

Kapitel 2: Mathematische und konzeptionelle Hilfsmittel



Kapitel 2:

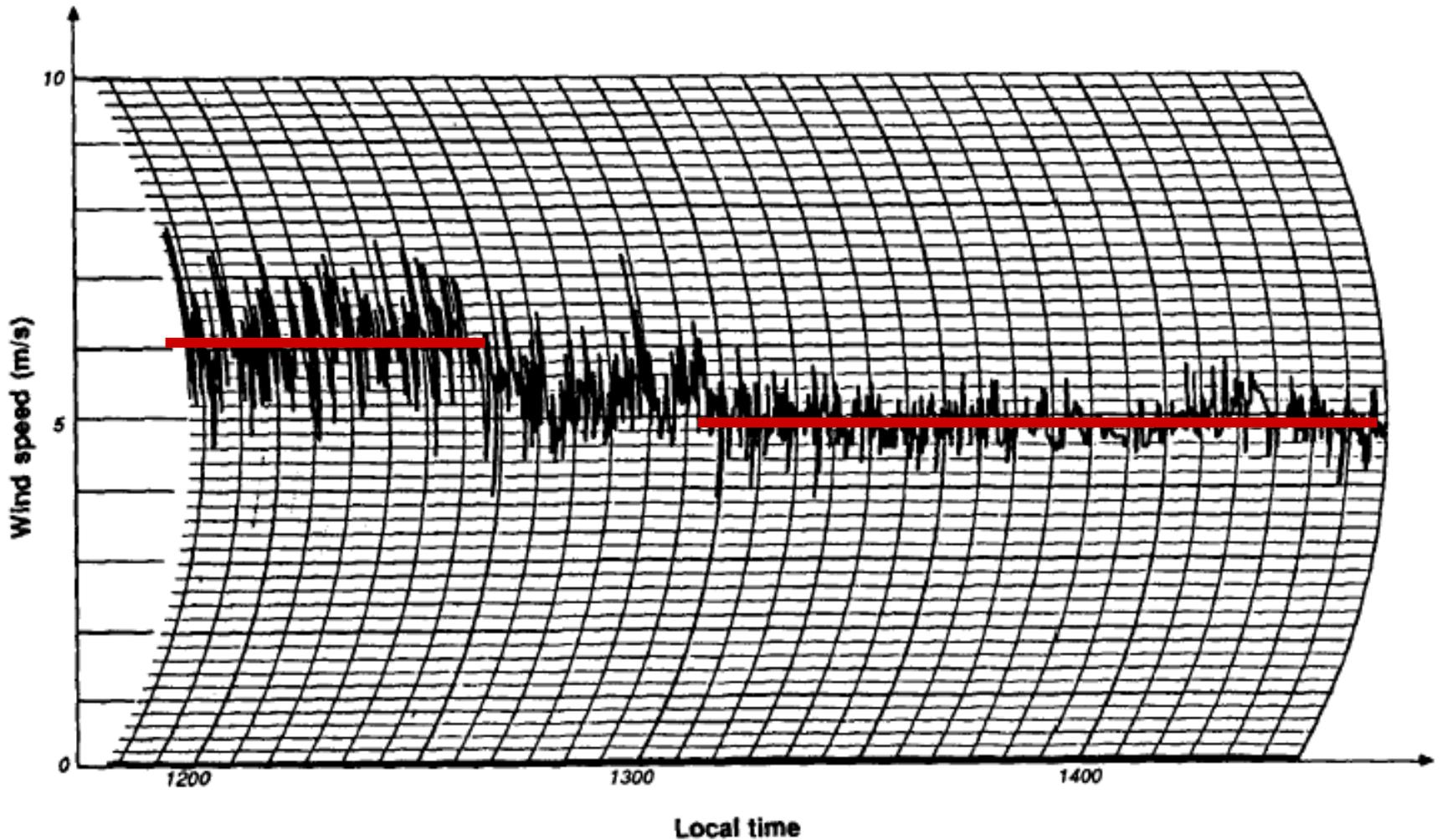
Mathematische und konzeptionelle Hilfsmittel

- Einige mathematische Hilfsmittel: Statistik
- Das Turbulenzspektrum
- Energiekaskade; die spektrale Lücke
- Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung
- Einige grundlegende statistische Methoden
- Arten der Mittelung (Bildung von Mittelwerten)
- Regeln der Mittelung
- Varianz, Kovarianz und Korrelation
- Turbulenz Intensität, turbulenter Transport
- Reynolds Spannung, viskose Spannung, Reibungsgeschwindigkeit

Einige mathematische Hilfsmittel: Statistik

- Turbulenz ist ein wesentliches Merkmal der atmosphärischen GS, die quantifiziert werden muss, um sie zu studieren.
- Die Zufälligkeit von Turbulenz schließt aus, dass man mit einem deterministischen Ansatz herangehen kann. Wir sind gezwungen statistische Verfahren zu nutzen, wobei wir aber auf mittlere oder erwartete Werte als Maß der Turbulenz beschränkt sind.
- Diese Prozedur setzt die Separierung von turbulenten und nicht-turbulenten Anteilen einer Strömung voraus.

Beobachtung der Windgeschwindigkeit am frühen Nachmittag



**Die Möglichkeit, einen statistisch stabilen Wert zu finden
legt nahe, dass Turbulenz nicht vollständig zufällig ist!**

Größe von Wirbeln (Eddies)

- Es gibt offensichtlich in den Windvariationen einen großen Bereich von verschiedenen Zeitskalen, die jeweils den anderen Variationen überlagert sind.
- Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die Zeit zwischen zwei kleinen Windspitzen etwa 1 Minute ist.
- Größere Spitzen scheinen etwa alle 5 Minuten aufzutreten und andere Variationen deuten auf Perioden von 10 Minuten hin.
- Die kleinsten beobachtbaren Perioden sind etwa 10 Sekunden.

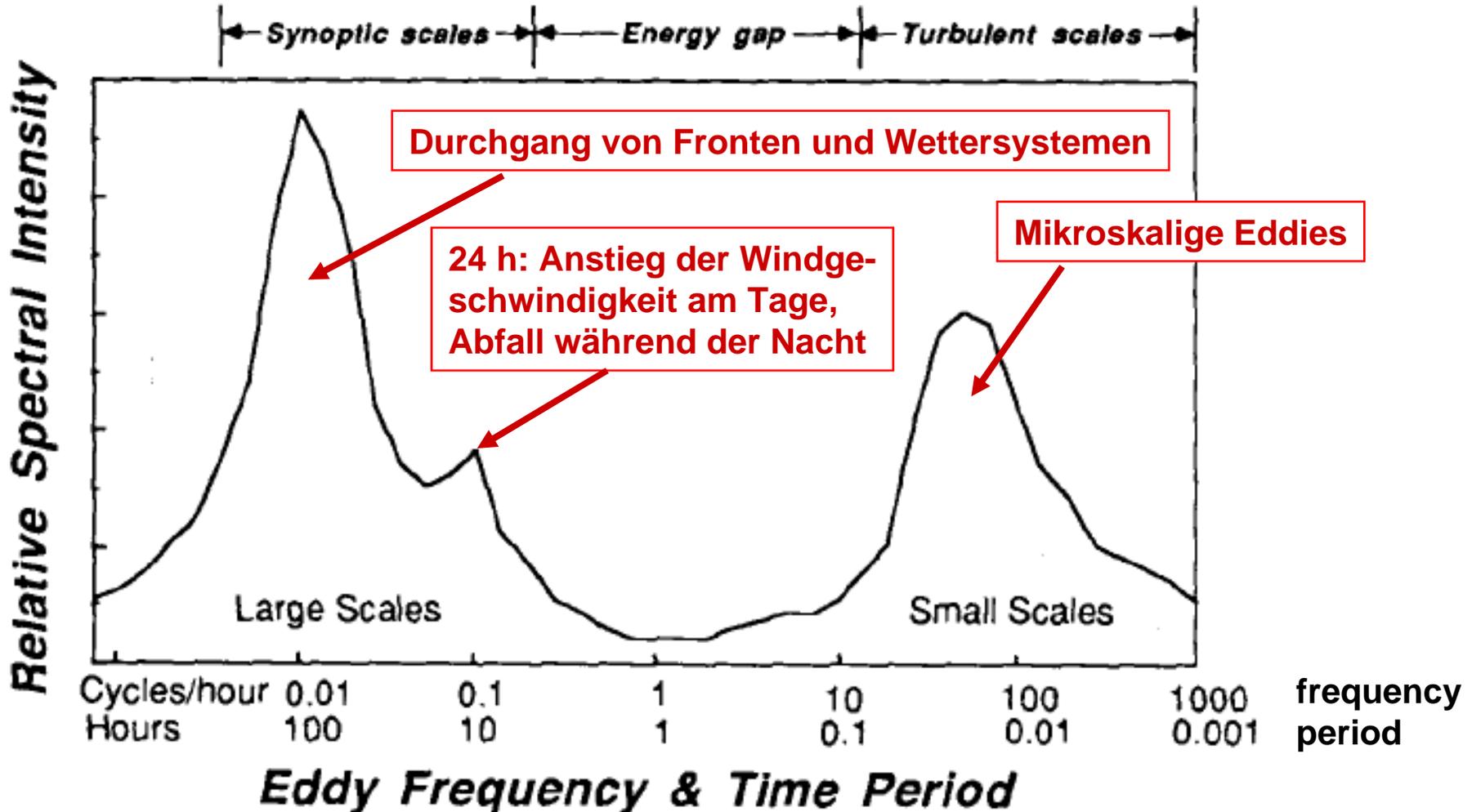
Größe von Wirbeln (Eddies)

- Wenn wir jede Zeitskala mit verschiedenen großen turbulenten Wirbeln (engl. turbulent eddies) in Verbindung bringen, können wir unter Anwendung der Hypothese von Taylor (siehe Kapitel 1) schließen, dass wir Eddies sehen, die Größen von etwa 50 m bis zu 3000 m haben.
- Dies ist ein klarer Hinweis auf ein Spektrum der Turbulenz.

