

# Kapitel 4: Prognostische Gleichungen für turbulente Flüsse und Varianzen



# Inhalt

- Prognostische Gleichungen für turbulente Größen
- Freie Konvektion und Skalierungsvariable
- Prognostische Gleichungen für Varianzen
- Dissipation
- (Luft-) Druckstörungen
- Coriolisterm
- Vereinfachte Budgetgleichungen für die Geschwindigkeitsvarianz
- Prognostische Gleichungen für jede Komponente
- Budgetstudien
- Varianz von Feuchte und Wärme

# Prognostische Gleichungen für turbulente Größen

- Bis jetzt haben wir Bestimmungsgleichungen für mittlere Größen in turbulenten Flüssen behandelt.
- Diese Gleichungen enthalten Kovarianzen (jeweils der letzte Term, siehe oben), z.B.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\overline{\partial(u'_j u')}}{\partial x_j}$$

- Um diese Gleichungen zu nutzen kann man die Kovarianzen entweder experimentell ableiten oder man kann zusätzliche Gleichungen herleiten, um die Kovarianzen zu bestimmen.
- Im folgenden werden Bestimmungsgleichungen für variierende Größen in turbulenten Flüssen abgeleitet.

- Störungsgrößen (d.h.  $x'$ ) repräsentieren turbulente Fluktuationen, d.h. Abweichungen vom Mittelwert.
- Theoretisch könnten Bestimmungsgleichungen dieser Abweichungen für jede einzelne Windböe aufgestellt und berechnet werden, wenn man die notwendigen Anfangs- und Randbedingungen kennt.
- Leider ist die Zeitspanne, über die eine Vorhersage "genau" ist, proportional zur Lebenszeit der Störungen (Eddies):  
O(einige wenige Sek.) für die kleinsten Eddies bis zu etwa 15 Minuten für die größeren Thermals.
- Für meteorologische Anwendungen macht dies keinen Sinn.
- Stattdessen leitet man weitere prognostische Gleichungen als einen Zwischenschritt ab, um die Bestimmungsgleichungen für Varianzen und Kovarianzen von Variablen zu finden.

# Impulsgleichung

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j \\ - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

und

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}} \quad \textcircled{2}$$

Nehme

1

-

2



# Impulsgleichung

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für eine turbulente Windböe  $u'_i$ .

Genauso für die (gesamte) spezifische Feuchte:

$$\frac{\partial q'_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} = \nu_q \frac{\partial^2 q'_T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

Für Wärme (pot. Temperatur):

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \theta'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial Q_j^{*'}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial (u'_j \theta')}{\partial x_j}}$$

Für eine skalare Größe:

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2} + S_c \overline{\frac{\partial (u'_j c')}{\partial x_j}}$$

Man kann diese Bestimmungsgleichungen nutzen, um Bestimmungsgleichungen für die Varianzen zu erhalten.

# Skalierungsvariable für die freie Konvektion

- Bis jetzt haben wir Bestimmungsgleichungen für mittlere Größen in turbulenten Flüssen erhalten.
- Diese Gleichungen schließen Kovarianzen ein, z.B.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\partial (\overline{u'_j u'})}{\partial x_j}$$


- Nun leiten wir Bestimmungsgleichungen für fluktuierende Größen in turbulenten Flüssen her.
- Bevor die Gleichungen für Varianzen und Flüsse hergeleitet werden, muss man einen kleinen Umweg machen, um zu lernen, wie experimentelle Daten zur Darstellung skaliert werden. Dann kann man anhand von Fallbeispielen Daten finden, die zu den entwickelten Gleichungen passen.

- In Kapitel 1 haben wir gelernt, dass Turbulenz zum einen durch starke (engl. buoyant) Konvektion produziert werden kann, z.B. durch Thermals warmer aufsteigender oder kalter absteigender Luft, zum anderen aber auch durch mechanische Prozesse, d.h. Windscherung.
- Manchmal dominiert ein Prozess.
- Wenn starke Konvektionsprozesse in der GS dominieren, spricht man davon, dass sich die GS in einem Zustand freier Konvektion (engl. free convection) befindet.
- Wenn mechanische Prozesse dominieren spricht man davon, dass sich die GS in einem Zustand erzwungener Konvektion (engl. forced convection) befindet.

- Freie Konvektion beobachtet man in der Regel über Land an klaren, sonnigen Tagen mit schwachem Wind.
- Erzwungene Konvektion beobachtet man an bedeckten Tage mit stärkeren Winden.
- Im folgenden konzentrieren wir uns auf Skalen der freien Konvektion - Skalen der erzwungenen Konvektion wurden bereits in Kapitel 2 diskutiert.

- Im Zustand der freien Konvektion verursacht starke solare Heizung am Erdboden einen ausgeprägten Tagesgang der Turbulenz sowie der Dicke der Mischungsschicht.
- Profile der Wärme- und Feuchteflüsse können dimensionslos gemacht werden, um den Tagesgang zu eliminieren. So werden zum Beispiel die resultierenden Wärmeflussprofile als Bruchteile von Oberflächenflüssen dargestellt, die Höhe als Bruchteil der Dicke der ML:  $h=z/z_i$  (Beispiele in Stull, Abschnitt 3.6).
- Ein ähnliches Vorgehen ist hilfreich, um bei der Bestimmung der relativen Anteile von den verschiedenen Termen in den Varianz- und Flussgleichungen die nicht-stationären Effekte zu beseitigen.
- Einige der geeigneten Skalierungsvariablen für die freie Konvektion werden nun kurz behandelt.

- Längenskala (-maß): Thermals steigen auf, bis sie eine stabile Schicht erreichen, die die ML bedeckt (capping inversion).  $\Rightarrow$  Die Größe der Thermals (eines Thermal) skaliert die Höhe der ML ( $= z_i$ ).
- Thermals sind die dominanten Eddies in der konvektiven GS und alle kleineren Eddies geben ihre Energie an die größeren Eddies ab.  
 $\Rightarrow$  deshalb nehmen wir an, dass in konvektiven Situationen viele turbulente Prozesse die Dicke der ML ( $z_i$ ) bestimmen ('skalieren').

- Geschwindigkeitsskala (-maß): Der ausgeprägte Tagesgang der solaren Heizung verursacht einen starken Wärmefluss von der Erdoberfläche in die Atmosphäre.
- Der Auftrieb, der mit diesen Flüssen verbunden ist, treibt die Thermals an.
- Man kann einen Fluss durch den Auftrieb definieren als:

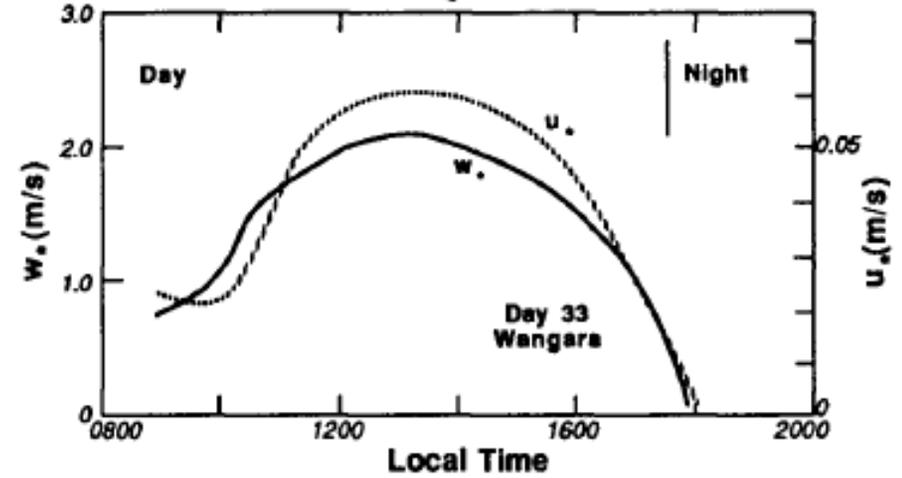
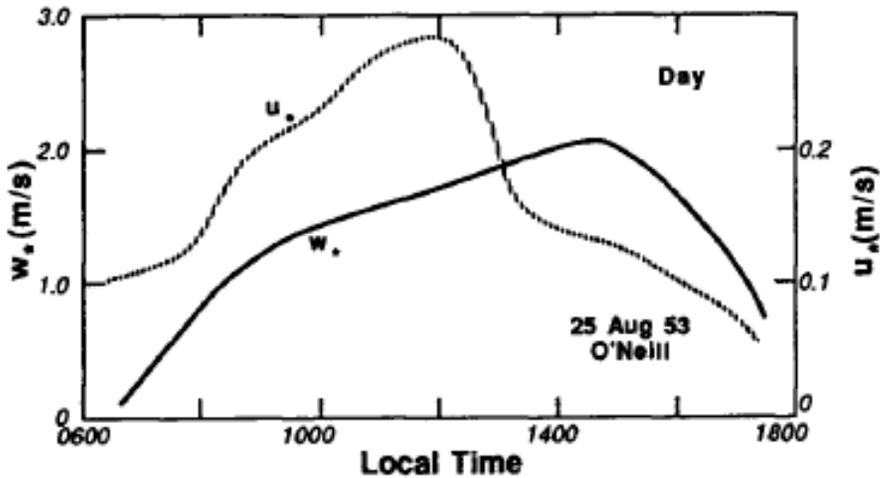
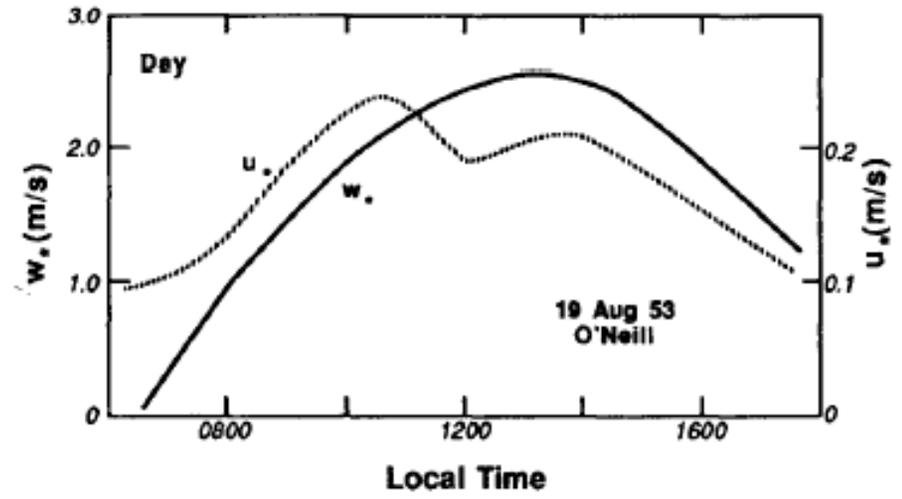
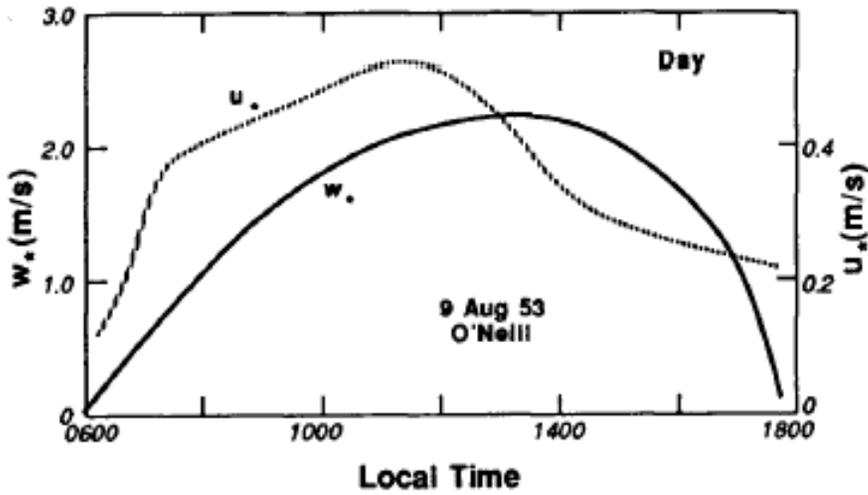
$$\frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v}$$

