

Kapitel 3:

Anwendung der grundlegenden Gleichungen auf turbulente Flüsse



Inhalt

- Gleichungen für turbulente Flüsse, spezielle Probleme
- Grundlegende Gleichungen, Interpretation der Terme
- Bearbeitung der Zustandsgleichung
- Approximation flacher Konvektion
- Flussform der Advektionsterme
- Horizontale Homogenität
- Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen
- Beispiele
- Stationäre, horizontal homogene Flüsse

Gleichungen für turbulente Flüsse

- Um den Zustand der Grenzschicht quantitativ zu beschreiben und vorherzusagen, muss man die Grundgleichungen der Strömungsdynamik betrachten.
 - Diese sind:
 - die Kontinuitätsgleichung,
 - die Bewegungs- (Impuls-) Gleichung (2. Newton'sches Gesetz),
 - die Thermodynamische Gleichung,
 - die Gleichung für Feuchte,
 - die Zustandsgleichung.
- ⇒ Fünf Gleichungen bilden die Grundlage der Grenzschichttheorie!

Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

- Im Prinzip könnten diese Gleichungen direkt auf turbulente Flüsse angewendet werden, aber dies ist generell zu kompliziert.
- Um die Anfangsbedingungen zu bestimmen kann man nicht alle turbulenten Skalen herunter bis zu den kleinsten Störungen (Eddies) auflösen.
- Anstelle dessen "schneidet" man zur Vereinfachung bei einer bestimmten Eddy-Größe (Skala) ab, unterhalb derer man nur den statistischen Effekt der Turbulenz betrachtet.
- In einigen mesoskaligen und synoptisch-skaligen Modellen findet dieses "Abschneiden" bei etwa 10 bis 100 km statt, während für einige GS-Modelle (bekannt als 'Large Eddy Simulation Models', LES models) bei etwa 100 m abgeschnitten wird.

Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

- Der komplette Satz von Gleichungen in der Grenzschichttheorie ist so komplex, dass keine analytische Lösung bekannt ist. Man muss deshalb nach Annäherungen und Approximationen suchen.
- Wir suchen daher
 - exakte analytische Lösungen von vereinfachenden Untermengen der Gleichungen oder
 - numerische Annäherungen eines vollständigeren Satzes der Gleichungen.
- Man beginnt mit der Formulierung von Gleichungen, die statistisch gemittelte Bedingungen für kleine Störungen (Eddies) darstellen.
- Im folgenden werden keine numerischen Methoden zur Lösung dieser Gleichungen behandelt!

Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

(Wiederholung von Kapitel 2)

- Es gibt eine sehr einfache Weise die großskaligen von den turbulenten Bewegungen zu trennen: Durch die Mittelung der Windgeschwindigkeitsmessungen über eine Periode von 30 Minuten bis zu 1 Stunde kann man die positiven und negativen Abweichungen der turbulenten Geschwindigkeiten eliminieren (heraus mitteln).

