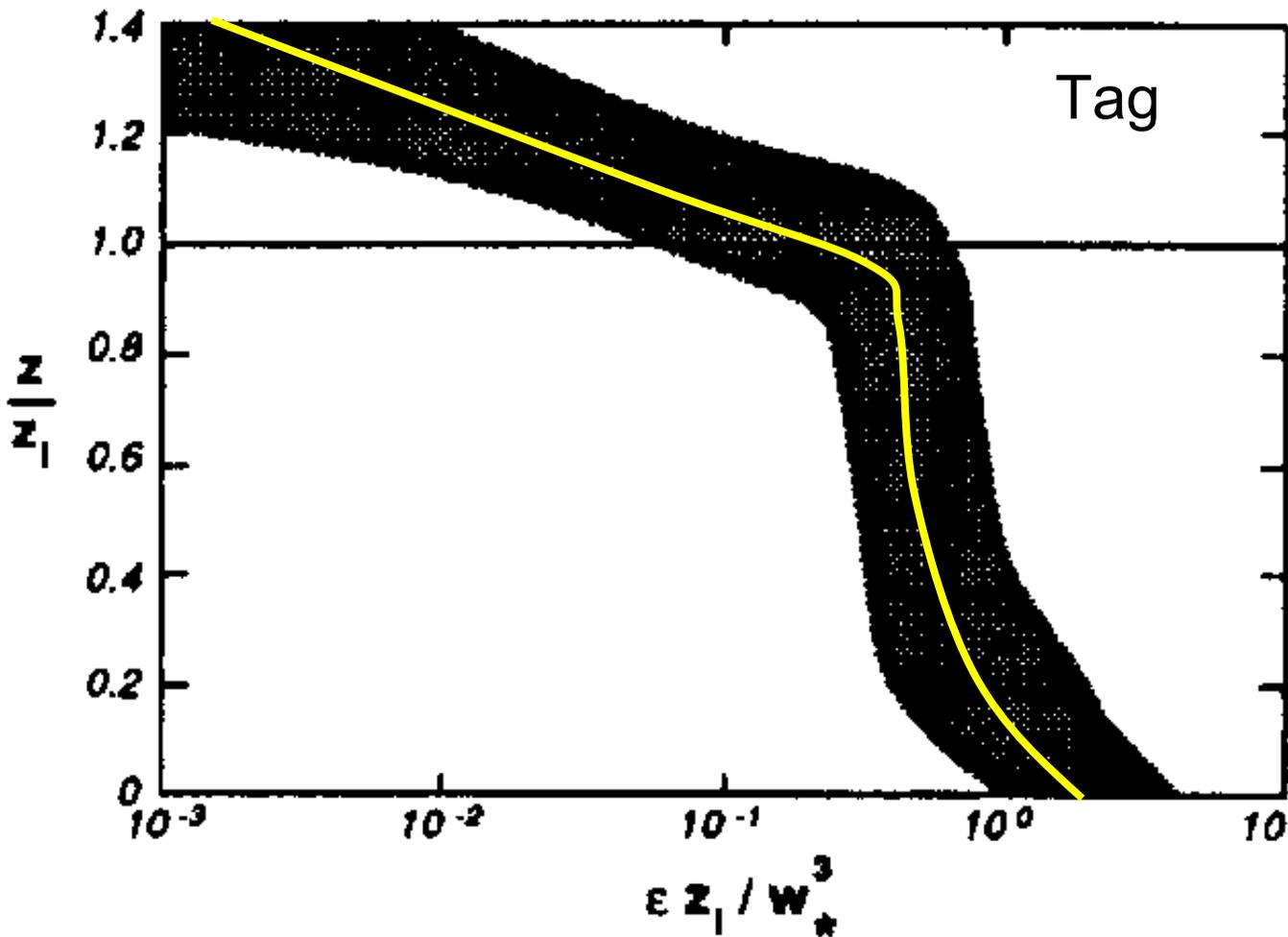
# Dissipation

## ➤ Term VII

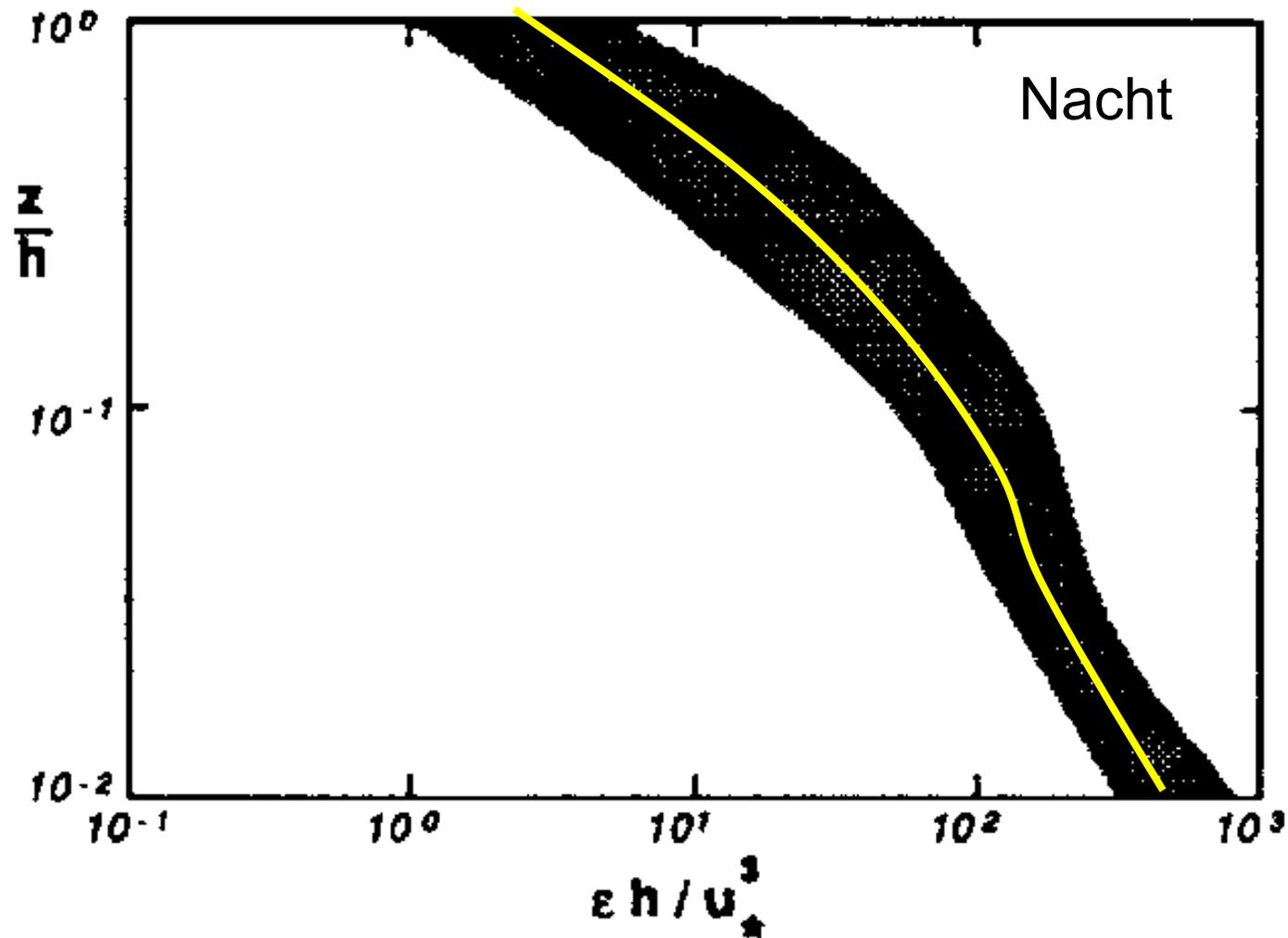
$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

VII

- Die molekulare Dissipation von turbulenten Bewegungen ist für Eddies geringster Größe am größten (Kap. 4).
- Je intensiver diese kleinskalige Turbulenz ist, desto größer ist die Dissipationsrate.
- Kleinskalige Turbulenz wiederum ist durch die Energiekaskade von größerskaligen Eddies angetrieben.
- Typische Profile sind in den folgenden Abbildungen dargestellt ⇒