- Obwohl dieser 'Auftriebsfluss' direkt als Skalierungsvariable benutzt werden könnte, ist es gebräuchlicher, eine Geschwindigkeitsskalierung einzuführen, die die beiden wichtigsten Variablen für die freie Konvektion verwendet: den Auftriebsfluss am Erdboden und die Dicke der ML  $z_i$ .
- Die Kombination dieser Variablen ergibt ein Maß für die Geschwindigkeit, die Skalierungsgeschwindigkeit der freien Konvektion  $w_*$ ; sie wird auch die konvektive Geschwindigkeitsskala genannt:

$$w_* = \left[ \frac{gz_i}{\theta_v} \left( \overline{w'\theta'_v} \right)_s \right]^{1/3}$$

← s = surface

- Es stellt sich heraus, dass dieses Maß geeignet ist; zum Beispiel ist die Größe der vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen in Thermals von der gleichen Größenordnung wie  $w_*$ . Für dickere ML, mit kräftiger Heizung am Erdboden, kann  $w_*$  in der Größe von 1 bis 2 m s<sup>-1</sup> sein.



Beispiele von Variationen der Reibungsgeschwindigkeit und der konvektiven Geschwindigkeitsskala mit der Zeit.

- Zeitskala: Kombination von Längen- und Geschwindigkeitsskala ergibt die Zeitskala  $t_*$  für die freie Konvektion:

$$t_* = z_i / w_*$$

- Die Zeitskala hat eine Größenordnung von 5 bis 15 Minuten, d.h. entspricht ungefähr der Zeit die ein Luftpaket benötigt, um in einer Mischungsschicht von unten bis zu ihrer Oberkante zu gelangen.
- Ähnlich Skalierungen lassen sich für die Temperatur und die Feuchte durchführen (siehe Stull Seite 120).

# Prognostische Gleichungen für Varianzen

## ➤ Varianz des Impulses

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} =$$

$$\varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

Multiplikation mit  $2u'_i$  (Anwendung der Produktregel)  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u_i'^2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + 2u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} =$$

$$\varepsilon_{ij3} 2f u'_i u'_j - 2 \frac{u'_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\delta_{i3} g u'_i \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + 2v u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} = 2u'_i \overline{\frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

# Prognostische Gleichungen für Varianzen

- Zeitliche Mittelung und Reynolds Regeln anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}} = \\ \varepsilon_{ij3} 2f \overline{u_i' u_j'} - 2 \frac{\overline{u_i' \partial p'}}{\bar{\rho} \partial x_i} + 2\delta_{i3} g u_i' \frac{\theta'_v}{\theta_v} + 2\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \cancel{2u_i' \frac{\partial(u_i' u_j')}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

= (4.3.1a) in Stull

- Diese generelle Form der prognostischen Gleichung für die Varianz der Windgeschwindigkeit wird üblicherweise weiter vereinfacht, bevor sie zur Bestimmung der GS-Flüsse benutzt wird.

# Dissipation

Stull S. 121: Consider a term of the form  $\overline{\partial^2(u_i'^2)/\partial x_j^2}$ . Using simple rules of calculus, we can rewrite it as:

$$\frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2 \overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) = 2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + 2 \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} =$$

$$2 \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} + 2 \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}$$

If we multiply the last term above by  $v$ , then it would be identical to the last term in (4.3.1a). Thus, we can write the last term in (4.3.1a) as

$$2v \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = v \overline{\frac{\partial^2 (u_i'^2)}{\partial x_j^2}} - 2v \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2}$$

## Dissipation (2)

$$2\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 (\overline{u_i'^2})}{\partial x_j^2} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \quad (4.3.1b)$$

The first term on the right, which physically represents the molecular diffusion of velocity variance, contains the curvature of a variance. The variance changes fairly smoothly with distance within the boundary layer, its curvature being on the order of  $10^{-6} \text{ s}^{-2}$  in the ML to  $10^{-2} \text{ s}^{-2}$  in the SL. When multiplied by  $\nu$ , the first term ranges in magnitude between  $10^{-11}$  and  $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

The last term on the right can be much larger. For example, if the eddy velocity changes by only 0.1 m/s across a very small size eddy (for example, 1 cm in diameter), then the instantaneous shear across that eddy is  $10 \text{ s}^{-1}$ . For smaller size eddies, the shear is larger. When this value is squared, averaged, and multiplied by  $2\nu$ , the magnitudes observed in the turbulent boundary layer range between about  $10^{-6}$  and  $10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ . Typical values in the ML are on the order of  $10^{-4}$  to  $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ , while in the surface layer, values on the order of  $10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  can be found. Thus, we can neglect the first term on the right and use:

## Dissipation (3)

Vernachlässigung des ersten Terms auf der rechten Seite:

$$2\nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = \nu \overline{\frac{\partial^2 (u_i'^2)}{\partial x_j^2}} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$

$$2\nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} \equiv -2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \quad (4.3.1c)$$

The *viscous dissipation*,  $\epsilon$ , is defined as:

$$\epsilon = +\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$

It is obvious that this term is always positive, because it is a squared quantity. Therefore, when used in (4.3.1a) with the negative sign as required by (4.3.1c), it is always causing a decrease in the variance with time. That is, it is always a loss term. In addition, it becomes larger in magnitude as the eddy size becomes smaller. For these small eddies, the eddy motions are rapidly damped by viscosity and irreversibly converted into heat. [This heating rate is so small, however, that it has been neglected in the heat conservation equation (3.4.5b).]

# Druck Störungen

Using the product rule of calculus again, the pressure

term  $-2 \overline{(u_i' / \bar{\rho}) \partial p' / \partial x_i}$  in (4.3.1a) can be rewritten as

$$-2 \overline{\left( \frac{u_i'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = - \left( \frac{2}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial \overline{(u_i' p')}}{\partial x_i} + \underbrace{2 \left( \frac{p'}{\bar{\rho}} \right) \left[ \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right]}$$

The last term is called the pressure redistribution term. The factor in square brackets consists of the sum of three terms:  $\partial u' / \partial x$ ,  $\partial v' / \partial y$ , and  $\partial w' / \partial z$ . These terms sum to zero because of the turbulence continuity equation (3.4.2c); hence, the last term in the equation above does not change the total variance (by total variance we mean the sum of all three variance components). But it does tend to take energy out of the components having the most energy and put it into components with less energy. Thus it makes the turbulence more isotropic, and is also known as the return-to-isotropy term.

Terms like  $\partial u' / \partial x$  are larger for the smaller size eddies. Thus, we would expect that smaller size eddies are more isotropic than larger ones. As we shall see later, this is indeed the case in the boundary layer.