➤ Sei

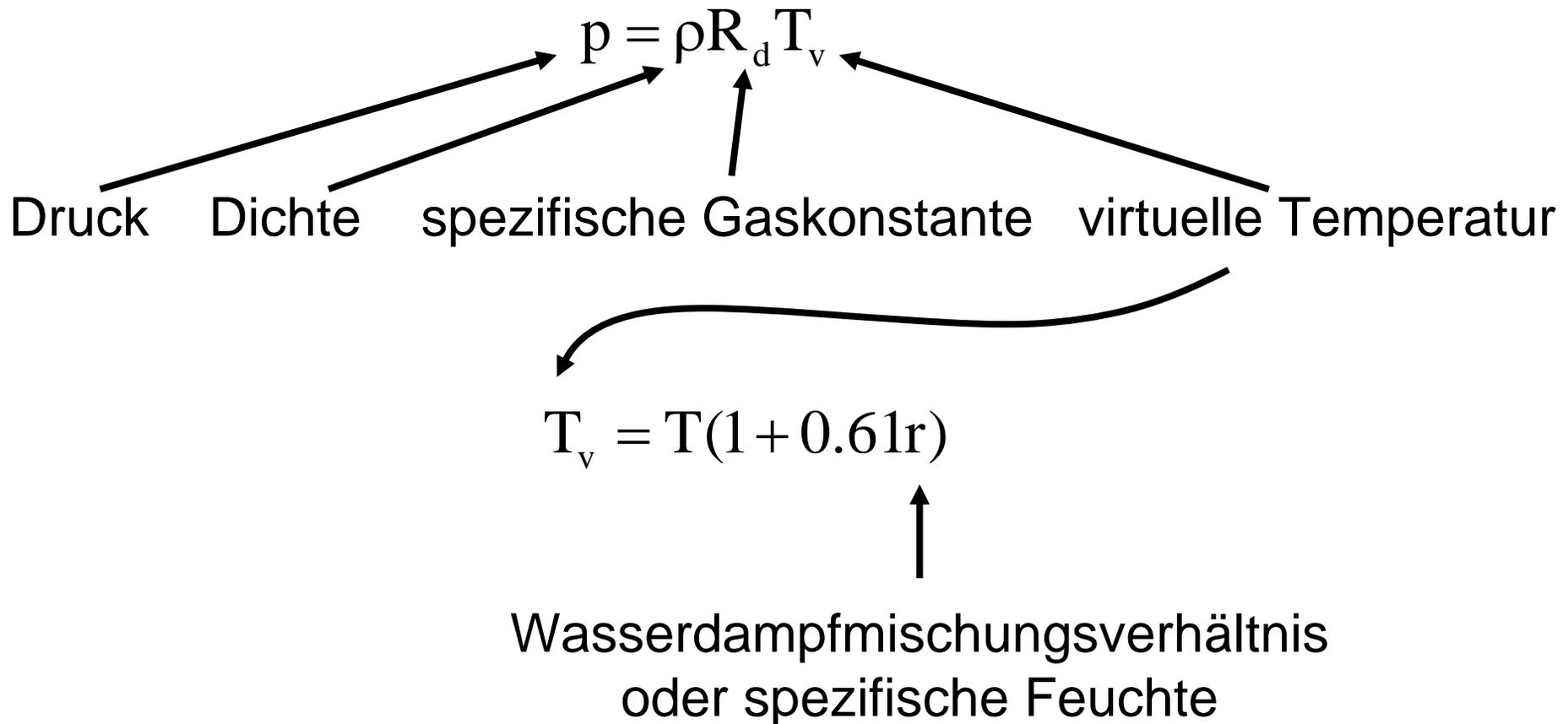
$$u = \bar{U} + u'$$

momentaner Wind mittlerer Wind turbulenter Anteil

- u' enthält die Variationen von ≤ 1 Stunde.
- Die Existenz der spektralen Lücke erlaubt die Unterteilung einer Bewegung in dieser Weise.

Bestimmungsgleichungen (1)

- Zustandsgleichung (ideales Gasgesetz für feuchte Luft)



Bestimmungsgleichungen (2)

- Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse)

Flussform
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

gewöhnliche Form
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$


Boussinesq Form*
$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} = 0$$


* Approximation für inkompressible Medien: Diese Bedingung ist in der Regel für alle turbulenten Bewegungen erfüllt, die kleiner als die Mesoskale (d.h. kleiner 1-10 km) sind.

Bestimmungsgleichungen (3)

- Impulserhaltung (2. Newton'sches Gesetz)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

I

II

III

IV

V

VI

- Term I** Änderungsrate des Impulses (Trägheit)
Term II Advektion des Impulses
Term III Druckgradientkraft
Term IV Schwerkraft (nur in z-Richtung)
Term V Corioliskraft
Term VI viskoser Spannungsterm

Bestimmungsgleichungen (4)

Term VI \Rightarrow

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \right\}$$

Angenommen μ ist keine Funktion des Ortes, dann folgt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \right\}$$

Für inkompressible Fluide gilt (siehe oben Boussinesq Form):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

μ : Viskositätskoeffizient
 ν : kinematische Viskosität

Bestimmungsgleichungen (5)

- Impulserhaltung: Aus vorheriger Formel \Rightarrow

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

- Dies ist gerade die Navier-Stokes Gleichung!
- Sie ist der Startpunkt für alle Herleitungen zur Beschreibung von Turbulenz!

Bestimmungsgleichungen (6)

➤ Erhaltung der Feuchte (Wassergehalt)

$$\frac{\partial q_T}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_T}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\rho}$$

I II III IV

Netto Wasserquelle

Molekulare Diffusivität von Wasserdampf in der Luft

q_T ist die gesamte spezifische Feuchte von Luft
= Gesamtmasse von Wasser (alle Phasen).

- Term I** lokale Änderungsrate des Wassergehalts
- Term II** Advektion des Wassergehalts
- Term III** Diffusion von Wasserdampf (spezifische Feuchte q)
- Term IV** Netto Quelle des Wassergehalts

Bestimmungsgleichungen (7)

Wähle $q_T = q + q_L$ und $S_{q_T} = S_q + S_{q_L}$

T: Total

L : Liquid (flüssig)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_j \frac{\partial q}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} + \frac{S_q}{\rho} + \frac{E}{\rho}$$

E = Verdampfungsrate von Flüssigwasser (negativer Wert = Kondensation; positiver Wert = Verdampfung)

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_L}{\partial x_j} = \frac{S_{q_L}}{\rho} - \frac{E}{\rho}$$

I

II

III

IV

V

Term IV Konvergenz von Wasser (Niederschlag), der nicht mit dem Wind advehiert (Term III) wird.