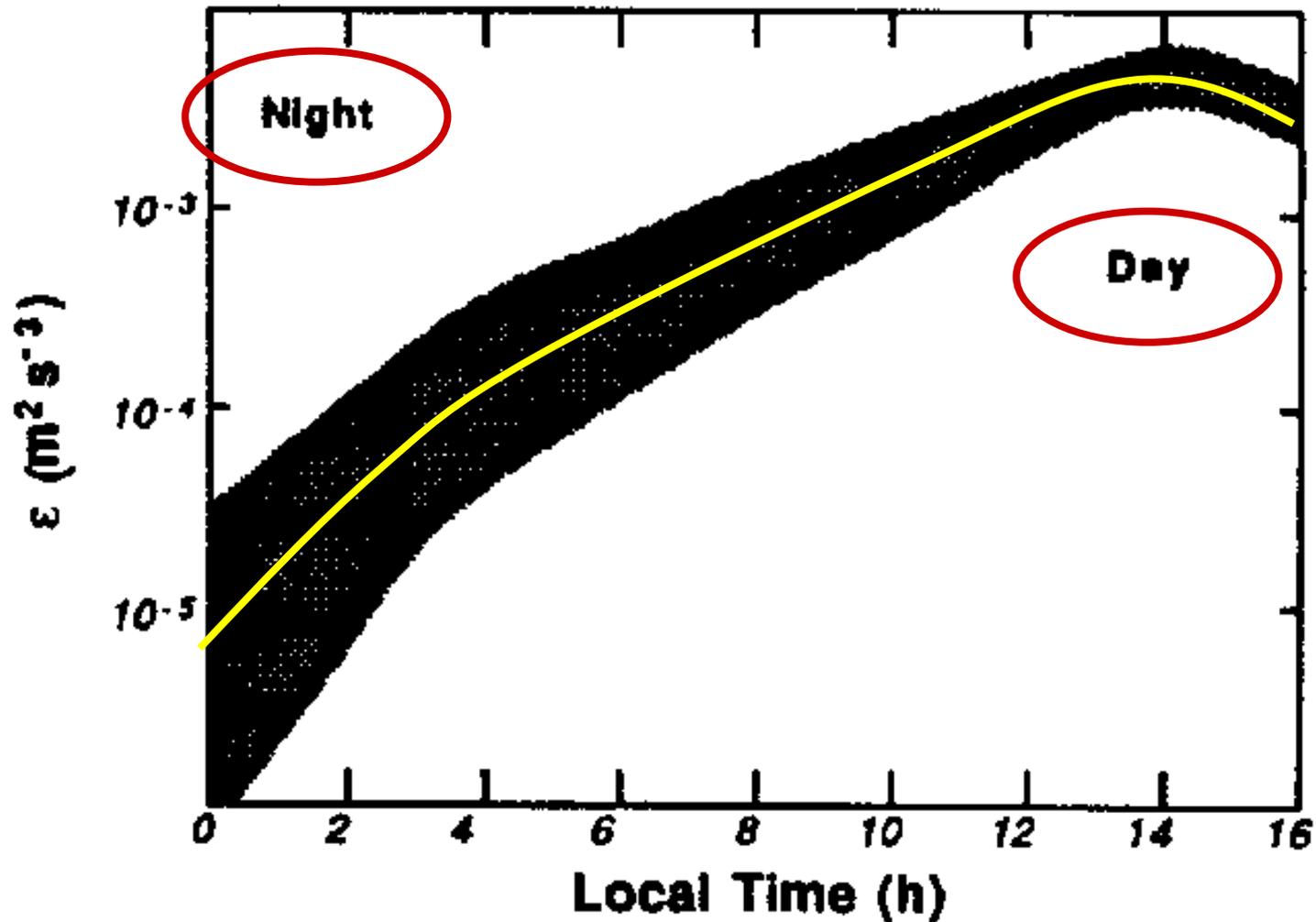
Wertebereich der normalisierten Dissipationsrate  $\epsilon$  am Tage, wobei  $z_i$  die Dicke der ML ist und  $w_*$  die konvektive Geschwindigkeitsskala.



Wertebereich der normalisierten Dissipationsrate  $\varepsilon$  in der Nacht,  
wobei  $h$  die Dicke der GS ist und  $u_*$  ( $= \sqrt{-\overline{u'w'}}$ ) die  
Reibungsgeschwindigkeit (Schubspannungsgeschwindigkeit).

# Dissipation

- Da Turbulenz nicht erhalten bleibt, findet man die größten Werte für die TKE und damit auch die größten Dissipationsraten meistens dort, wo die TKE Produktion am größten ist, also nahe der Erdoberfläche.
- Dennoch erwartet man wegen der verschiedenen Transportterme im TKE Budget nicht, dass die Dissipationsrate vollständig die Produktionsrate balanciert.
- Der enge Zusammenhang zwischen der TKE Produktionsrate, der Intensität der Turbulenz und der Dissipationsrate ist in der nächsten Abbildung dargestellt  
⇒



Beispiel für den Tagesgang der Dissipationsrate, hier von der Nacht zum Tag.

## Beispiel

- Problem: In einer Höhe von  $z = 300$  m in einer insgesamt 1000 m dicken ML wurden die folgenden Bedingungen beobachtet:

$$\overline{\partial U / \partial z} = 0.01 \text{ s}^{-1},$$

$$\overline{\theta_v} = 25^\circ\text{C},$$

$$\overline{w'\theta_v'} = 0.15 \text{ K m s}^{-1} \text{ und}$$

$$\overline{u'w'} = -0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-2},$$

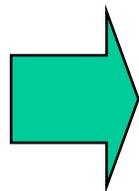
der virtuelle Wärmefluss am Erdboden ist  $0.24 \text{ K m s}^{-1}$ .