## Druck Störungen (2), Coriolis term

The end result of this analysis is that:

$$-2 \overline{\left( \frac{u_i'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \equiv - \left( \frac{2}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{u_i' p'})}{\partial x_i} \quad (4.3.1e)$$

**Coriolis Term.** The Coriolis term  $2f_c \epsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'}$  is identically zero for velocity variances, as can be seen by performing the sums implied by the repeated indices:

$$\begin{aligned} 2f_c \epsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} &= 2f_c \epsilon_{213} \overline{u_2' u_1'} + 2f_c \epsilon_{123} \overline{u_1' u_2'} \\ &= -2f_c \overline{u_2' u_1'} + 2f_c \overline{u_1' u_2'} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.1f)$$

because  $\overline{u_1' u_2'} = \overline{u_2' u_1'}$  (see section 2.9.2). Many of the terms in the above sum were not written out because the alternating unit tensor forced them to zero.

## Coriolis term (2)

Physically, this means that Coriolis force can not generate turbulent kinetic energy.

Kinetic energy enters the picture because the variance  $\overline{u_i'^2}$  is nothing more than twice the turbulence kinetic energy per unit mass. The Coriolis term merely redistributes energy from one horizontal direction to another. Furthermore, the magnitude of the redistribution term  $2f_c \overline{u_1' u_2'}$  is about three orders of magnitude smaller than the other terms in (4.3.1a). For that reason, the Coriolis terms are usually neglected in the turbulence variance and covariance equations, even for the cases where they are not identically zero.

# Vereinfachte Geschwindigkeitsvarianz Budgetgleichungen

$$\frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2\delta_{i3}g \frac{\overline{u_i'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{u_i'u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i'^2 u_j'}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon$$

I                      II                      III                      IV                      V                      VI                      VII

- Term I**    Änderungsrate der Varianz
- Term II**    Advektion der Varianz durch den mittleren Wind
- Term III**    Produktions-/Verlustterm, abhängig vom Vorzeichen des Auftriebsflusses
- Term IV**    Produktionsterm. Der Impulsfluss ist normalerweise negativ in der GS, da Impuls an der Erdoberfläche verloren geht; deshalb ergibt sich ein positiver Beitrag zur Varianz, wenn mit einem negativen Vorzeichen multipliziert wird.

Terme V - VII

# Vereinfachte Geschwindigkeitsvarianz Budgetgleichungen

$$\frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2\delta_{i3}g \frac{\overline{u_i'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{u_i'u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i'^2 u_j'}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon$$

I                      II                      III                      IV                      V                      VI                      VII

**Term V** Turbulenter Transportterm. Er beschreibt wie die Varianz durch turbulente Eddies verändert wird.

**Term VI** Beschreibt, wie die Varianz durch Druckstörungen verändert wird. Steht oft im Zusammenhang mit Schwerewellen oder Auftrieb.

**Term VII** Beschreibt die viskose Dissipation der Geschwindigkeitsvarianz mit

$$\varepsilon = +\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$

# Prognostische Gleichungen separat für jede einzelne Komponente

- Man kann die Bestimmungsgleichungen auch für jede einzelne Komponente der Geschwindigkeitsvarianz aufstellen, wenn man die Summationsregeln in Bezug auf sich wiederholende Indizes etwas lockert : z.B. wähle  $i = 2$  für eine Gleichung für  $\overline{v'^2}$ .
- Alle anderen sich wiederholende Indizes wie  $j$  besagen weiterhin, dass es sich um eine Summe handelt. Zur Erinnerung sei gesagt, dass wir die Terme, die vorher wegen Anisotropie vernachlässigt wurden, wieder berücksichtigen müssen.



Vollständiger Satz von Gleichungen

# Prognostische Gleichungen separat für jede einzelne Komponente

$$\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{u'u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'p'}}{\partial x} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right)^2}$$

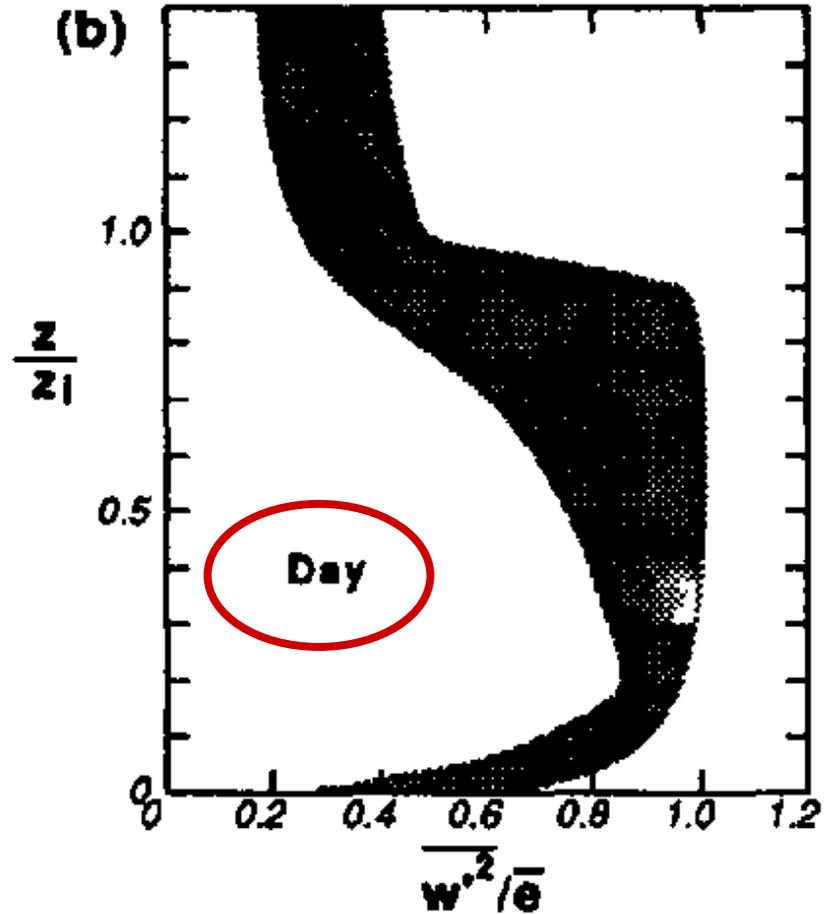
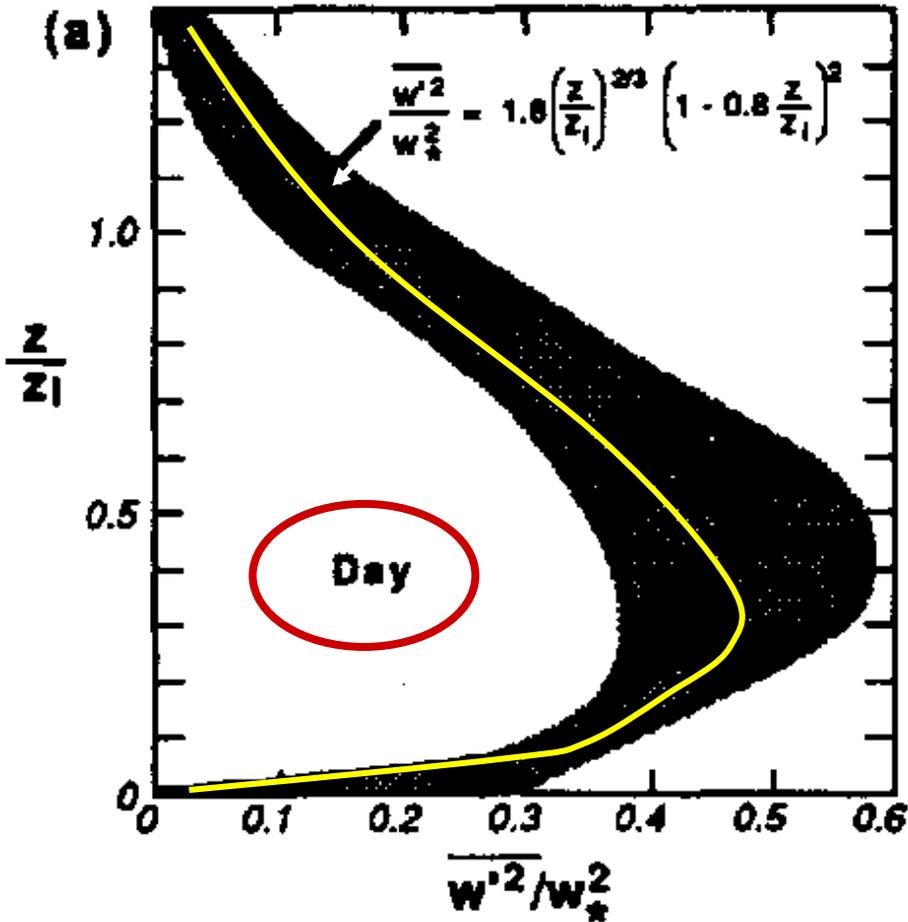
$$\frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{v'u'_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial v'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{v'p'}}{\partial y} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial x_j} \right)^2}$$

$$\frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial x_j} = 2g \frac{\overline{w'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{w'u'_j} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial w'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial x_j} \right)^2}$$

Die meisten Terme haben die gleiche Bedeutung wie vorher.  
— repräsentiert die Druckumverteilung, verbunden mit der Rückkehr zu isotropen Verhältnissen.