Term V Umwandlung von Wasser/Eis in Gasphase

Molekulare Diffusion hat einen vernachlässigbaren Effekt auf den Niederschlag von Wasser (flüssig, fest) bzw. Wolkenteilchen.

Bestimmungsgleichungen (8)

- Erhaltung von Wärme (1. Gesetz der Thermodynamik)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = v_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j} - \frac{LE}{\rho c_p}$$

I II III IV V

L = latente Wärme im Zusammenhang mit der Phasenänderung E.
v_θ = therm. Diffusivität

Q_j^{*} ist die Komponente der Netto-Strahlung in j-Richtung.

- Term I** Änderungsrate der potentiellen Temperatur
- Term II** Advektion der potentiellen Temperatur
- Term III** Effekt der molekularen Diffusion von Wärme
- Term IV** Effekt der Strahlungsflussdivergenz
- Term V** Effekt des Verbrauchs latenter Wärme beim Verdampfen

Bestimmungsgleichungen (9)

- Erhaltung einer skalaren Größe

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = v_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j^2} + S_c$$

I II III IV

c ist eine skalare Konzentration (pro Einheitsmasse Luft).

Term I Änderungsrate der skalaren Größe

Term II Advektion der skalaren Größe

Term III Effekt der molekularen Diffusion des Skalars

Term IV Quelle der skalaren Größe

Bearbeitung der Zustandsgleichung

Wähle $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $T_v = \bar{T}_v + T'_v$, $p = \bar{p} + p'$

$$p = \rho R T_v \quad \longrightarrow \quad \bar{p} + p' = R (\bar{\rho} + \rho') (\bar{T}_v + T'_v)$$

$$\bar{p} + p' = R (\bar{\rho} \bar{T}_v + \rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho' T'_v)$$

Anwendung der
Reynolds-Mittelung

$$\bar{p} = R (\bar{\rho} \bar{T}_v + \overline{\rho' T'_v})$$

klein!

$$\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T}_v$$

Ähnlich Annahmen können auch für die anderen Grundgleichungen gemacht werden!

Bearbeitung der Zustandsgleichung

$$\bar{p} + p' = R \left(\bar{\rho} \bar{T}_v + \rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho'_v T'_v \right) \quad (1)$$

$$\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T}_v \quad (2)$$

(2) - (1)



$$p' = R \left(\rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho'_v T'_v \right)$$

: (2)



$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} + \frac{\rho'_v T'_v}{\bar{\rho} \bar{T}_v}$$

ist klein unter der Annahme, dass Störterme x' klein sind im Vgl. mit den Mittelwerten.



$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

Ideales Gasgesetz für linearisierte Störungen

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

- Stationäre Druckänderungen (H-, T-Druck) sind verbunden mit Variationen der Luftmasse (von Säule zu Säule).
- Für die größeren Wirbel (Eddies, Thermals) in der GS betragen diese Fluktuationen etwa 0.1 hPa, während für die kleineren Störungen die Effekte kleiner sind.
- Fluktuationen der Windgeschwindigkeit von $\approx 10 \text{ m s}^{-1}$ verursachen ebenso dynamische Druckänderungen von etwa 0.1 hPa.
- Demnach gilt in der GS meistens

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{10 \text{ Pa}}{10^5 \text{ Pa}} = 10^{-4} \quad \text{verglichen mit} \quad \frac{T'_v}{\bar{T}_v} = \frac{1 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 3.3 \times 10^{-3}$$

$\Leftrightarrow p' \ll \bar{p}$

Approximation der flachen Konvektion

$$\frac{\cancel{p'}}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

$$\quad \longrightarrow \quad \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}$$

- Luft die wärmer ist als das Mittel, ist weniger dicht als das Mittel.
- Diese Gleichungen erlauben es uns, Temperaturfluktuationen, die leicht zu messen sind, anstelle von Dichtefluktuationen zu verwenden, die schwierig zu messen sind.