Das Turbulenzspektrum

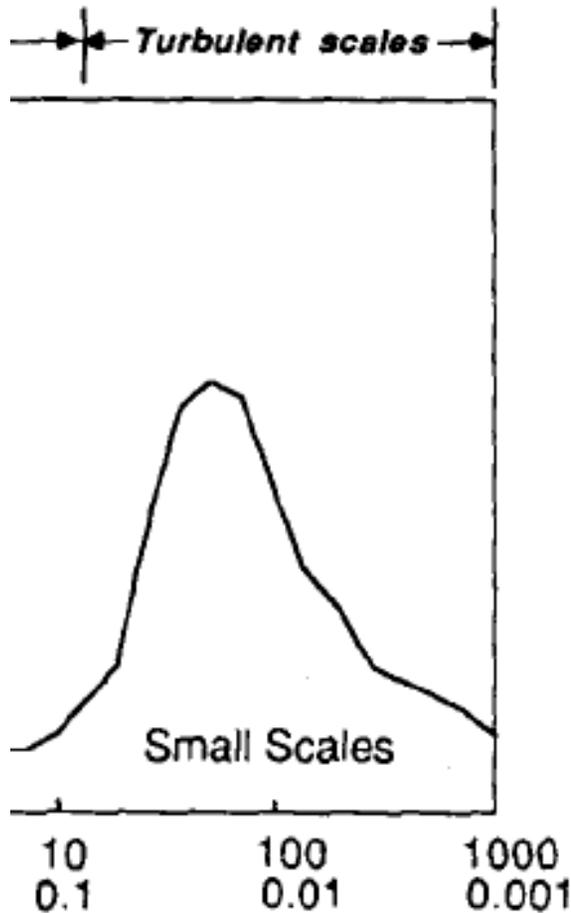
- Das Turbulenzspektrum ist analog zum Farbenspektrum eines Regenbogens.
- Weißes Licht enthält viele Farben (d.h. viele verschiedene Wellenlängen oder Frequenzen), die einander überlagert sind.
- Regentropfen wirken wie ein Prisma, das die Farben separiert.
- Wir könnten die Intensität jeder Farbe messen und so den jeweiligen Beitrag zum originalen Lichtstrahl bestimmen.
- Ähnliche Analysen können mit dem Signal der Turbulenz durchgeführt werden (allerdings mit mathematischen und nicht mit physikalischen Techniken wie oben), um etwas über den Beitrag eines jeden Eddies zur gesamten turbulenten kinetischen Energie zu erfahren.

Schematisches Spektrum der Windgeschwindigkeit nahe dem Erdboden



Van der Hoven Spektrum der Windgeschwindigkeit

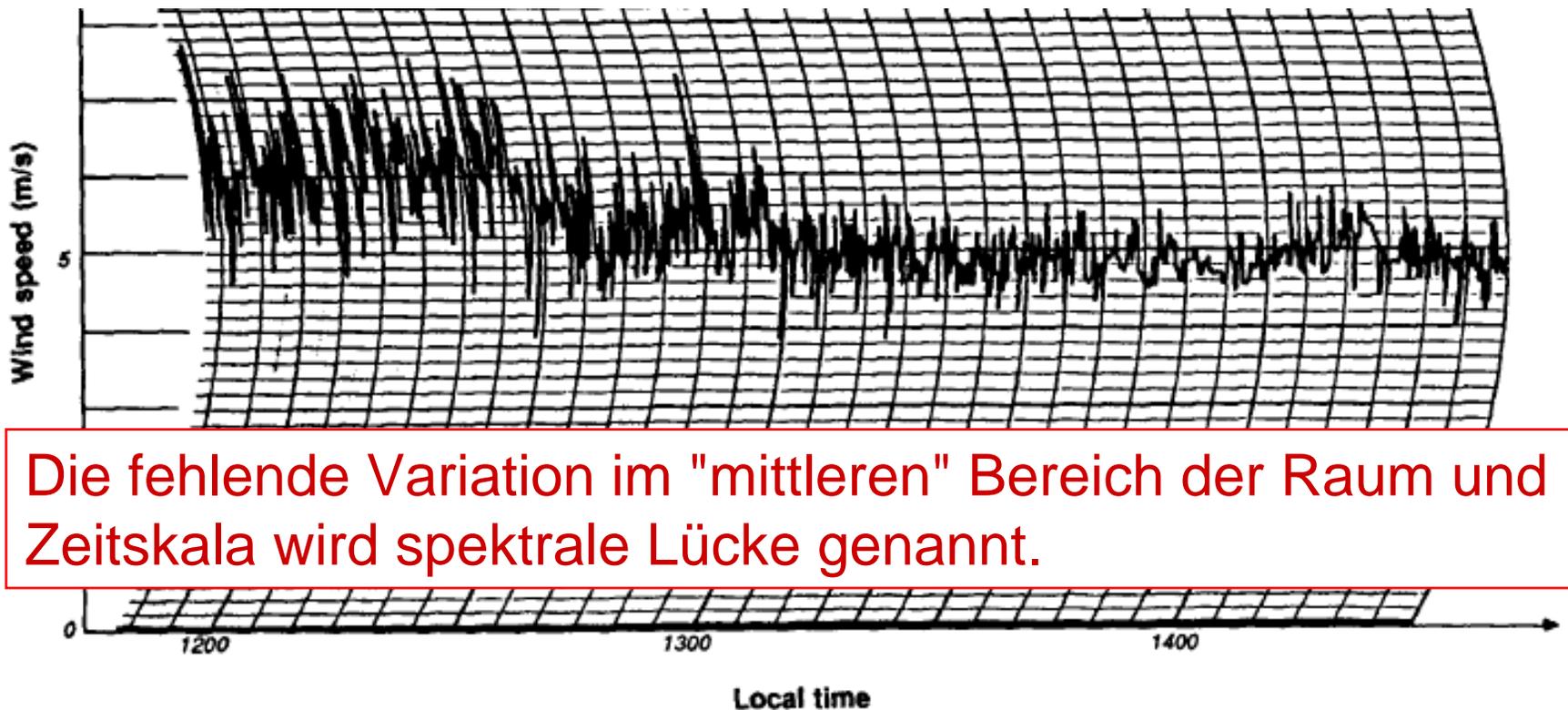
Energiekaskade

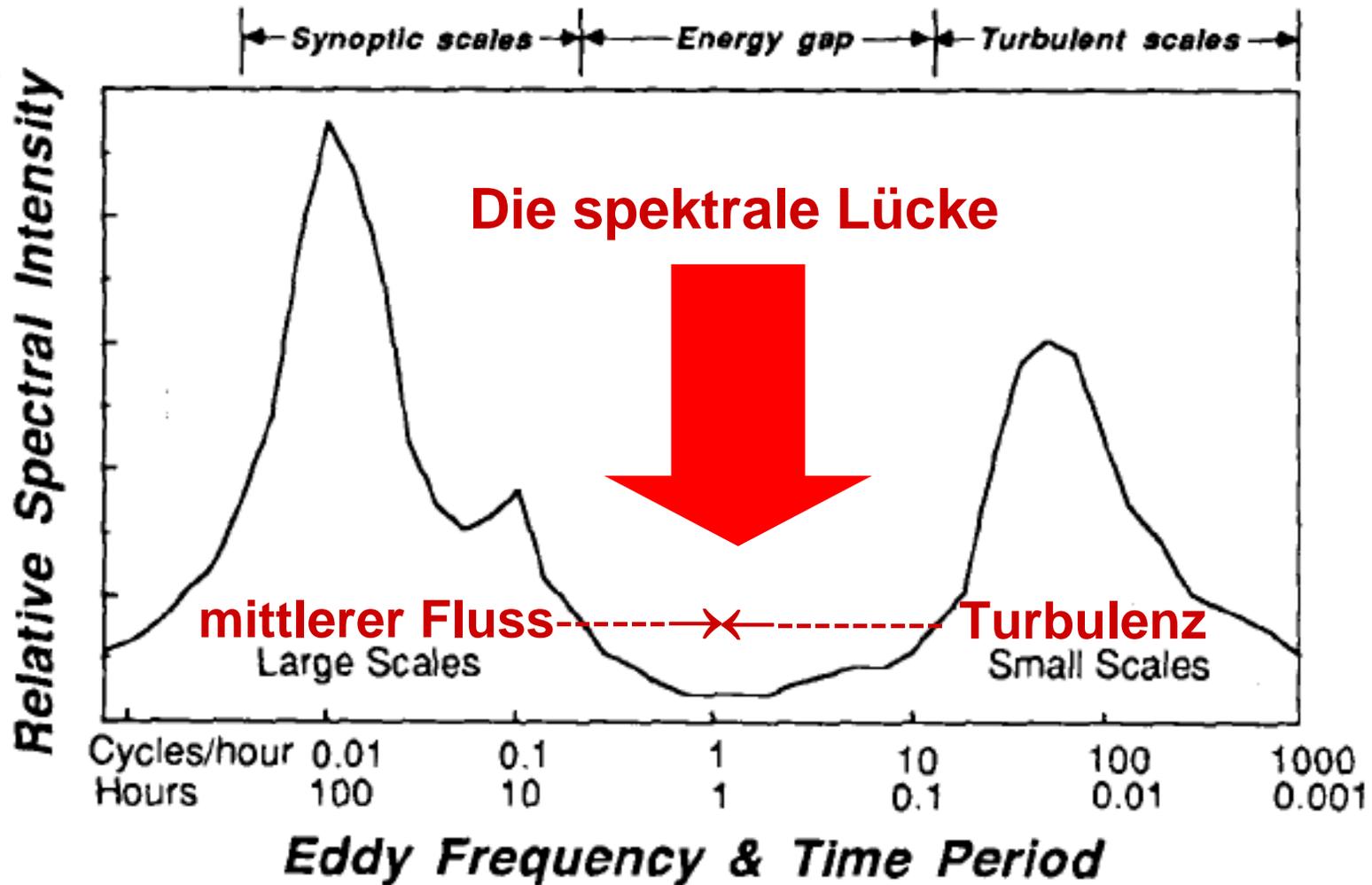


- Die größten Eddies sind meistens am intensivsten.
 - Die kleineren, hochfrequenten Eddies sind schwach.
 - Bewegungen durch große Eddies können Windscherungen verursachen, die wiederum kleinere Eddies erzeugen.
 - Solch ein Übertragen von turbulenter Energie von größeren zu kleineren Skalen ist bekannt als die Energiekaskade.
- Die Energie der kleinsten Eddies wird durch molekulare Viskosität in Wärme umgewandelt.