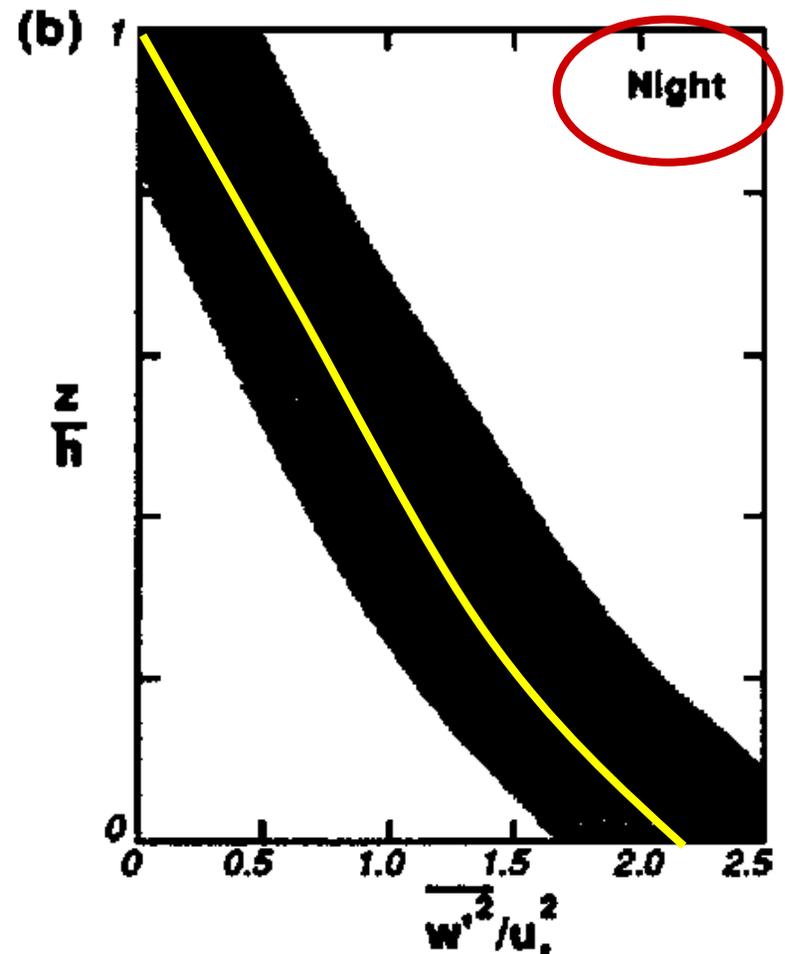
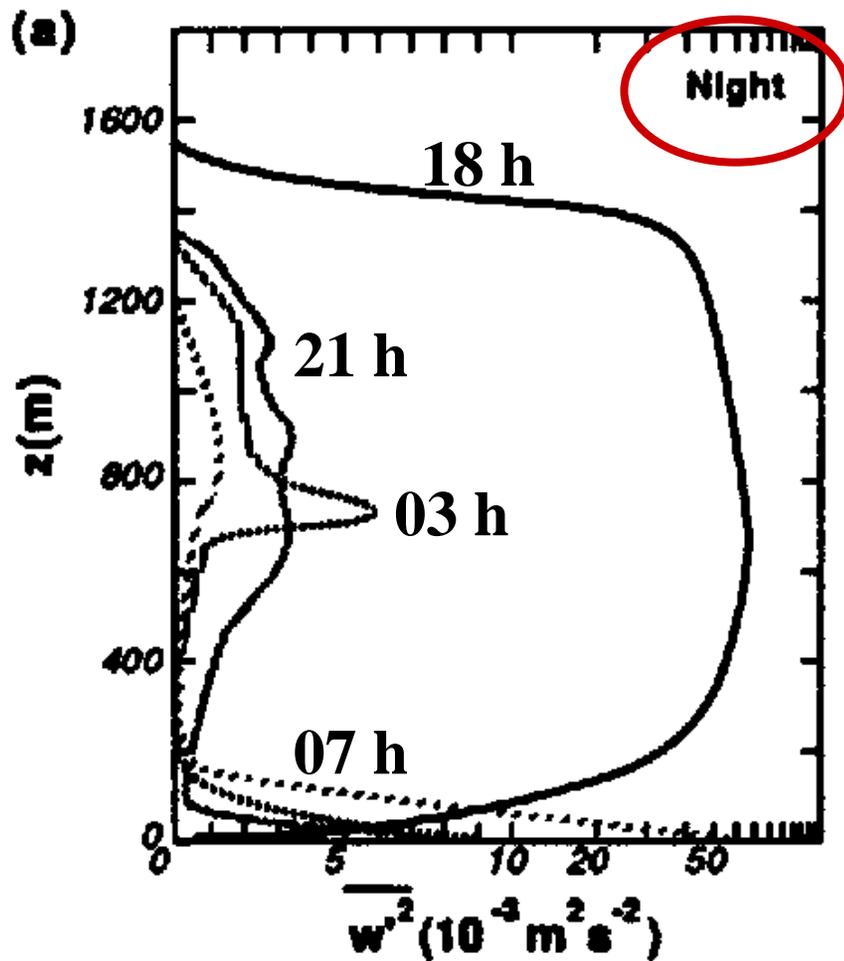
# Budgetstudien

- Mit Budgetstudie bezeichnet man die Überprüfung des Beitrags von jedem einzelnen Term einer Bestimmungsgleichung.
- Einige Terme sind sehr schwierig zu messen, weshalb man sich auch numerischer Simulationen bedient.
- In Budgetstudien, die im folgenden beschrieben werden, kombiniert man Daten von Feldexperimenten und numerischen Studien.
- In den meisten Fällen streuen die experimentell ermittelten Daten sehr viel mehr als die der Simulationen.



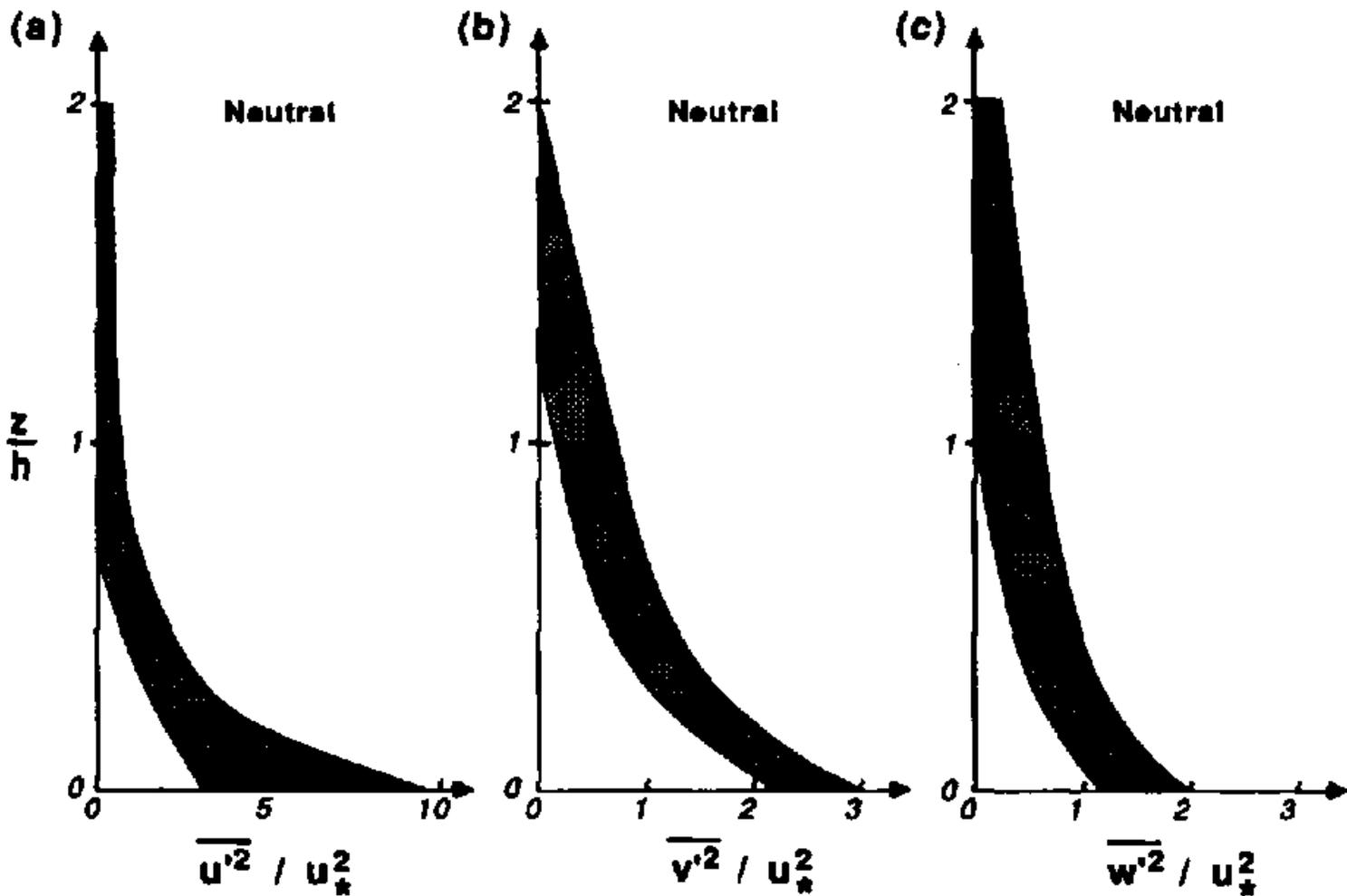
(a) Variation der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit mit der Höhe am Tage. Bereich der gemessenen und modellierten Werte ist schattiert.