Flussform des Advektionsterms

$$\text{Advektionsterm} = u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$$

ξ : jede abhängige Variable
(z.B. Wind, Feuchte, etc.)

$$= u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \xi \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Produktregel 

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Kontinuitätsgl.

$$\text{Flussform des Advektionsterms} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \xi)$$

Dies ist ein kinematischer Fluss (s. Kap. 2)

Impulserhaltung

Nur vertikale Komponente vom Impuls (nehme $x_3 = z$, $u_3 = w$):

$$\frac{Dw}{Dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}$$

behandle ν , μ als konstant

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$


$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g(\bar{\rho} + \rho') - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

Division durch $\bar{\rho}$ und umsordieren ergibt:

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} \right)$$

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} \right)$$

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T'_v}{T_v} \approx 3.3 \times 10^{-3} \quad (\text{siehe oben})$$

Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichts im mittleren Zustand:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \text{letzter Term in obiger Gleichung entfällt}$$

$$\frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

Dieser Term kann nicht vernachlässigt werden. \Rightarrow

Boussinesq Approximation:

$$-g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx g \frac{\theta'_v}{\theta_v}$$

$$-g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx g \frac{\theta'_v}{\theta_v}$$

Praktische Anwendung der Boussinesq Approximation
(wichtig für später):

Eine Voraussetzung für ihre Gültigkeit ist, dass die
Bedingungen für die flache Konvektion erfüllt sind.

Dann kann man in den originalen Bestimmungsgleichungen

ρ durch $\bar{\rho}$ und g durch $(g - g \frac{\theta'_v}{\theta_v})$ ersetzen.

- Obwohl das Absinken (\bar{w}) von Luft sowohl für die Massenerhaltung als auch für die Advektion von oben wichtig ist, ist es in der Impulsgleichung von geringerer Bedeutung.
- Bei Schönwetterbedingungen in der GS kann der Wert zwischen 0 to 0.1 m s⁻¹ variieren. Dies ist klein gegenüber dem Wert w' , der in der Regel zwischen 0 und 5 m s⁻¹ variiert. Nur für die Impulsgleichung kann man daher schreiben:

$$\bar{w} \equiv 0$$

$$\frac{Dw'}{Dt} = g \frac{\theta'_v}{\theta_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}$$

vertikale Komponente der Impulsgleichung

$$\bar{w} \equiv 0$$

$$\underline{\frac{Dw'}{Dt}} = g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}$$

Physikalische Interpretation:

- Luft, die wärmer ist als das Mittel, wird nach oben beschleunigt (rot unterstrichener Teil der Gleichung).
- Die beiden letzten Terme repräsentieren den Effekt des vertikalen Druckgradienten und der viskosen Spannung auf die Bewegung.
- Diese Gleichung ist bedeutend für die Beschreibung von konvektiven Vorgängen, z.B. Thermals.

Impulserhaltung

Horizontale Komponente (nehme $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = u$, $u_2 = v$).
Obwohl die Winde in der GS selten geostrophisch sind, kann man die Definition des geostrophischen Windes benutzen, um die horizontalen Druckgradientterme zu substituieren.

Definition des geostrophischen Windes: $f(u_g, v_g) = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$

Somit

$$\frac{Du}{Dt} = -f(v_g - v) + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \underline{f(u_g - u)} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

Ageostrophischer Wind

Kombinierte Impulsgleichung

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(u_{gj} - u_j) - \delta_{i3} \left[g \frac{\theta'_v}{\theta_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} \right] + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Hier wurden folgende Annahmen getroffen: flache Konvektion, Inkompressibilität, hydrostatische und Boussinesq Approximation; ferner wurde angenommen:

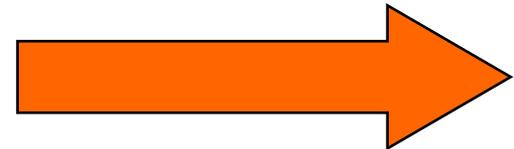
$$\mathbf{u}_{gj} = (u_g, v_g, 0) .$$

Horizontale Homogenität

Entwicklung der totalen Ableitung einer beliebigen mittleren Variable:

$$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t} + u \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} + w \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial z}$$

- In Kap. 1 und 2 wurde gezeigt, dass gemittelte Variable wie θ oder turbulente KE in der vertikalen starke Variationen über 1-2 km der GS zeigen, aber eine deutlich geringere Variabilität in der Horizontalen über Skalen von ebenfalls 1-2 km.
- Dem steht entgegen, dass $|w| \ll |(u,v)|$ ist.
- \Rightarrow alle vier Terme auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind für viele Fälle nahezu gleich groß.



Horizontale Homogenität

- Die Grundvoraussetzung bei vielen Betrachtungen ist, dass man üblicherweise die horizontalen Advektionsterme nicht vernachlässigen kann, da sie die Bewegung (zeitliche Veränderungen) von Erhaltungsgrößen stark beeinflussen.
- Manchmal jedoch wird in der Mikrometeorologie mehr Wert auf Turbulenzeffekte als auf Advektion gelegt, d.h. Effekte durch die mittlere Advektion werden auf Kosten von Turbulenzeffekten vernachlässigt.