Die spektrale Lücke

- Offensichtlich existiert eine ausgeprägte Lücke in der Variation der Windgeschwindigkeit im Periodenbereich von 30 Minuten bis 1 Stunde.





Die spektrale Lücke tritt auf in dem Bereich zwischen den synoptischen Skalen und der Mikroskalen!

Die spektrale Lücke

- Für einige Strömungen (Bewegungen) scheint keine spektrale Lücke zu existieren.
- Zum Beispiel: Größere Cumulus Wolken wirken wie große Eddies mit Zeitskalen in der Größenordnung von 1 Stunde. Folglich kann das Spektrum der Windgeschwindigkeit in einer Wolkenschicht keine klare Separation der Skalen zeigen.
- Die meisten Analysen der Turbulenz bauen auf der Separation der Skalen auf, um das Problem zu vereinfachen. Deshalb ist die Beschreibung einer Strömung in einer wolkenbedeckten Situation sehr schwierig.

Die spektrale Lücke

- Viele Wettervorhersagemodelle (engl. numerical weather prediction models, NWP models) benutzen eine Maschenweite (bzw. Wellenlängenbereich), die gerade in den Bereich der spektralen Lücke fällt. Dies bedeutet, dass nur größerskalige Bewegungen explizit aufgelöst werden und somit deterministisch vorhergesagt werden können.
- Bewegungen auf kleineren Skalen, vor allem Turbulenz, kann nicht direkt modelliert werden. Diese Prozesse (Bewegungen) müssen parametrisiert werden.

Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung

- Es gibt eine sehr einfache Weise die großskaligen von den turbulenten Bewegungen zu trennen: Durch die Mittelung der Windgeschwindigkeitsmessungen über eine Periode von 30 Minuten bis zu 1 Stunde kann man die positiven und negativen Abweichungen der turbulenten Geschwindigkeiten eliminieren (heraus mitteln).

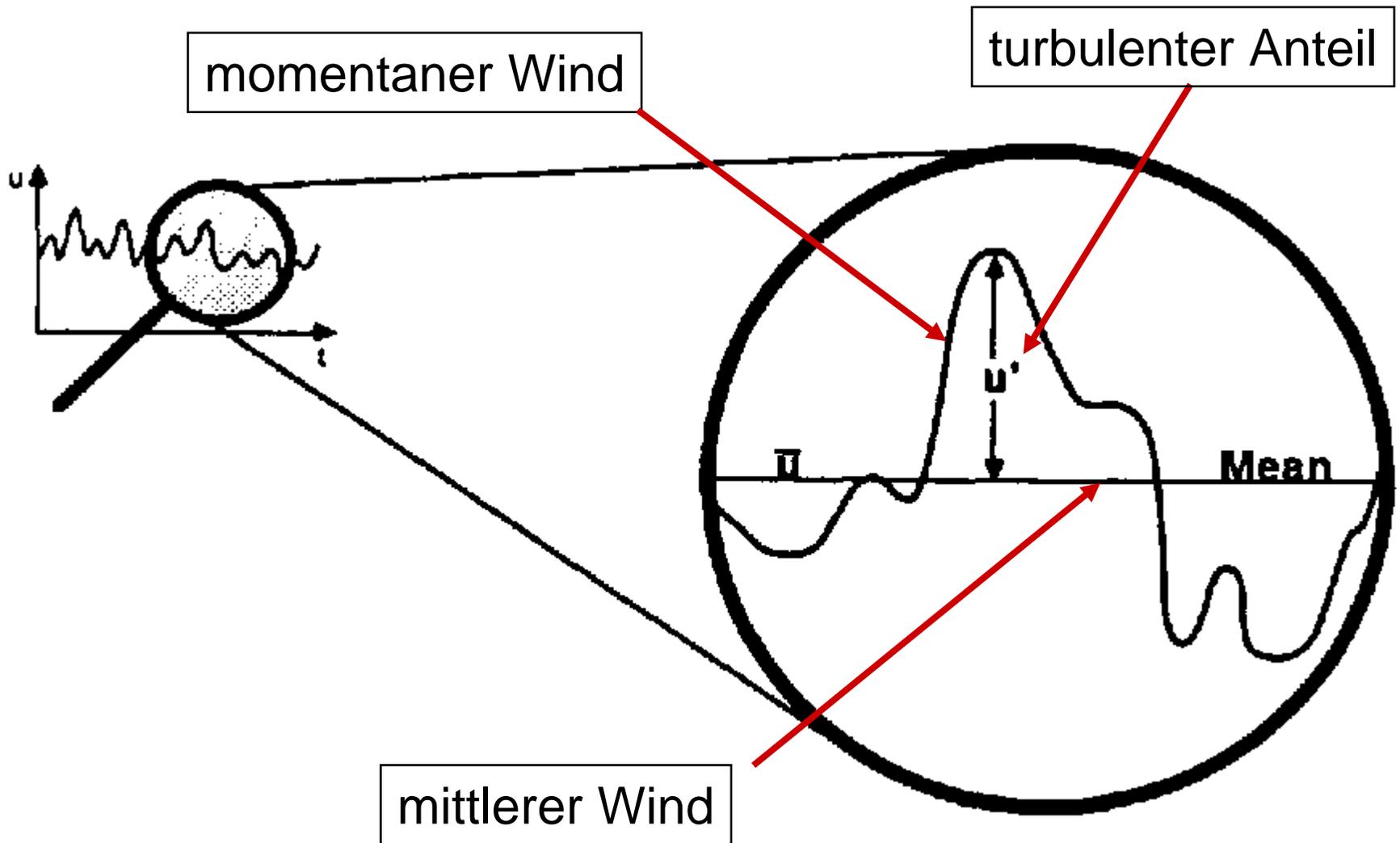
➤ Sei

$$u = \bar{U} + u'$$

momentaner Wind mittlerer Wind turbulenter Anteil

- u' enthält die Variationen von ≤ 1 Stunde.
- Die Existenz der spektralen Lücke erlaubt die Unterteilung einer Bewegung in dieser Weise.

Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung



- Diese Art der Zerlegung kann man für alle meteorologischen Größen und Spurenstoffkonzentrationen durchführen.

Einige grundlegende statistische Methoden

- Es gibt drei Arten der Mittelwertbildung: Zeitmittelung, Raum- (Orts-)mittelung, Ensemblemittelung.
- Die Zeitmittelung wird angewendet an einem bestimmten Punkt im Raum und besteht aus der Summe oder dem Integral über eine Zeitperiode T.

Sei $A = A(t,s)$, t die Zeit, s der Ort. Dann folgt:

$${}^t\overline{A(s)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A(t,s) \quad \text{oder} \quad {}^t\overline{A(s)} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t,s) dt$$


mit $t = i\Delta t$, für den diskreten Fall.

$\Delta t = T/N$, wobei N die Anzahl der Datenpunkte ist.

Einige grundlegende statistische Methoden

- Die Raummittelung wird angewendet zu einem bestimmten Zeitpunkt und besteht aus der Summe oder dem Integral über einen räumlichen Bereich S.

$$\overline{s A(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} A(t, s) \quad \text{oder} \quad \overline{s A(t)} = \frac{1}{S} \int_0^S A(t, s) ds$$

wobei für den diskreten Fall $s = j\Delta s$ und $\Delta s = S/N$.