(b) Rate der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit zur mittleren turbulenten kinetischen Energie ( $\bar{e} = \text{TKE}/\text{m}$ ).

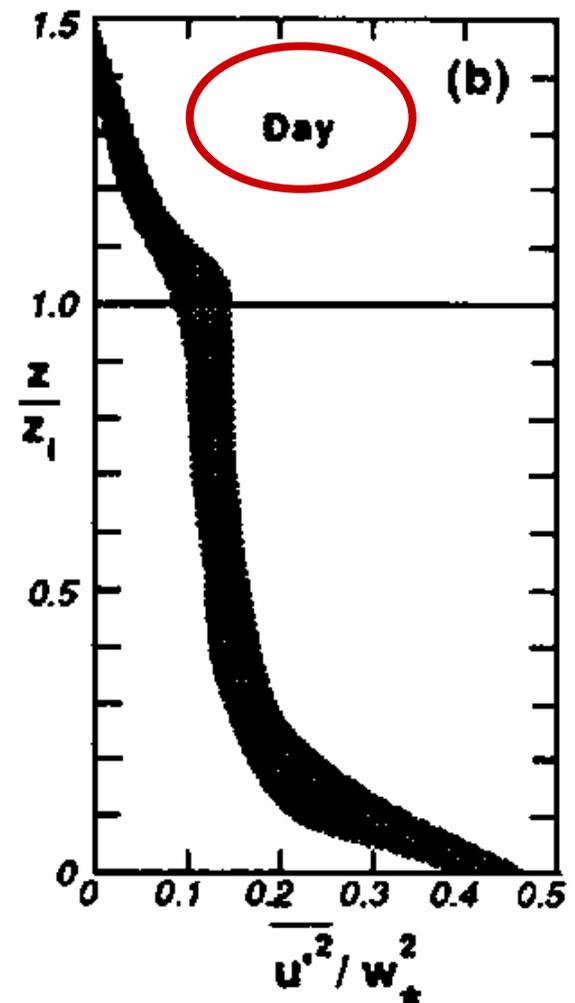
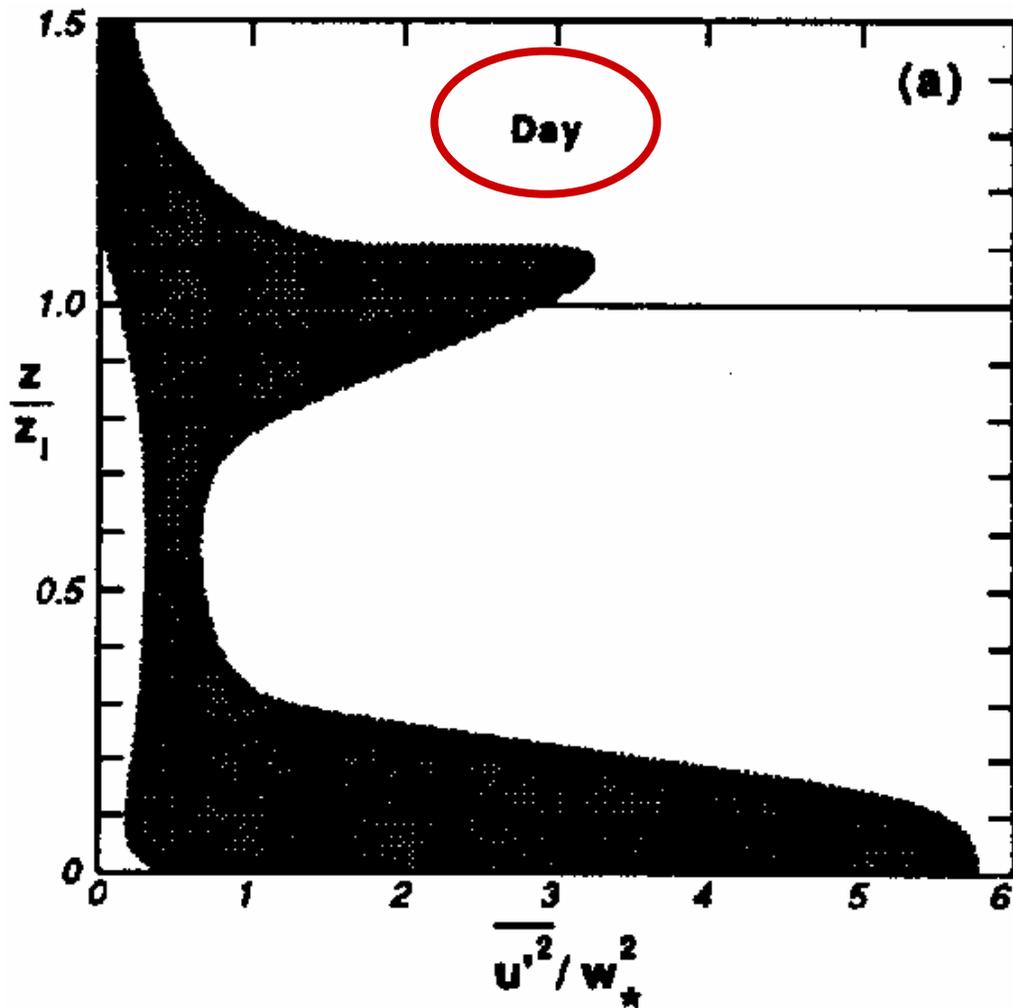


(a) Beispiele für modellierte Profile der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit während der Nacht. Beachte: Abszisse ändert sich von linear zu logarithmisch bei 10.

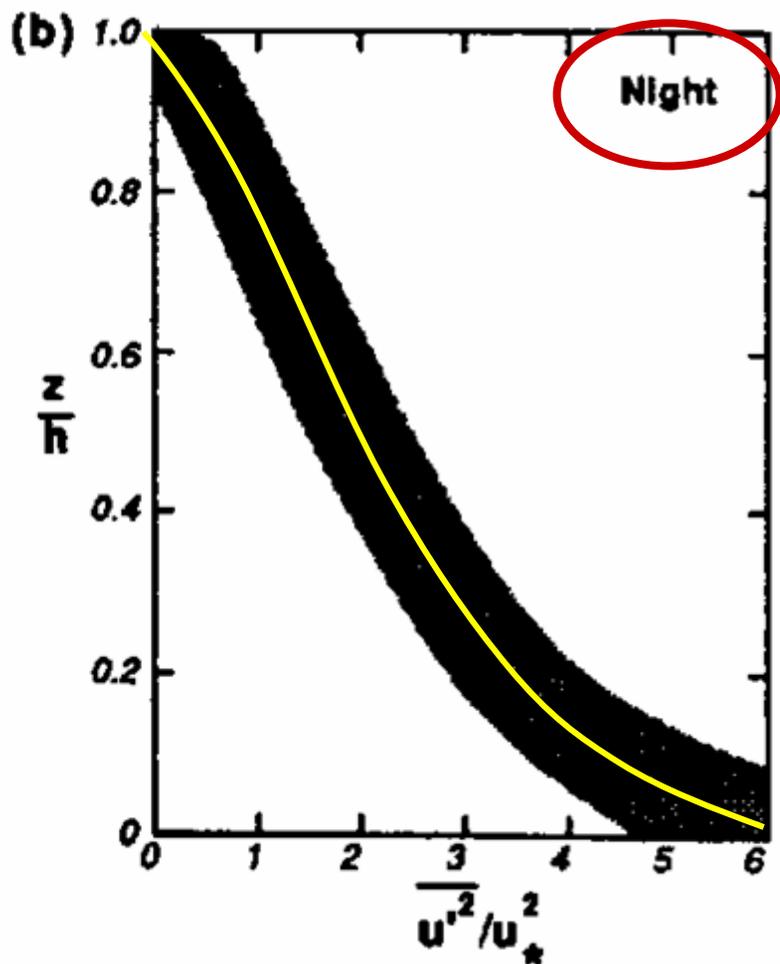
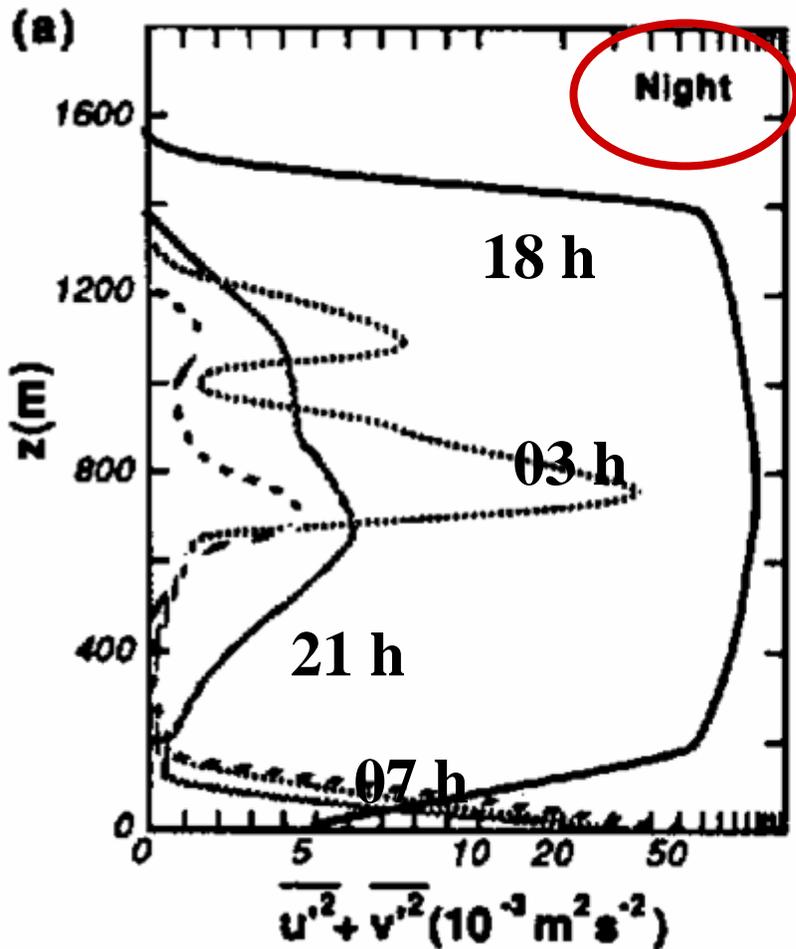
(b) Bereich der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit, hier normalisiert mit der Reibungsgeschwindigkeit, als Funktion der Höhe (normalisiert mit einem Maß für die Dicke der stabilen GS,  $h$  - siehe nächste Seite).