Horizontale Homogenität

- Unter der Annahme horizontaler Homogenität kann man annehmen:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} = 0$$

- Vernachlässigung des Absinkens von Luft ergibt $\bar{w} = 0$.
- Obwohl diese Annahmen häufig gemacht werden, um die Ableitungen zu vereinfachen, sind sie in der Atmosphäre nur selten gültig.
- Wenn die Annahmen gemacht werden, verschwinden die mittleren Größen in den Advektionstermen und die wichtigen turbulenten Flussterme bleiben übrig.

Neuausrichtung und Rotation des Koordinatensystems

- Meistens wird ein kartesisches Koordinatensystem benutzt, in dem die (x,y,z) Achsen in Richtung (Ost, Nord, nach oben) zeigen.
- Manchmal ist es angebracht, die Achsen um die vertikale (z -) Achse zu drehen, so dass die x - und die y -Achse in andere Richtungen zeigen. Die x -Achse wird unter anderem ausgerichtet nach
 - der mittleren Windrichtung,
 - der Richtung des geostrophischen Windes,
 - der Richtung der Spannung am Erdboden oder
 - senkrecht zu Küstenlinien und Bergrücken.
- Grund dafür ist die Vereinfachung einiger Terme in den Bestimmungsgleichungen.

Gleichungen für mittlere Variable in einem turbulenten Fluss

Es wird angenommen, dass die Zustandsgleichung auch für mittlere Zustände gilt:

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

Kontinuitätsgleichung für turbulente Bewegungen:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \xrightarrow{\text{zeitl. Mittel}} \quad \overline{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}_{= 0 \text{ (Reynolds Regeln der Mittelbildung)}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

Man kann den turbulenten Teil des Advektionsterm in Flussform schreiben genau wie oben den allgemeinen Advektionsterm.

Impulserhaltung

Impulserhaltung (Gleichung siehe oben) verbunden mit der Boussinesq Approximation ergibt:

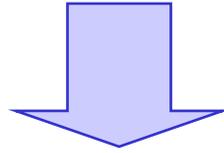
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f u_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} - \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Zerlegung der abhängigen Variablen in mittlere und turbulente Anteile, außer wo schon geschehen ($p; \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ij3} f (\bar{u}_j + u'_j) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} \\ &- \delta_{i3} \left[g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f(\bar{u}_j + u'_j) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i}$$

$$- \delta_{i3} \left[g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2}$$

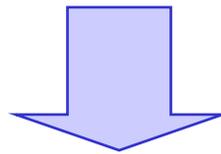


$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j$$

$$- \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} \bar{f} u_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j$$

$$- \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[g - g \frac{\theta'_v}{\theta_v} \right] + v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}$$



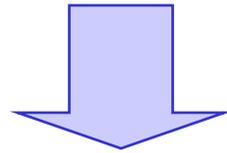
Reynolds Mittelung
der Gleichung

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}} + \cancel{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial t}}} + \bar{u}_j \overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \bar{u}_j \cancel{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}} + \cancel{\overline{u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \overline{\varepsilon_{ij3} \bar{f} u_j} + \cancel{\overline{\varepsilon_{ij3} f u'_j}}$$

$$- \overline{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \cancel{\overline{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i}}} - \delta_{i3} \bar{g} - \cancel{\delta_{i3} \bar{g} \frac{\theta'_v}{\theta_v}} + v \overline{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} + v \cancel{\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Abschließend Multiplikation der Kontinuitätsgleichung für turbulente Bewegungen mit u'_i ; Mittelung derselben, um den turbulenten Advektionsterm in Flussform zu erhalten; diesen Term auf die rechte Seite der Gleichung:



$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \underline{\underline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}}}$$

Beachte, dass die Bestimmungsgleichung für den mittleren Wind sehr ähnlich ist zu der ursprünglichen Erhaltungsgleichung, außer dem letzten Term! Dieser macht den Unterschied bei der Betrachtung turbulenter Flüsse.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

Term I Änderungsrate des mittleren Impulses

Term II Advektion des mittleren Impulses durch den mittleren Wind

Term III Corioliskraft

Term IV mittlere Druckgradientkraft

Term V Schwerkraft

Term VI Einfluss der viskosen Scherspannung auf die mittlere Bewegung

Term VII repräsentiert den Einfluss der Reynolds Spannung auf die mittlere Bewegung. Dieser Term kann interpretiert als Divergenz des turbulenten Impulsflusses.