- Ein Ensemblemittel besteht aus der Summe von N identischen Experimente oder Realisierungen (in Labor).

$$\overline{e A(t, s)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} A_j(t, s)$$

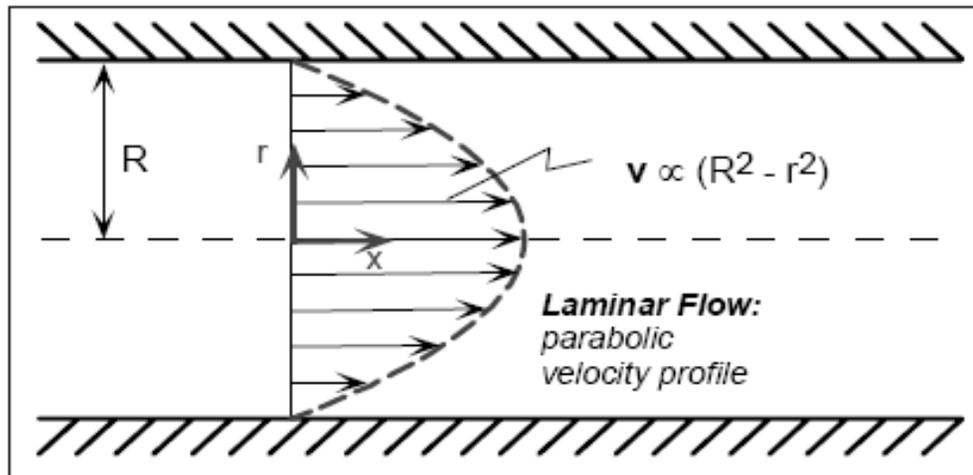
Einige grundlegende statistische Methoden

- Für Laborexperimente ist ein Ensemblemittel erstrebenswert. Es erlaubt die Reduzierung von experimentellen Fehlern durch Wiederholung des Experimentes.
- Anders als im Labor haben wir über atmosphärische Abläufe keine Kontrolle; wir sind nur selten in der Lage reproduzierbare Wetterereignisse zu beobachten (z.B. 'Hektor'). Deshalb können wir in der Regel kein Ensemblemittel bilden.
- Räumliche Mittelung ist möglich, wenn wir eine Vielzahl meteorologischer Sensoren entlang einer Linie, in einer Region oder einem Volumen haben.

Einige grundlegende statistische Methoden

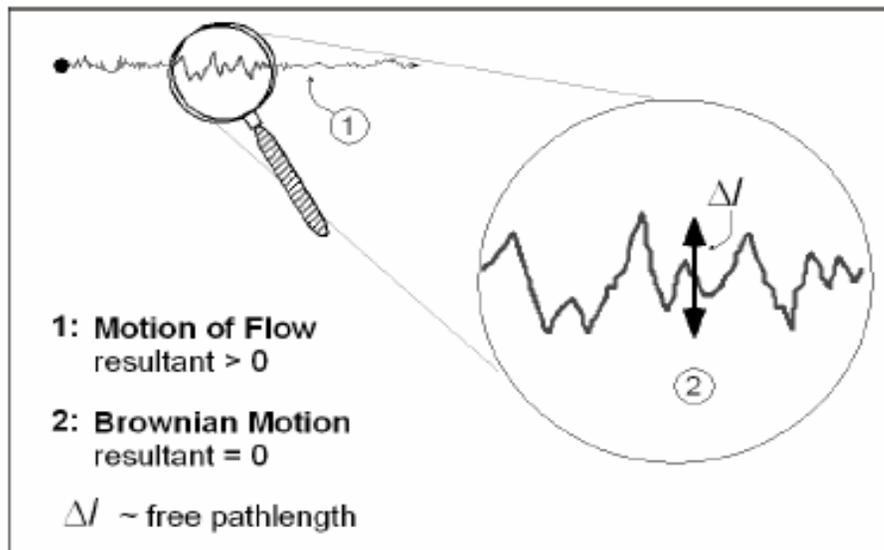
- Wenn Turbulenz homogen ist, d.h. statistisch gleich an jedem Ort, dann misst jeder Sensor das gleiche Phänomen, was die räumliche Mittelung sinnvoll macht.
- Die reale Atmosphäre ist nur in begrenzten Regionen in horizontaler Richtung homogen. Dies bedeutet, dass die meisten räumlichen Mittel eine Mittelung einer Vielzahl von verschiedenen Phänomenen darstellen.
- Durch geeignete Wahl der Größe des Messgebietes und der Sensoranordnung kann man durchaus für bestimmte Untersuchungen Skalen bestimmter Phänomene isolieren, während andere Skalen herausgemittelt werden.

Non-Turbulent Flow: **Laminar Flow**



Laminar Channel Flow

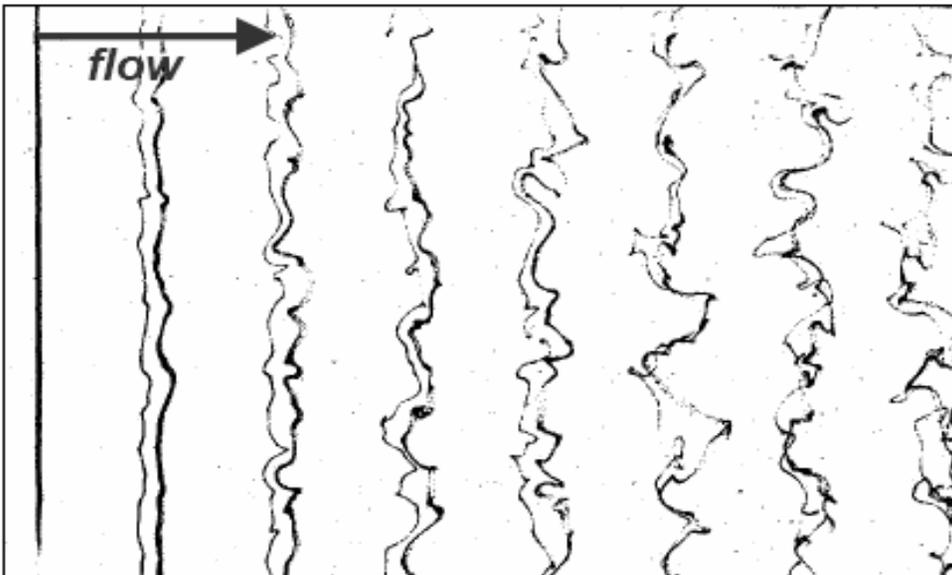
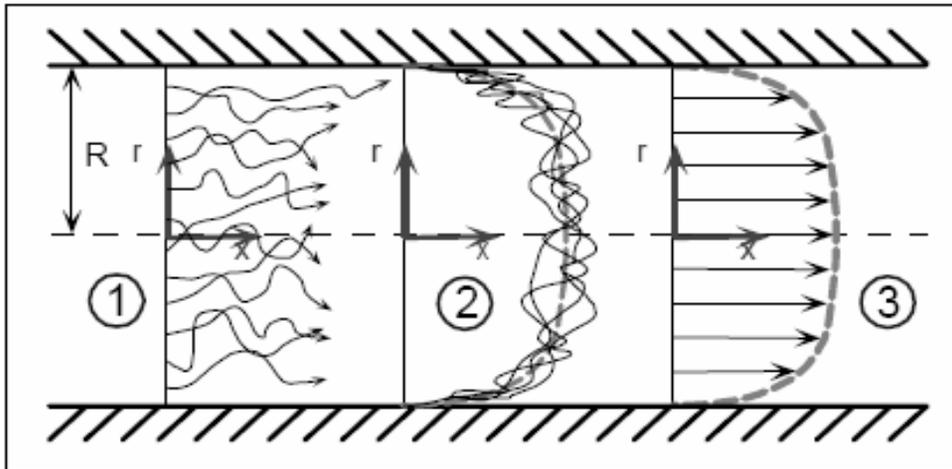
- trajectories do not cross
- trajectories = streamlines
- trajectories are parallel
- well defined velocity profile: parabolic
- no-slip condition at wall
- momentum transport towards wall by molecular diffusion



Momentum Transfer in Laminar Flow

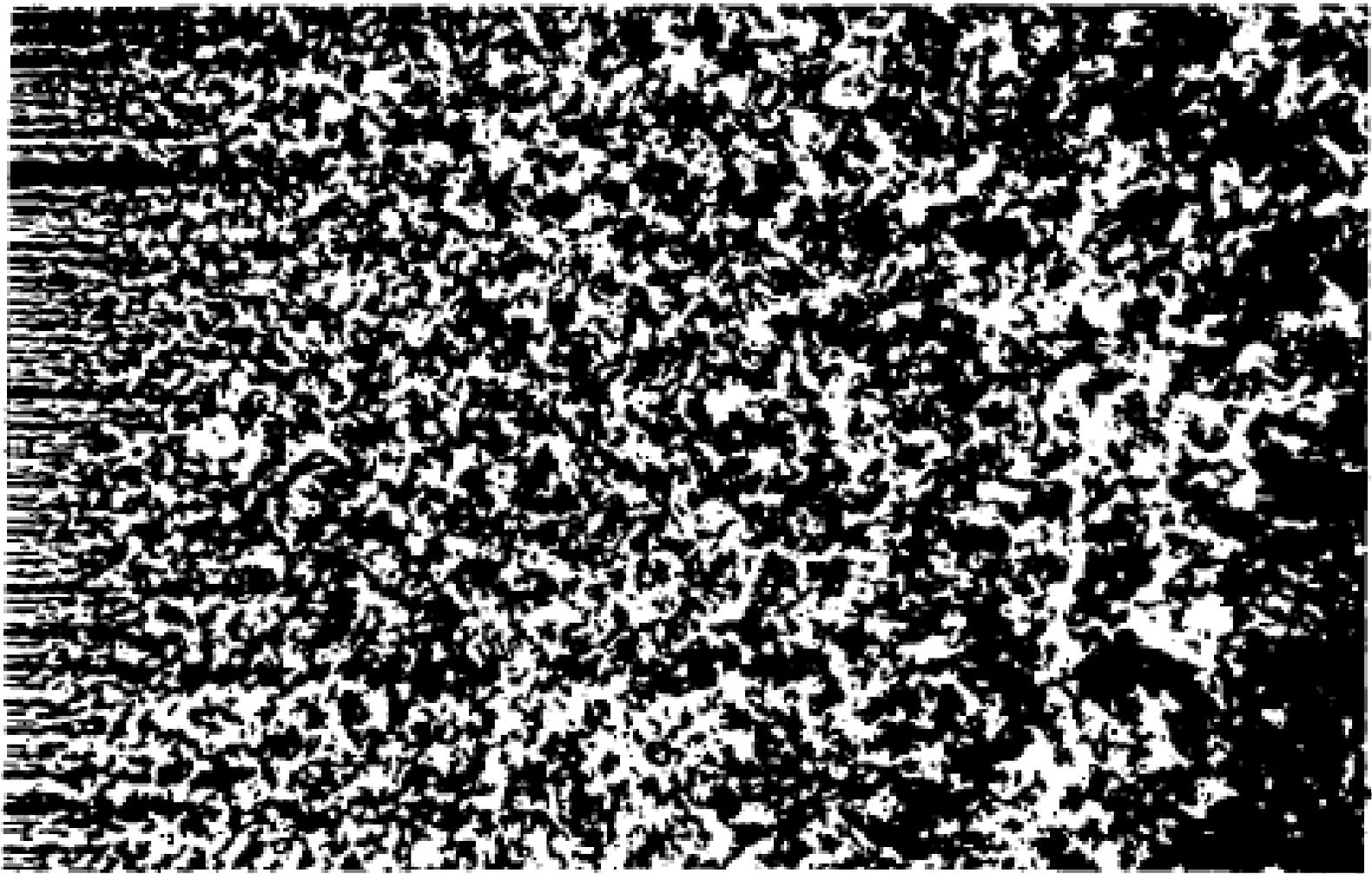
1. macroscopic motion is directed: *flow*
2. microscopic motion has cross-flow component: random *Brownian motion* (from molecular interaction)
 - carries momentum in cross-flow direction
 - scale of Brownian motion:
 - \sim free path length
 - (in air at normal conditions $\approx 10^{-7}$ m)