Normalisierte Varianz der Geschwindigkeit gegen die Höhe in einem statisch neutralen Zustand, wobei  $h$  ( $\approx 2$  km) die Höhe ist, in der  $\bar{v}$  gleich Null ist. Ergebnisse basierend auf Simulationen großer Eddies (engl. large-eddy simulation, LES) mit  $u_g = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_g = 0$ , and  $u_* = 0.4 \text{ m s}^{-1}$ .



- (a) Bereich der Varianz der horizontalen Geschwindigkeit normalisiert durch die konvektive Geschwindigkeitsskala  $w_*^2$ , gegen die dimensionslose Höhe  $z/z_1$ , für typische Bedingungen mit gleichzeitiger Konvektion und Windscherung.
- (b) Idealisierter Bereich für freie Konvektion ohne Scherung.



- (a) Modellierte Profile der horizontalen Eddy-kinetischen Energie während einer Nacht. Beachte: Abszisse ändert sich von linear zu logarithmisch bei 10.
- (b) Bereich der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit, normalisiert mit einem Maß für die Dicke der stabilen GS,  $h$  - siehe oben).

# Varianz der Feuchte

Im folgenden wird nur der Wasserdampfanteil der spezifische Feuchte in der Bestimmungsgleichung betrachtet!

Multiplikation der entsprechenden Gleichung (siehe oben) mit  $2q'$  und Anwendung der Produktregel ergibt:

$$2q' \times \frac{\partial q'}{\partial t} + \dots = \dots$$

$$\frac{\partial q'^2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j} + 2q'u'_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j} = 2q'v_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2} + 2q' \frac{\partial \overline{u'_j q'}}{\partial x_j}$$

mit  $v_q$  der kinematischen Viskosität für Wasserdampf.

# Varianz der Feuchte

Nächster Schritt, Mittelung und Reynolds Regeln der Mittelung anwenden:

$$\frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j}} = \overline{2q'v_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2}}$$

Um diese Gleichung wieder in Flussform zu erhalten, addiert man die mit  $q'^2$  multiplizierte mittlere turbulente Kontinuitätsgleichung (d.h. addiert  $\overline{q'^2 \partial u'_j / \partial x_j} = 0$ ) und sortiert etwas um:

$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} + \underline{2v_q \overline{q' \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2}}}$$

Wie vorher schon für den Impuls spaltet man den letzten Term in zwei Terme auf, wovon einer (die molekulare Diffusion der Varianz der spezifischen Feuchte) klein genug ist, um vernachlässigt zu werden. Der verbleibende Term ist definiert als der doppelte molekulare Diffusionsterm  $\varepsilon_q$ , analog zum Impuls:

$$\varepsilon_q = v_q \overline{\left( \frac{\partial q'}{\partial x_j} \right)^2}$$

Die Bestimmungsgleichung für die Varianz der spezifischen Feuchte ist somit:

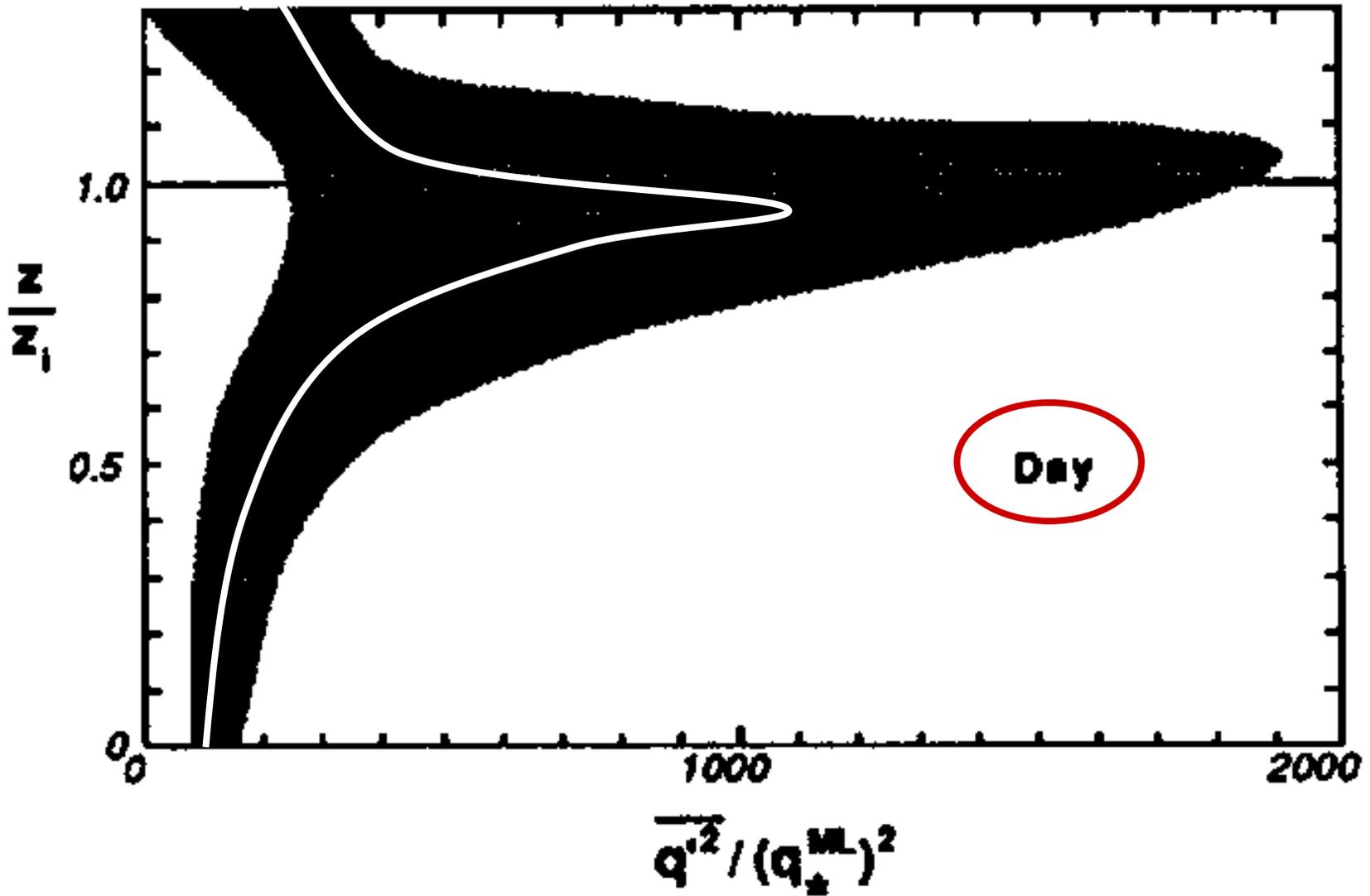
$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_q$$