Turbulenter Impulsfluss

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\overline{\partial(u'_i u'_j)}}{\partial x_j}$$

Man kann diesen Term wie folgt umschreiben
(oft wird er auch mit F (für 'friction')
abgekürzt):

$$-\frac{\overline{\partial(u'_i u'_j)}}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{wobei} \quad \tau_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j}$$

Folgerung: Turbulenz muss bei der Bestimmung der turbulenten GS berücksichtigt werden, auch wenn man nur mittlere Größen berechnen will. Dieser Term kann im Vergleich mit den anderen Termen von der gleichen Größenordnung sein oder sogar größer.

Erhaltung der Feuchte

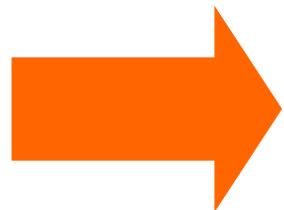
Auch hier Aufspaltung in mittlere und turbulente Anteile,
Annahme der Inkompressibilität:

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \frac{\partial q'_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} =$$

$$v_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + v_q \frac{\partial^2 q'_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}}$$

Wieder Mittelung der Gleichung
(nach Reynolds), Gebrauch der
turbulenten Kontinuitätsgleichung,
um den turbulenten Advektions-
term in Flussform zu erhalten:

Mittlerer
Quellterm



$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = \nu_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

I
II
III
IV
V

- Term I** Änderungsrate des mittleren Gesamtwassergehalts
- Term II** Advektion des mittleren Gesamtwassergehalts durch den mittleren Wind
- Term III** molekulare Diffusion von Wasserdampf
- Term IV** mittlerer Quellterm des gesamten Wassergehalts
- Term V** Divergenz des turbulenten Wasserdampfflusses

Ähnliche Gleichungen erhält man für den Dampfanteil (q) bzw. Wasseranteil (q_L) der gesamten spezifischen Feuchte (q_T).

Erhaltung von Wärme

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \theta'_i}{\partial x_j}} + \cancel{u_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \cancel{u'_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} =$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} - \cancel{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial Q_j^*}{\partial x_i}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2}} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p}$$

Vorgehensweise wie bisher

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

I
II
III
IV
V
VI

- Term I** Änderungsrate der potentiellen Temperatur (Wärme)
- Term II** Advektion von Wärme durch den mittleren Wind
- Term III** mittlerer Strahlungsdivergenzterm
- Term IV** Molekulare Wärmeleitung
- Term V** Quelle, die mit der Freisetzung von latenter Wärme verbunden ist
- Term VI** Divergenz des turbulenten Wärmeflusses

Erhaltung einer skalaren Größe (Konzentration)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial c'}{\partial t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial c'}{\partial x_j}} + \cancel{u'_j} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \cancel{u'_j} \frac{\partial c'}{\partial x_j} =$$

$$v \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + v \cancel{\frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2}} + \underline{S_c}$$

Mittlerer
Quellterm

Vorgehensweise wie bisher

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = v \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + \bar{S}_c - \frac{\overline{\partial(u'_j c')}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + \bar{S}_c - \frac{\partial(\overline{u'_j c'})}{\partial x_j}$$

I

II

III

IV

V

- Term I** Änderungsrate einer Spurenstoffkonzentration
- Term II** Advektion einer Spurenstoffkonzentration durch den mittleren Wind
- Term III** molekulare Diffusion einer Spurenstoffkonzentration
- Term IV** mittlerer Quellterm der Spurenstoffkonzentration
- Term V** Divergenz des turbulenten Flusses der Spurenstoffkonzentration

Zusammenfassung – Vernachlässigung der Viskosität für mittlere Bewegungen

- In jeder der Erhaltungsgleichungen, außer in der Kontinuitätsgleichung, gibt es einen molekularen Diffusions-/Viskositätsterm.
- Messungen in der Atmosphäre belegen, dass der molekulare Diffusionsterm um einige Größenordnungen kleiner ist als die anderen Term und deshalb vernachlässigt werden kann.

Zusammenfassung – Vernachlässigung der Viskosität für mittlere Bewegungen

- Daraus ergibt sich, dass der vorletzte Term in

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

vernachlässigt werden kann!

Nach Durchführung der hydrostatischen Approximation sind alle Term von der gleichen Größenordnung außer dem Diffusionsterm, der um $O(1/Re) \approx 10^{-7}$ kleiner ist als die anderen Terme, abgesehen von den untersten Zentimetern oberhalb der Erdoberfläche.