- Die Transporte durch Druckänderungen und Turbulenz seien vernachlässigt: (a) Welche Dissipationsrate ist erforderlich, um ein lokales Gleichgewicht in  $z = 300$  m zu erhalten? (b) Was sind die Werte der normalisierten TKE Terme?

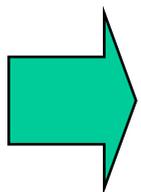
- Lösung: (a) Da keine Information gegeben wurde über die Geschwindigkeitskomponente  $v$  und auch nichts über die Scherspannung, nehmen wir an, dass die  $x$ -Achse am mittleren Wind ausgerichtet ist.  $\Rightarrow$  TKE Budget:

$$\frac{\cancel{\partial \bar{e}}}{\cancel{\partial t}} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\cancel{\partial(\overline{w'e})}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\cancel{\partial \overline{w'p'}}}{\cancel{\partial z}} - \varepsilon$$

$= 0$   $= 0$   $= 0$   
 stationär ---- gegeben ----



$$\varepsilon = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$



$$\underline{\varepsilon} = \frac{9.8}{298.15} \times 0.15 - (-0.03) \times 0.01 = \underline{5.23 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}}$$

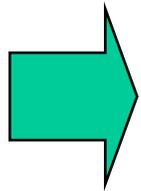
(=273.15+25)

- Lösung: (b) Um die Gleichungen zu normalisieren berechne:

$$\frac{w_*^3}{z_i} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} = 7.89 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

- Dividiere alle Terme durch diesen Wert ergibt:

$$\frac{\cancel{\partial \bar{e}}}{\cancel{\partial t}} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\cancel{\partial(\overline{w'e})}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\cancel{\partial \overline{w'p'}}}{\cancel{\partial z}} - \varepsilon$$



$$0 = 0.625 + 0.038 - 0 - 0 - 0.663$$

# Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

(Einschub: Wiederholung von Kapitel 3)

- Im Prinzip könnten diese Gleichungen direkt auf turbulente Flüsse angewendet werden, aber dies ist generell zu kompliziert.
- Um die Anfangsbedingungen zu bestimmen kann man nicht alle turbulenten Skalen herunter bis zu den kleinsten Störungen (Eddies) auflösen.
- Anstelle dessen "schneidet" man zur Vereinfachung bei einer bestimmten Eddy-Größe (Skala) ab, unterhalb derer man nur den statistischen Effekt der Turbulenz betrachtet.
- In einigen mesoskaligen und synoptisch-skaligen Modellen findet dieses "abschneiden" bei etwa 10 bis 100 km statt, während für einige GS-Modelle (bekannt als 'Large Eddy Simulation Models', LES models) bei etwa 100 m abgeschnitten wird.

# Mittlere KE und ihre Wechselwirkung mit Turbulenz

## ➤ TKE Gleichung

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

I

II

III

IV

V

VI

VII

- Man erwartet, dass die Produktion von TKE verbunden ist mit einer gleichzeitigen Abnahme der KE des mittleren Flusses (Bewegung).

→ Ableitung einer Gleichung für die KE des mittleren Flusses: Beginne mit der Gleichung für den mittleren Wind in einem turbulenten Fluss, multipliziere mit  $\bar{u}_i$ .



➤ Gleichung für die mittlere KE

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) &= \overset{\text{III}}{-g\delta_{i3} \bar{u}_i} + \cancel{\overset{\text{IV}}{f\varepsilon_{ij3} \bar{u}_i \bar{u}_j}} = 0 \quad (\text{s. Kap. 4}) \\
 &\quad - \overset{\text{V}}{\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overset{\text{VI}}{v \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} - \overset{\text{VII}}{\bar{u}_i \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}}
 \end{aligned}$$

Term VII  $\Rightarrow$

$$-\bar{u}_i \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{\text{VI}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i)}{\partial x_j}$$

= Term IV von TKE Gleichung!



## TKE Gleichung

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

## Gleichung für die mittlere KE

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) = -g\bar{w} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} +$$

$$v\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j \bar{u}_i})}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- Energie, die mechanisch als Turbulenz erzeugt wird vom mittleren Fluss gewonnen und umgekehrt.

A dramatic sunset sky with orange and yellow clouds, silhouetted utility poles, and trees. The sky is filled with horizontal bands of orange and yellow, with some darker clouds. A utility pole with three cross-arms is silhouetted against the sky. The foreground is dark, showing the silhouettes of trees and a building.

**Ende Kapitel 5 (1)**