Interpretation 

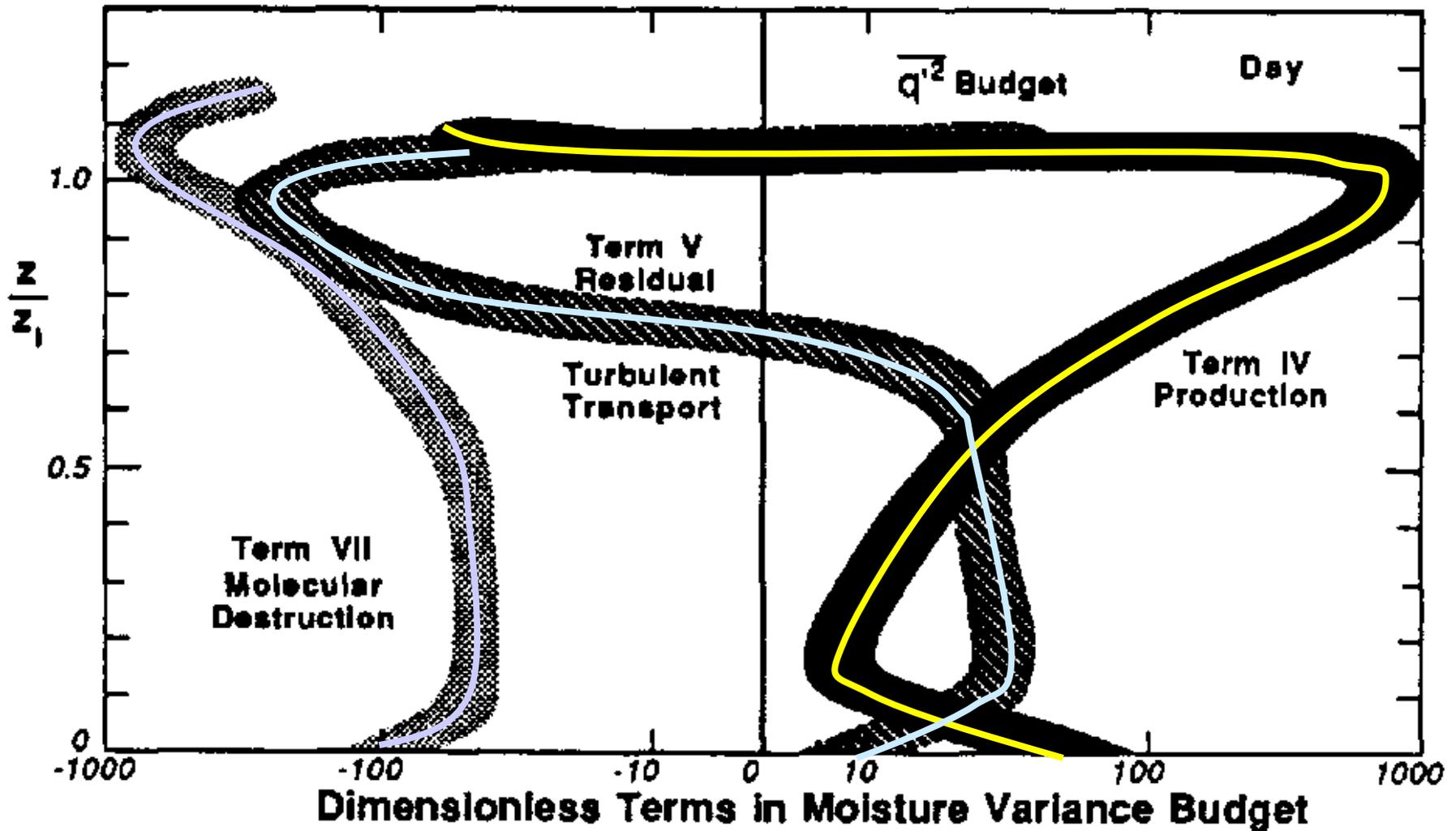
$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_q$$

I
II
IV
V
VII

- Term I**    Änderungsrate der Varianz der spezifische Feuchte
- Term II**    Advektion der Varianz der spezifischen Feuchte durch den mittleren Wind
- Term IV**    Produktionsterm verbunden mit der turbulenten Bewegung der sich bei einem mittleren Feuchtegradient einstellt
- Term V**    turbulenter Transport der Feuchtevarianz
- Term VII**    molekulare Dissipation (d.h. Verlustrate der Feuchtevarianz durch molekulare Prozesse).



Beispiel für ein modelliertes vertikales Profil der dimensionslosen Varianz der spezifischen Feuchte.  
 (siehe oben:  $q_*^{ML} = -w'q' / w_*$ , Skala der spez. Feuchte in der ML)



Beispiel für modellierte vertikale Profile der einzelnen Terme in der Bestimmungsgleichung für die Varianz der spezifischen Feuchte:  
 Vergleich der Größenordnung.

# Varianz der Wärme (potentielle Temperatur)

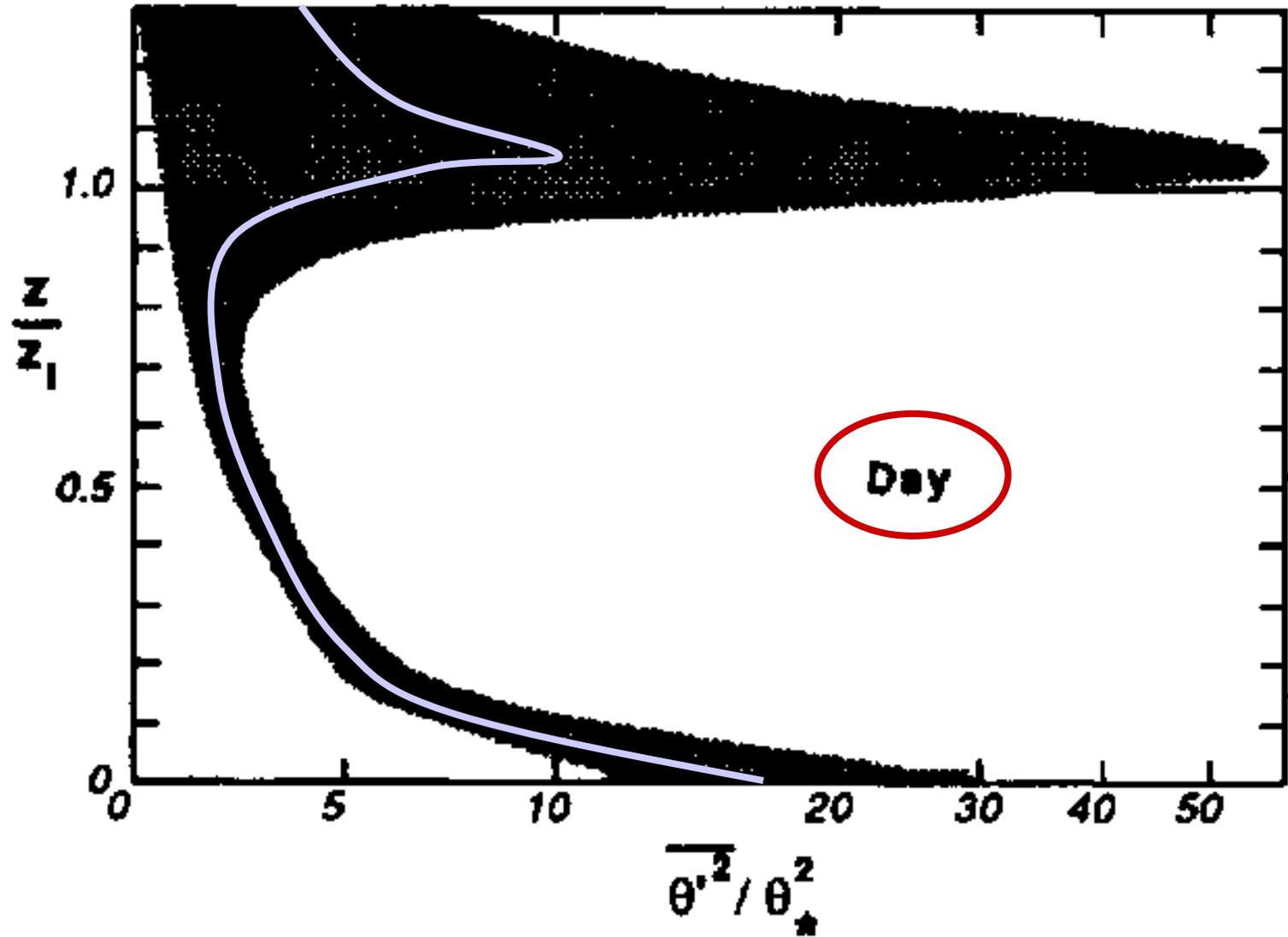
**Budget Equations.** As was done with the moisture equation, start with (4.1.3), multiply by  $2\theta'$ , use the product rule of calculus, Reynolds average, put into flux form, neglect molecular diffusion but retain the molecular dissipation, and rearrange to yield:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} & = & -2\overline{\theta'u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} & - & \overline{\frac{\partial u'_j \theta'^2}{\partial x_j}} & - & 2\varepsilon_\theta & - & \frac{2}{\bar{\rho}c_p} \overline{\theta' \frac{\partial Q'_j}{\partial x_j}} \\
 \text{I} & & \text{II} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VII} & & \text{VIII}
 \end{array}$$