Einschub: Reynoldszahl $Re = \mathbf{V} \mathbf{L} / \nu$ (\mathbf{V} : Geschwindigkeitsskala; \mathbf{L} : Längenskala; ν : kinematische Viskosität)

$\mathbf{V} = 5 \text{ m/s}$; $\mathbf{L} = 100 \text{ m}$; $\nu_{\text{air}} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^{-1} \Rightarrow Re = 3 \times 10^7$
(entspricht dem Verhältnis von Trägheits- zu viskosem Antrieb)

Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (1)

- Vernachlässigung der molekularen Diffusion und Viskosität und Verwendung der hydrostatischen und der Boussinesq Approximation \Rightarrow

$$\bar{p} = R\bar{\rho}\bar{T}_v$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = - f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\partial (\overline{u'_j u'})}{\partial x_j} \quad (\text{zonale K.})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = + f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \frac{\partial (\overline{u'_j v'})}{\partial x_j} \quad (\text{meridionale K.})$$

Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (2)

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = \frac{\bar{S}_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \left[\frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_j} + \text{LE} \right] - \frac{\partial(\overline{u'_j \theta'})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = \bar{S}_c - \frac{\partial(\overline{u'_j c'})}{\partial x_j}$$

- Beachte die Ähnlichkeit in der Struktur der insgesamt fünf Bestimmungsgleichungen. Der Kovarianzterm (d.h. der jeweils letzte Term) beleuchtet die Rolle der Statistik in turbulenten Flüssen.

Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (3)

- In den beiden Bewegungsgleichungen wurde die geostrophische Windkomponente durch den mittleren horizontalen Druckgradienten definiert:

$$\bar{u}_g = -\frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \bar{v}_g = \frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

- Zur Vereinfachung kann man schreiben :

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$$

wobei die totale Ableitung D/Dt nur die mittlere Advektion einschließt.

Beispiele

- Für viele Anwendungen (Experimente) muss man lange warten, bis realistischere Anfangs- und Randbedingungen in der planetaren GS enthalten sind.
- Hier: Zwei Beispiele, die die Anwendung der mittleren Flussgleichungen zeigen:

Problem 1

- Angenommen, dass der turbulente Fluss linear mit der Höhe gemäß $\overline{w'\theta'} = a - bz$ abnimmt, mit $a = 0.3 \text{ (K m s}^{-1}\text{)}$ und $b = 3 \times 10^{-4} \text{ (K s}^{-1}\text{)}$.
- Wenn das anfängliche Profil der potentiellen Temperatur eine beliebige Form aufweist, wie sieht das Profil eine Stunde später aus? Vernachlässige Absinken, Strahlung, latente Wärme und nehme horizontale Homogenität an.

Lösung

Vernachlässigung von Absinken, Strahlung und latenter Wärme ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = - \frac{\partial(\overline{u'\theta'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'\theta'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

- Annahme der horizontalen Homogenität ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial(\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

- Ersetzen des Ausdrucks für $\overline{w'\theta'}$ ergibt $\partial\bar{\theta}/\partial z = b$.
- Dieser ist unabhängig von z , so dass sich die Luft in jeder Höhe der Umgebung mit der selben Rate erwärmt. Integration ergibt:

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(t_0) + b(t - t_0)$$

In einer Stunde ist die Erwärmung $3 \times 10^{-4} \text{ (K/s)} \times 3600 \text{ (s)} = 1.08 \text{ K}$.

Problem 2

- Wenn ein horizontaler Wind von 10 m s^{-1} trockenere Luft in ein Gebiet advehiert mit einem horizontalen Feuchtegradient von $5 \text{ g Wasser pro kg Luft pro } 100 \text{ km}$, welcher vertikaler Gradient des turbulenten Feuchteflusses in der GS ist erforderlich, um ein Gleichgewichtsprofil der spezifischen Feuchte zu erhalten?
- Annahme, dass alles Wasser gasförmig vorliegt und dass es keine Quellen und Senken gibt.

Lösung (zur Vereinfachung ist die x-Achse in Richtung des mittleren Windes)

Gleichgewicht $\Rightarrow \partial(\quad)/\partial t = 0 \Rightarrow$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = - \frac{\overline{\partial(u'q')}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial(v'q')}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial(w'q')}}{\partial z}$$

- Keine Information war gegeben über Absinken oder den horizontalen Flussgradienten; der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie Null sind \Rightarrow

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow 10 \text{ (ms}^{-1}\text{)} \times 5 \times 10^{-5} \text{ (g kg}^{-1} \text{ m}^{-1}\text{)} = - \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z}$$

$$\text{Somit ist } \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z} = -5 \times 10^{-4} \text{ (g kg}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{)}$$

- Ein Gradient dieser Größe entspricht einer Abnahme um $0.5 \text{ g kg}^{-1} \text{ m s}^{-1}$ von $\overline{w'q'}$ über eine vertikale Strecke von 1 km ($1000 \text{ m} \times -5 \times 10^{-4} \text{ g kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$).
- Beachte, dass die Abnahme des turbulenten Flusses mit der Höhe zu einem Anwachen von \bar{q} mit der Zeit führt.