In Contrast: **Turbulent Flow**



Turbulent Channel Flow

1. trajectories cross often
 2. trajectories \neq streamlines
 - trajectories are not parallel
 - instantaneous profiles \neq mean profile
 3. mean velocity profile is not parabolic (flatter in center, steeper near wall)
 - no-slip condition at wall
 - momentum transport towards wall by cross-flow components of trajectories
 - scale of cross-flow component \approx scale of channel
 - momentum transfer depends on flow configuration, not on the fluid
- ← lines of bubbles (formed by electrode) travel downstream and become progressively deformed



Laborexperiment: Erzeugung von homogener Turbulenz hinter einem Gitter. Durch das "Vermischen" von instabilen Wirbeln bildet sich schnell ein homogenes Feld aus. So wie es in Richtung stromabwärts zerfällt, liefert es eine hilfreiche Approximation für homogene Turbulenz (d.h. statistisch gleich an jedem Punkt im Raum).

Arten der Mittelwertbildung

- Wenn man in-situ Sensoren (z.B. Thermometer) verwendet, ist die Bildung von Volumenmitteln so gut wie unmöglich, da es schwierig ist, diese Sensoren an "allen" Standorten und in allen Höhen in der GS einzusetzen.
- Fernerkundungssensoren (z.B. Radars, Lidars und Sodars) können Volumen in der Atmosphäre abtasten, was die Bildung eines Volumenmittelwertes einer einzelnen Größe (Variable) möglich macht.
- Flächenmitteln werden in der Bodenschicht für kleinere Bereiche häufig gebildet. Dazu stellt man ein Messnetz von Instrumenten (am Boden, auf Masten) auf.
- Mittel entlang einer Strecke (z.B. entlang einer Strasse) werden durch entsprechend lineare Anordnung der Messinstrumente durchgeführt.

Arten der Mittelwertbildung

- Mittels Sensoren auf fahrbaren Plattformen (LkW, Flugzeuge) kann man quasi-linienförmige Mittelwerte erhalten.
- Eigentlich gibt es keine "wahren" Mittelwerte entlang einer Strecke oder in einem Volumen, da sich aufgrund turbulenter Vorgänge während der Messung die Bedingungen entlang einer Messstrecke ändern.
- Die meisten Messstrecken sind als Kompromiss gewählt zwischen langen Strecken (um die statistische Signifikanz durch eine Vielzahl von Messpunkten zu erhöhen) und kurzen Zeitintervallen (um den Einfluss des Tagesgang zu minimieren, der in der GS ausgeprägt ist).

Bildung von zeitlichen Mittelwerten

- Zeitliche Mittelwerte werden häufig verwendet. Berechnet werden diese meist von Messsensoren einer einzelnen Station.
- Da diese Art von Beobachtungen an einem festen Ort relativ einfach durchgeführt werden können, ist die zeitliche Mittelwertbildung in der unteren GS sehr beliebt.
- Einige in der Vertikalen messende Fernerkundungssensoren benutzen die Methode der zeitlichen Mittelung, um die mittlere und obere GS zu beobachten.

Bildung von zeitlichen Mittelwerten

- Für Untersuchungen der Turbulenz, die sowohl homogen als auch stationär (statistisch gesehen konstant mit der Zeit) ist, sollten die Zeit-, Raum- und Ensemblemittelwerte gleich sein.
- Dies wird als Ergodenbedingung* (engl. ergodic condition) bezeichnet, die oft angenommen wird, um das Problem der Turbulenz handhabbar zu machen.

* Ergodenhypothese (kommt aus der statistischen Mechanik): Sie besagt, dass ein zeitlicher Mittelwert gleich dem Raum- (Orts-) bzw. Ensemblemittelwert (Scharmittelwert) ist.

Regeln der Bildung von Mittelwerten

1. $\bar{c} = c$ c : allgemeine Konstante

2. $\overline{cA} = c\bar{A}$

3. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$

4. $\overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}\bar{B}$

5. $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$

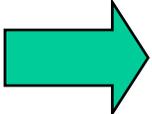
6. $\overline{\frac{dA}{dt}} = \frac{d\bar{A}}{dt}$

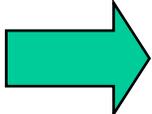


Mittelwert eines Mittelwertes

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ Ein gemittelter Wert wirkt wie eine Konstante, wenn er das zweite Mal über den gleichen Zeitraum gemittelt wird. \Rightarrow

Definition:
$$\overline{A}(T, s) = \frac{1}{T} \int_0^T A(t, s) dt$$


$$\frac{1}{T} \int_0^T \overline{A}(T, s) dt = \overline{A}(T, s) \frac{1}{T} \int_0^T dt = \overline{A}(T, s)$$


$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

genauso

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{A}\overline{B}$$

Differentiation

Leibnitz' Theorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} A(t, s) ds = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \frac{\partial A(t, s)}{\partial t} ds + A(t, s_2) \frac{ds_2}{dt} - A(t, s_1) \frac{ds_1}{dt}$$

Wenn S_1 und S_2 unabhängig von der Zeit sind, folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} A(t, s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial A(t, s)}{\partial t} ds$$

Differentiation

Für den Spezialfall, dass S_1 und S_2 (=Grenzen der Integration) konstant sind mit der Zeit, kann man einfach schreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_s A ds = \int_s \frac{\partial A}{\partial t} ds$$

d.h., die Reihenfolge von Integration und Differentiation kann einfach vertauscht werden.

Multiplikation beider Seiten mit $1/S$ und $S = S_2 - S_1$ ergibt:

$$\frac{d({}^s \bar{A})}{dt} = \overline{{}^s \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)}$$

Dieser Spezialfall ist für eine in ihrer Mächtigkeit variablen GS nicht immer gültig!

Beispiel

Angenommen wir möchten die Änderungsrate eines mittleren Mischungsverhältnisses \bar{r} mit der Zeit finden, wobei das GS-Mittel definiert ist durch die Integration über die Höhe der GS, mit anderen Worten von $z = 0$ bis $z = z_i$.

Da z_i mit der Zeit variiert, können wir das Leibnitz Theorem benutzen und erhalten:

$$\frac{d}{dt} [z_i \int_0^{z_i} \bar{r}] = z_i \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right] + \bar{r}(t, z_i^+) \frac{dz_i}{dt}$$

wobei z_i^+ die Höhe gerade oberhalb der GS bestimmt (z_i ist die Oberkante der GS). Die Gleichung beschreibt die Änderung der Höhe der Grenzschicht und des Mischungsverhältnis.

Die spektrale Lücke

Betrachten wir nochmals die spektrale Lücke.