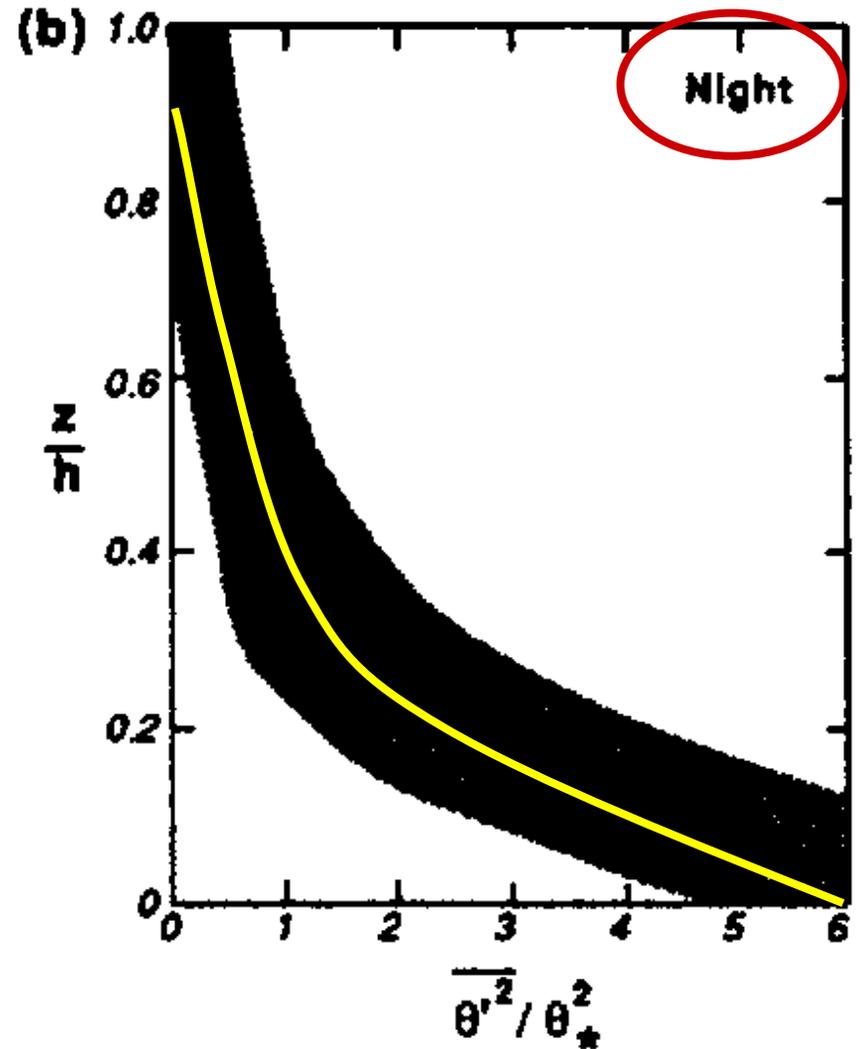
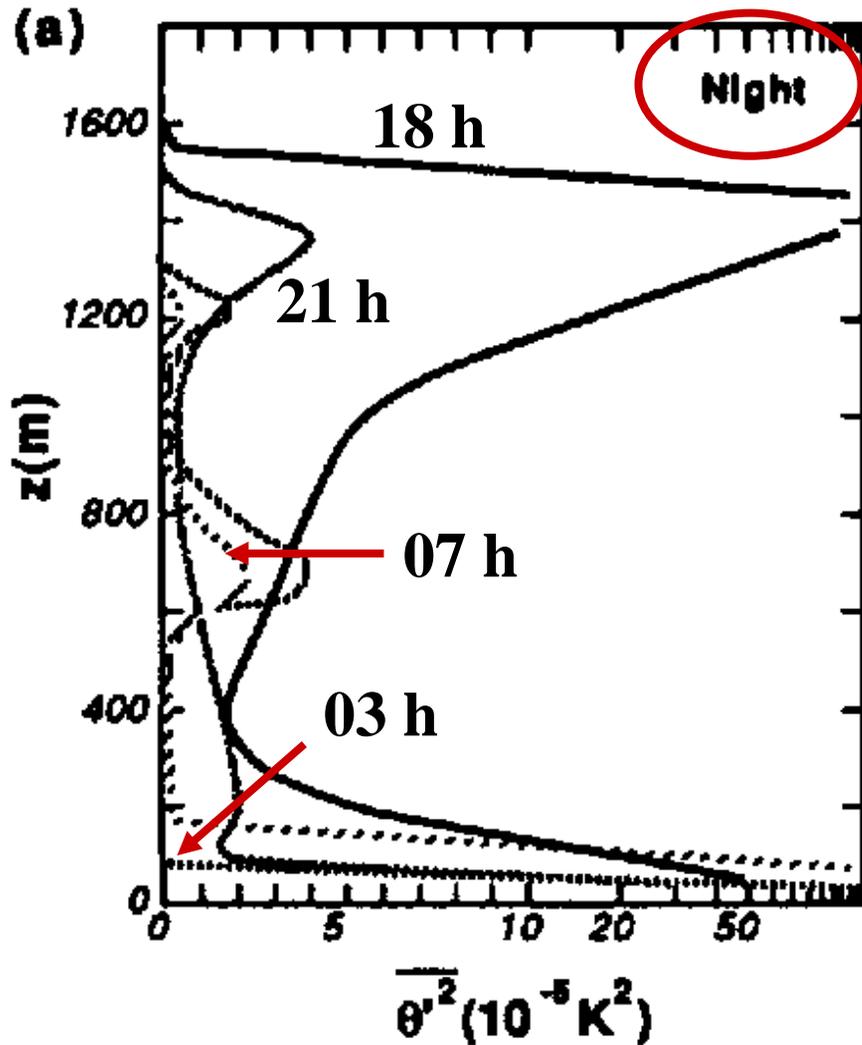
The terms above have physical representations analogous to those in (4.3.2). Term VIII is the radiation destruction term (sometimes given the symbol  $\varepsilon_R$ ). It is difficult to measure this term directly, but sometimes it is modeled as  $\varepsilon_R \equiv (0.036 \text{ m/s}) \cdot \overline{\theta'^2} / \bar{e}^{3/2}$ , where  $\varepsilon_R$  is about 1% to 10% of  $\varepsilon_\theta$  (Coantic and Simonin, 1984).

$\varepsilon_R$  : Verlustrate der Temperaturvarianz durch Strahlungsprozesse

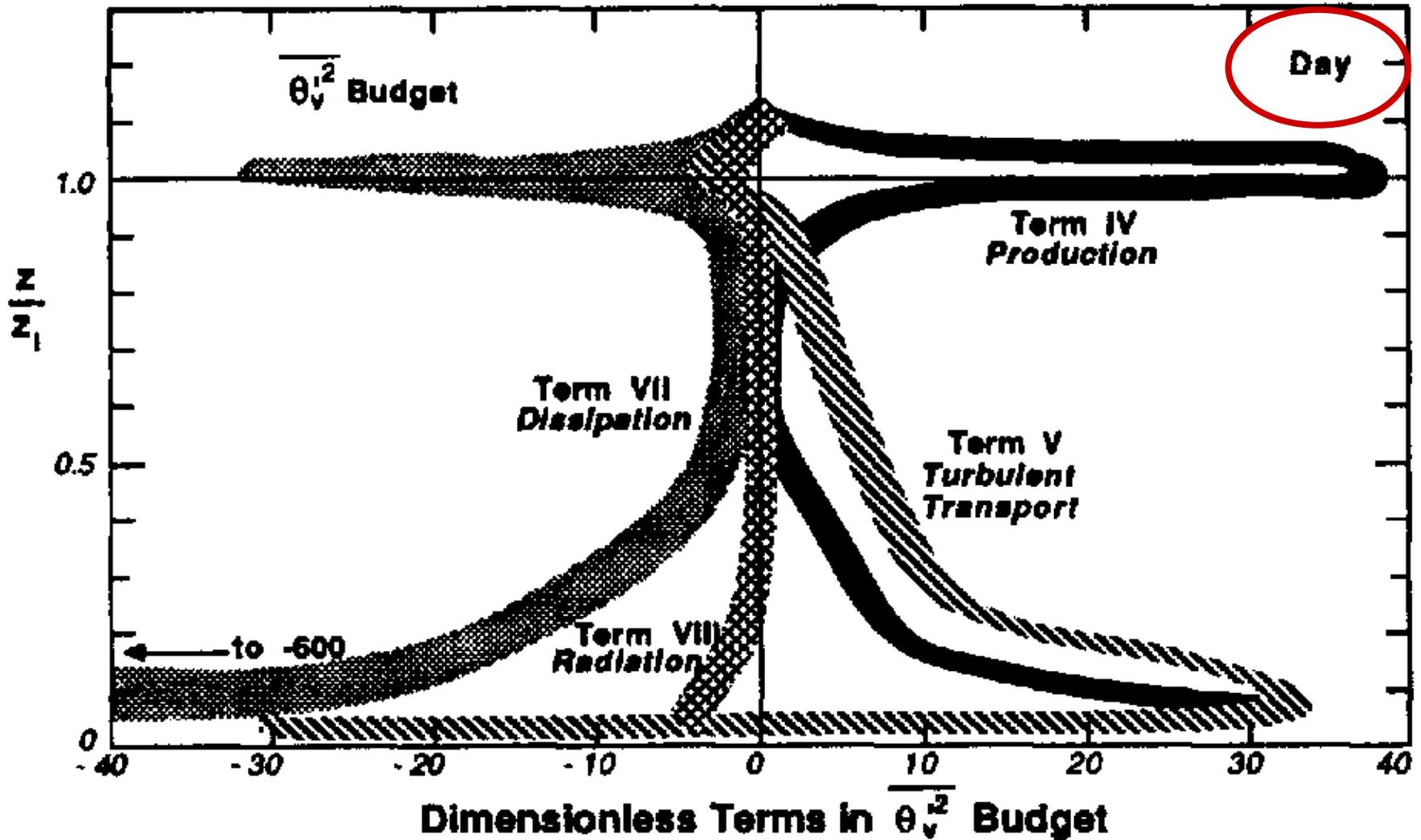
$\varepsilon_\theta$  : Verlustrate der Temperaturvarianz durch molekulare Prozesse



Beispiel für ein modelliertes vertikales Profil der dimensionslosen Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur am Tage.



Beispiel für ein modelliertes nächtliches Profil der Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur.



Beispiel für modellierte vertikale Profile der einzelnen Terme in der Bestimmungsgleichung für die Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur: Vergleich der Größenordnung.



**Ende Kapitel 4**