Fazit

An den beiden Beispielen erkennt man, dass eine Abnahme des turbulenten Flusses mit der Höhe (= Flusskonvergenz) zu einer Zunahme (Erhöhung) einer mittleren Variablen (z.B. Temperatur oder Feuchte) mit der Zeit führt!

Problem 3

➤ Annahme einer turbulenten GS in 44°N geogr. Breite, wo der mittlere Wind 2 m s^{-1} langsamer ist als der geostrophische Wind (d.h. der Wind ist sub-geostrophisch). Vernachlässige Absinken und nehme horizontale Homogenität und Gleichgewichtszustand an.

(a) Bestimme die Divergenz der Reynolds Spannung die notwendig ist, um das Geschwindigkeitsdefizit auszugleichen.

(b) Wenn die Divergenz der Reynolds Spannung mit der molekularen Viskosität anstelle der Turbulenz zusammenhängen würde, welche Krümmung im mittleren Windprofil wäre dann notwendig?

Der Einfachheit halber wird das Koordinatensystem in Richtung der Spannung orientiert \Rightarrow

Lösung (a)

- Annahme der horizontalen Homogenität, Gleichgewicht, Vernachlässigung von Absinken, ergibt \Rightarrow

$$0 = -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} = f(\bar{v}_g - \bar{v}) = 10^{-4} \text{ (s}^{-1}\text{)} \times 2 \text{ (ms}^{-1}\text{)} = \underline{2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}}$$

Divergenz der Reynolds Spannung

Lösung (b)

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass der Einfluss des (viskosen) Spannungsterms auf die mittlere Bewegung ausgedrückt werden kann durch $\nu \partial^2 \bar{u} / \partial z^2$.

Somit $\nu \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$.

Mit $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 13.33 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

Diskussion

Der Wert von 13.33 1/ms ist ein extremer Wert für die Krümmung. Wenn man annimmt, dass so ein Profil in der Mitte der GS (d.h. $z = 0.5 z_i$) beobachtet würde, wo eine mittlere Windgeschwindigkeit von 5 m/s vorherrscht, würde dies in einer 10 m höheren Schicht einen mittleren Wind von 672 m/s bedeuten.

Es ist offensichtlich, dass viskose Spannung in der mittleren Windgleichung eine viel geringere Rolle spielt als turbulente (Reynolds) Spannung. Trotzdem: Viskosität ist für turbulente Bewegungen sehr wichtig und kann nicht vernachlässigt werden!

Stationärer, horizontal homogener Fluss

Vernachlässigung von Temperatur- und Feuchtefluktuationen

$$\begin{aligned}
 \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}} &= -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \cancel{\frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial(u'w')}}{\partial z} \\
 \cancel{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}} &= +f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \cancel{\frac{\partial(\overline{u'_i v'_j})}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial(v'w')}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

stationär horizontal
 homogen

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$ (da nur horizontale Flüsse)

Stationärer, horizontal homogener Fluss

Gleichgewicht der Kräfte

$$0 = -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{\partial(u'w')}{\partial z}$$

$$0 = +f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \frac{\partial(v'w')}{\partial z}$$

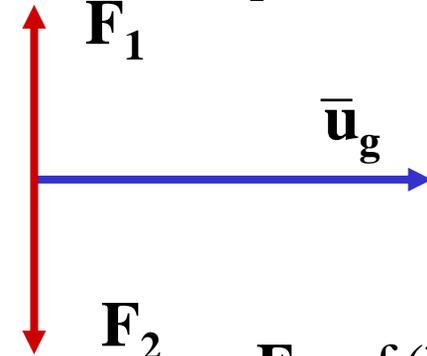
$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{F}_3 = - \left(\frac{\partial(u'w')}{\partial z}, \frac{\partial(v'w')}{\partial z} \right)$$

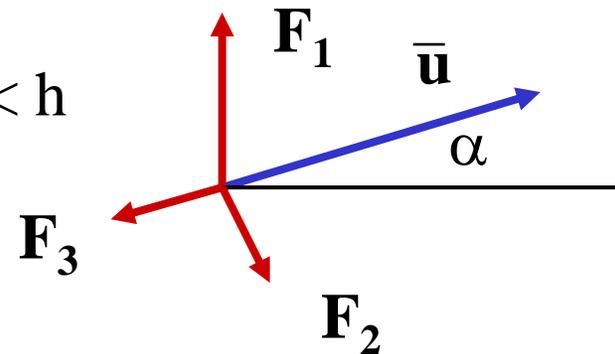
NH

$$\mathbf{F}_1 = f(-\bar{v}_g, \bar{u}_g)$$

$z > h$



$z < h$



Ende Kapitel 3