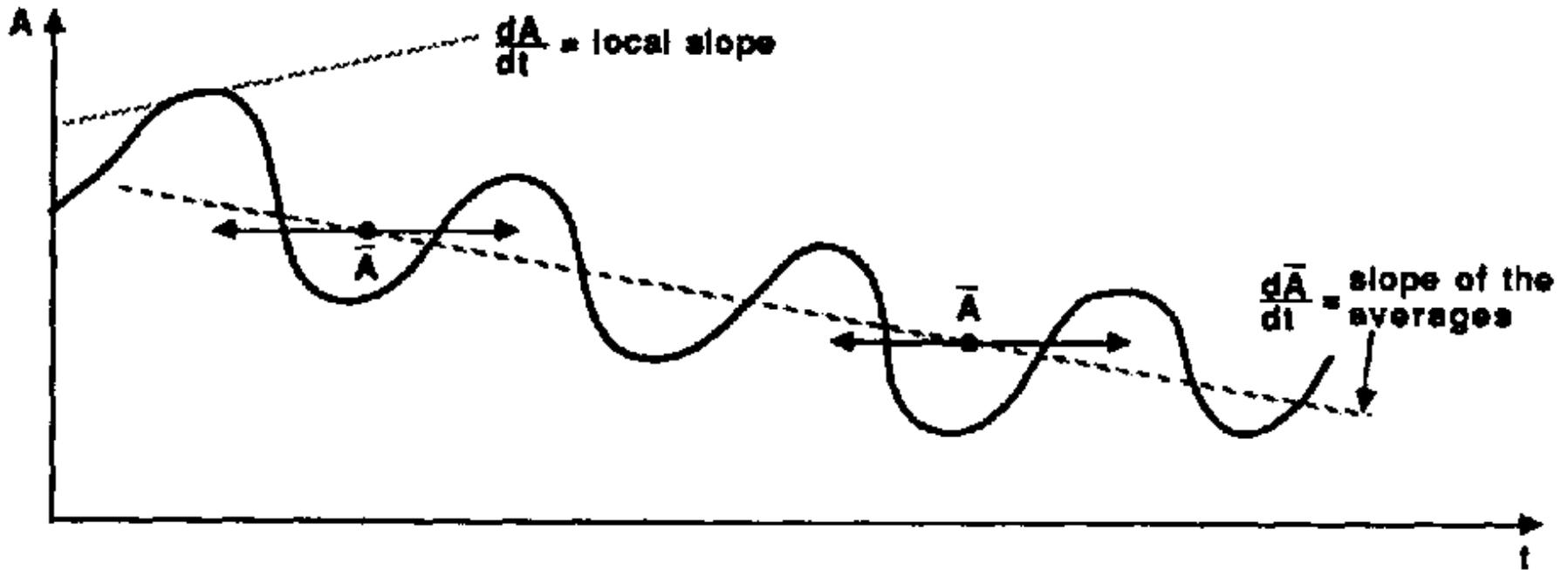
Bei einer Mittelung über 30 Minuten bis 1 Stunde werden turbulente Fluktuationen eliminiert und längere Perioden in der Zeit erhalten.

Wir haben vorher gesehen, dass eine über 30 Minuten gemittelte Windgeschwindigkeit mit Perioden von Stunden variieren kann. Damit kann man den 30-Minuten-Mittelwert der zeitlichen Ableitung der variablen A benutzen, um herauszufinden, wie \bar{A} über längere Perioden variiert:

$$\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^t} = \frac{d^t \bar{A}}{dt}$$

Mit anderen Worten, der zeitliche Mittelwert einer lokalen Änderung ist gleich der zeitlichen Änderung des Mittelwertes.

siehe Abb.



Schematischer Vergleich der Änderungsrate zeitlich gemittelter Werte (=slope of the average) mit dem Mittel lokaler zeitlicher Veränderungen (=local slope). Die Mittelungsperiode T ist durch die Breite der horizontalen Pfeile angezeigt.

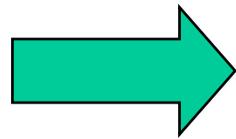
Reynolds Mittelung

Anwendung der Regeln auf Mittelwerte und Fluktuationen:

Regeln
3 und 5:

$$A = \bar{A} + a' \quad B = \bar{B} + b'$$

$$\overline{A} = \overline{\bar{A} + a'} = \overline{\bar{A}} + \overline{a'} = \bar{A} + \bar{a}'$$



$$\bar{a}' = 0 ; \bar{b}' = 0$$

$$\overline{AB} = \overline{(\bar{A} + a')(\bar{B} + b')}$$

$$= \overline{(\bar{A}\bar{B} + a'\bar{B})(\bar{A}b' + a'b')}$$

$$= \overline{\bar{A}\bar{B} + 0 + 0 + a'b'} = \bar{A}\bar{B} + \underline{\overline{a'b'}}$$

≠ 0 ! ; dieser nicht-lineare Term ist sehr wichtig in der Turbulenztheorie !

Varianz

Eine statistische Maßzahl für die Streuung von Messwerten um einen Mittelwert ist die Varianz σ^2 , definiert durch

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})^2$$

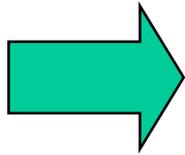
(im engl. 'biased' (befangene) Varianz genannt). Sie ist ein gutes Maß für die Streuung einer bestimmten Probe von beobachteten Variablen in der GS, aber nicht das beste Maß der Streuung einer Gesamtpopulation von möglichen Beobachtungen. Eine bessere Abschätzung der Streuung einer Gesamtpopulation liefert hier ('unbiased' Varianz)

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})^2$$

Für $N \gg 1$ ist der Unterschied zwischen den beiden Abschätzungen gering.

Standardabweichung

Der turbulente Anteil einer Variablen ist: $a' = A - \bar{A}$.



$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i'^2 = \overline{a'^2}$$

Dadurch können turbulente Größen wie

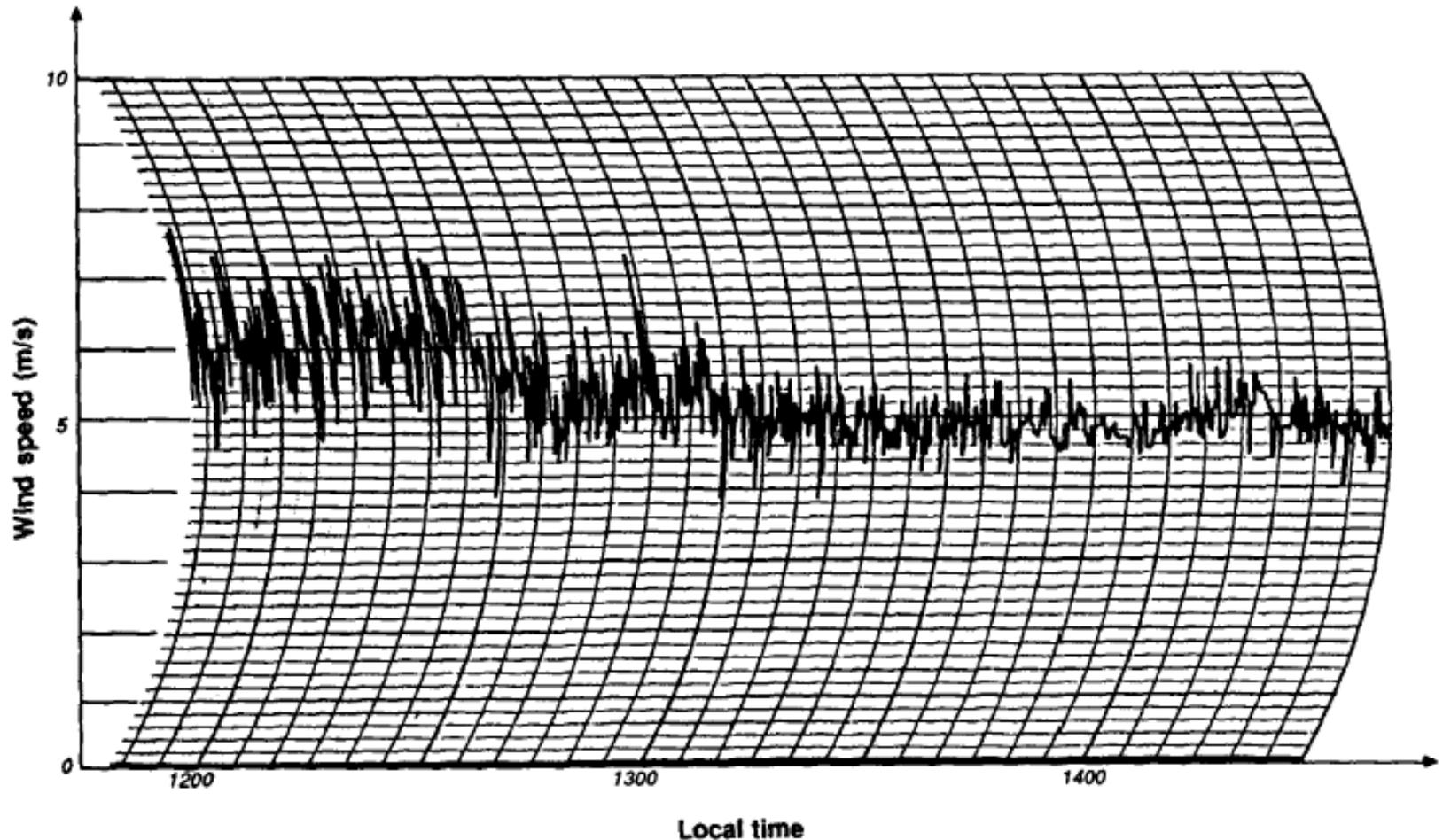
$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{\theta'^2}, \overline{r'^2}, \overline{q'^2}$$

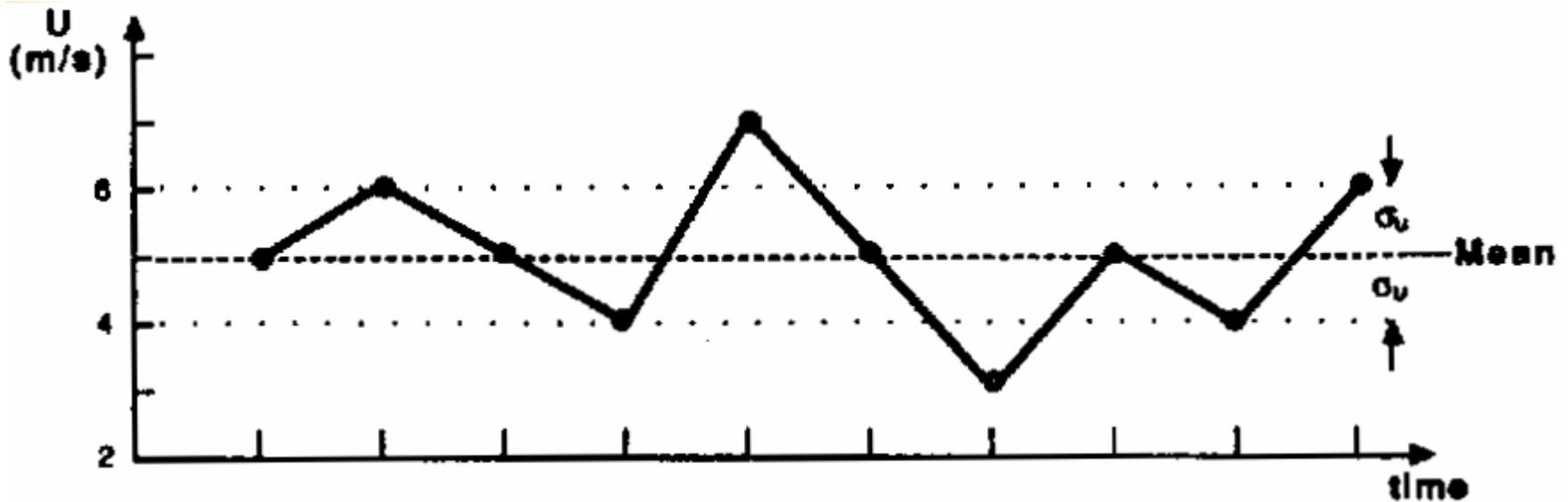
interpretiert werden als Varianz.

Die Standardabweichung ist definiert als Quadratwurzel der Varianz:

$$\sigma_A = \sqrt{\overline{a'^2}}$$

Die Standardabweichung hat immer die gleiche Dimension wie die ursprüngliche Variable. In der Abbildung erkennt man, dass die Standardabweichung zur Mittagszeit 0.5-0.6 m s^{-1} beträgt, nach 14:00 Uhr nur noch etwa 0.3 m s^{-1} .





Zusammenhang zwischen der Standardabweichung und Turbulenzvariationen:

- Durchgezogene Linie verbindet die Datenpunkte,
- dickere gestrichelte Line gibt den Mittelwert an,
- gepunktete Linien zeigen die einfache Standardabweichung oberhalb und unterhalb des Mittelwertes.

Intensität der Turbulenz

Man erwartet, dass die Intensität der Turbulenz nahe dem Erdboden anwächst, wenn die mittlere Geschwindigkeit U zunimmt.

Deshalb wird oft eine dimensionslose Maßzahl der Intensität der Turbulenz I wie folgt definiert:

$$I = \sigma_U / \bar{U}$$

Für eine mechanisch angetriebene Turbulenz erwartet man, dass σ_U eine einfache Funktion von U ist.

Zur Erinnerung sei gesagt, dass $I < 0.5$ sein muss, damit die Hypothese von Taylor Gültigkeit hat.

Kovarianz und Korrelation

In der Statistik ist Kovarianz zwischen zwei Variablen wie folgt definiert:

$$\text{covar}(A, B) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})(B_i - \bar{B})$$

Anwendung der Reynolds Mittelungsmethode:

$$\text{covar}(A, B) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a'_i b'_i = \overline{a' b'}$$

Somit hat das schon zuvor eingeführte nicht-lineare Turbulenzprodukt die gleiche Bedeutung wie die Kovarianz.

Interpretation der Kovarianz

- Die Kovarianz bezeichnet den Grad der gemeinsamen Beziehung zwischen zwei Variablen A und B.
- Beispiel: A = Lufttemperatur T, B = vertikale Geschwindigkeit w.
- An einem warmen Sommertag über Land erwartet man aufsteigende warme Luft (T' und w' beide > 0) und kühlere Luft (kühler als das Mittel) sinkt ab (T' und w' beide < 0).
- $\Rightarrow \overline{w'T'} > 0$ im Mittel, d.h. w und T ändern sich gleichförmig.
- Die Kovarianz $\overline{w'T'}$ (vertikaler Wärmefluss) ist auch tatsächlich positiv in den unteren 80% der konvektiv durchmischten ML.

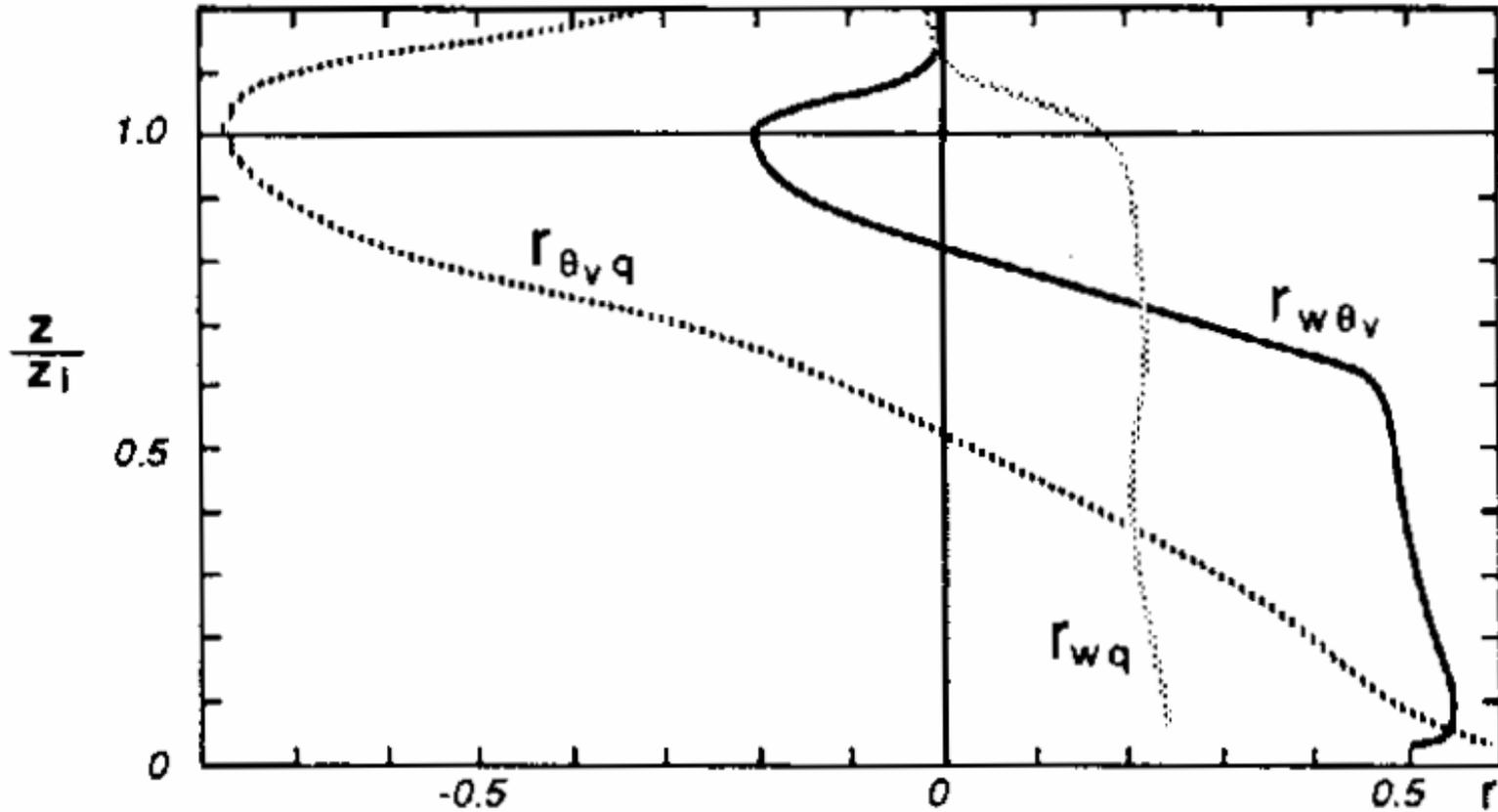
Normalisierte Kovarianz

- In machen Fällen ist die sogenannte normalisierte Kovarianz hilfreich.
- Eine solche Beziehung ist definiert als der lineare Korrelationskoeffizient:

$$r_{AB} = \frac{\overline{a'b'}}{\sigma_A \sigma_B}$$

- Per Definition variiert diese Variable zwischen -1 und $+1$.
- Bei zwei Variablen, die perfekt korreliert sind (miteinander variieren), ergibt sich $r = 1$. Bei zwei Variablen, die perfekt negativ korreliert sind (gegensätzlich variieren), ergibt sich $r = -1$.
- Bei Variablen, die nicht miteinander variieren, ergibt sich $r = 0$.

Beispiel



Typische Profile in der konvektiv durchmischten Grenzschicht.

Turbulente kinetische Energie

- Die gebräuchliche Definition der kinetischen Energie (KE) ist $0.5m\mathbf{U}^2$. ($\mathbf{U} = u + v + w$)
- Für ein Fluid benutzt man häufig KE/Einheitsmasse = $0.5\mathbf{U}^2$.
- Man unterscheidet zwischen mittlerer KE (MKE) und turbulenter KE (engl. turbulence kinetic energy, TKE):

$$\text{MKE} / m = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$$

$$\text{TKE} / m = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

Verfügbare KE/Einheitsmasse

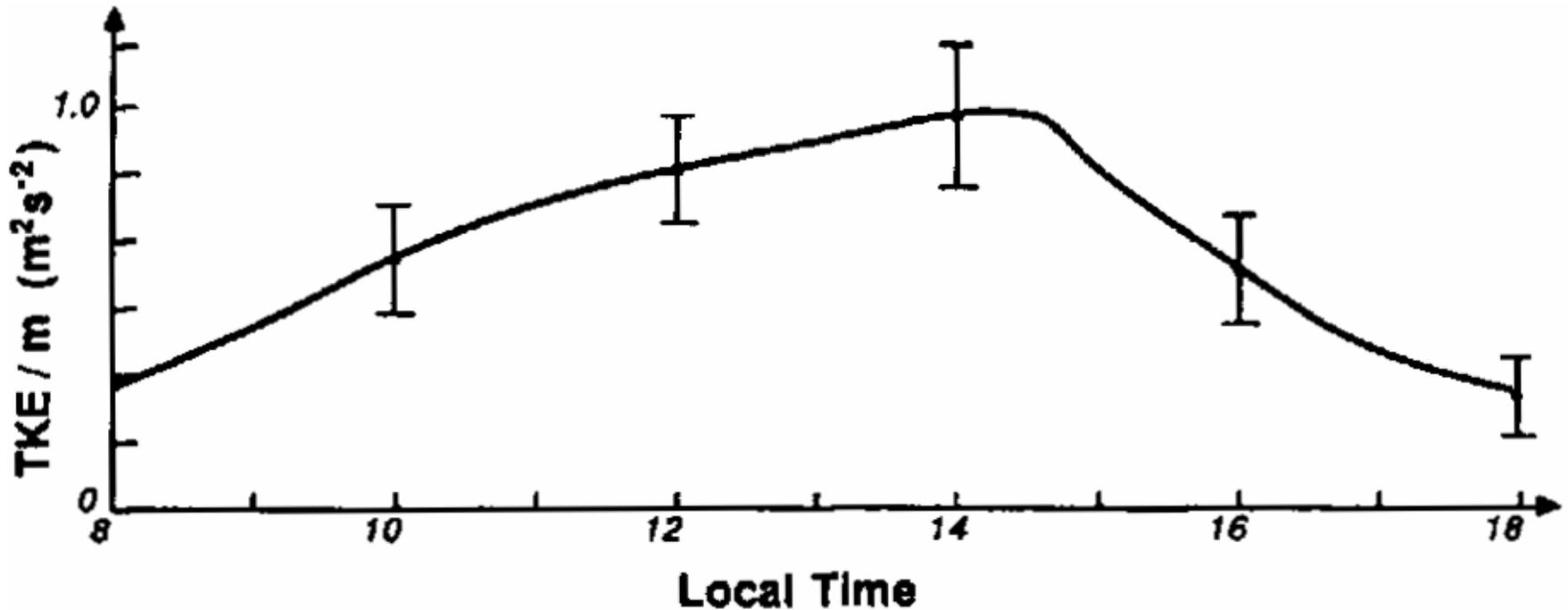
Turbulente kinetische Energie

- Man kann erwarten, dass die TKE stark variiert ⇒
Definition einer mittleren TKE/Einheitsmasse:

$$\text{TKE} / m = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

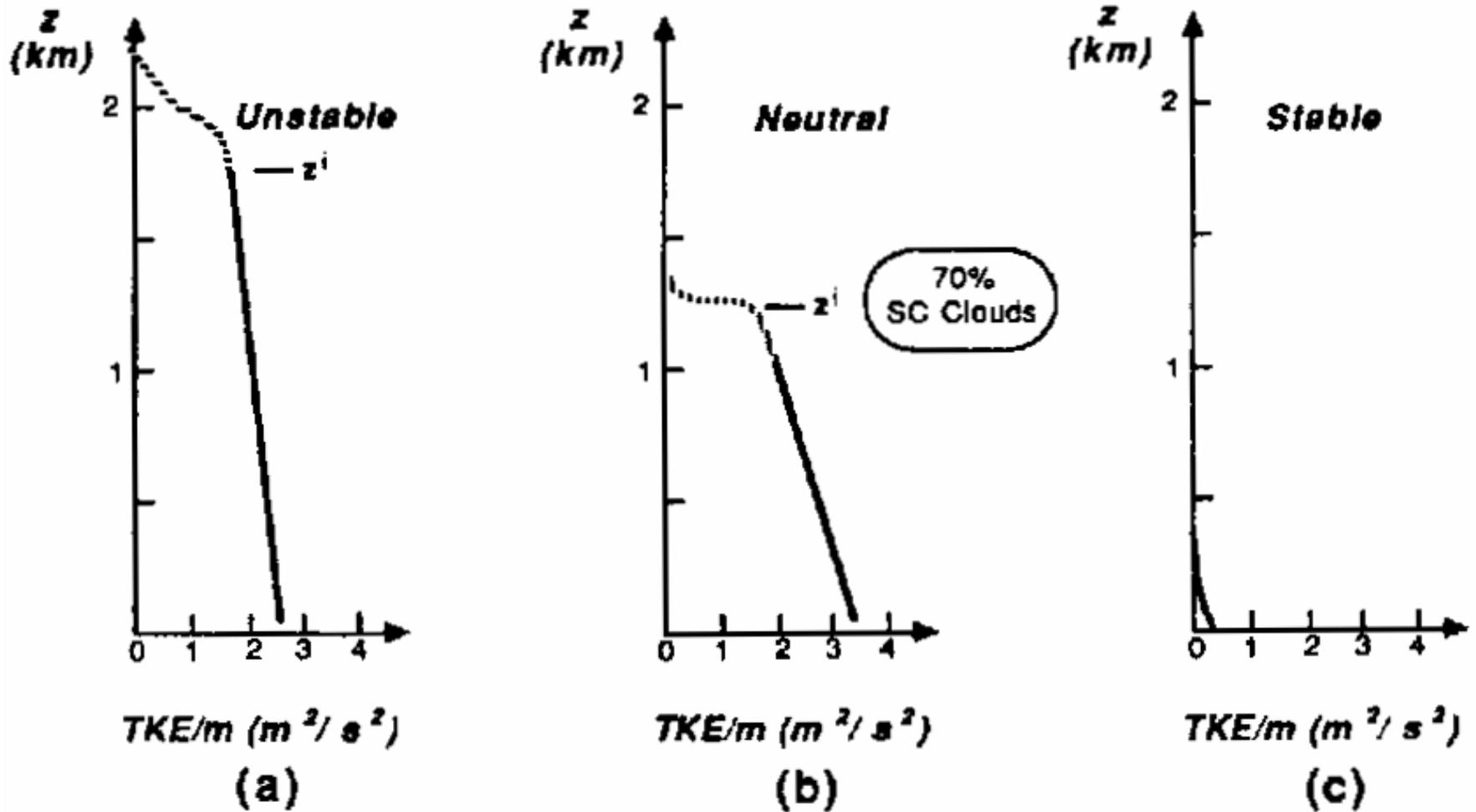
- Beachte das Auftreten der Varianz! Man kann direkt erkennen, dass es eine direkte Beziehung zwischen der mittleren kinetischen Energie der Turbulenz und der Varianz gibt.
- Kinetische Energie der Turbulenz ist eine der wichtigsten Größen, um die turbulente Grenzschicht zu untersuchen!

Typische Variation der TKE am Tage unter konvektiven Bedingungen



$$\text{TKE} / \text{m} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

Flugzeugmessung des Tagesganges in 300 m Höhe über Grund, Tennessee, August 1978.



Beispiele der TKE/m für verschiedene GS. (a) Konvektiv durchmischte GS am Tage, wolkenlos und schwache Winde. (b) Nahezu neutral geschichteter Atmosphäre mit starken Winden ($10\text{-}15 \text{ m s}^{-1}$ nahe der Erdoberfläche) und durchbrochener Bewölkung. (c) Nächtliche stabile GS um 22:00 Uhr Lokalzeit.

Kinematischer Fluss

Ein "Fluss" beschreibt den Transfer (Transport) einer Größe (Variablen) pro Einheitsfläche und Einheitszeit.

Beispiele:

| <u>Flux</u> | <u>Symbol</u> | <u>Units</u> |
|-------------|----------------|---|
| mass | \tilde{M} | $\left[\frac{\text{kg}_{\text{air}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ |
| heat | \tilde{Q}_H | $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ |
| moisture | \tilde{R} | $\left[\frac{\text{kg}_{\text{water}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ |
| momentum | \tilde{F} | $\left[\frac{\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ |
| pollutant | $\tilde{\chi}$ | $\left[\frac{\text{kg}_{\text{pollutant}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ or $\left[\frac{\text{kg}_{\text{pollutant}}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ |

- Der Fluss der Feuchte wird manchmal umgeschrieben als Fluss latenter Wärme:

$$\tilde{Q}_E = L_v \tilde{R}$$

Latente Wärme
der Verdampfung



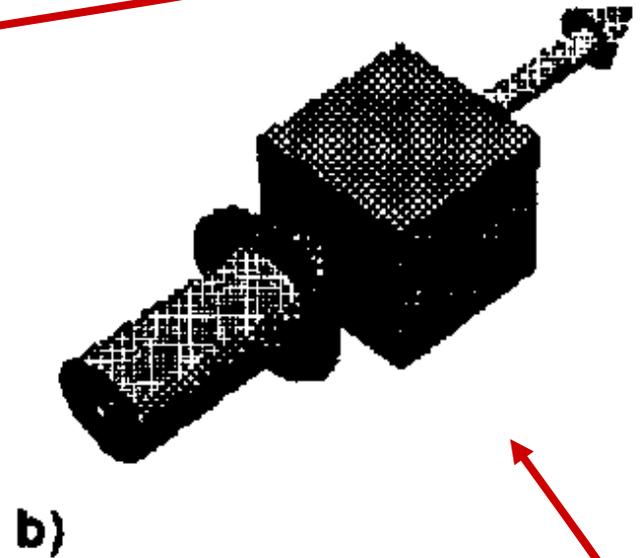
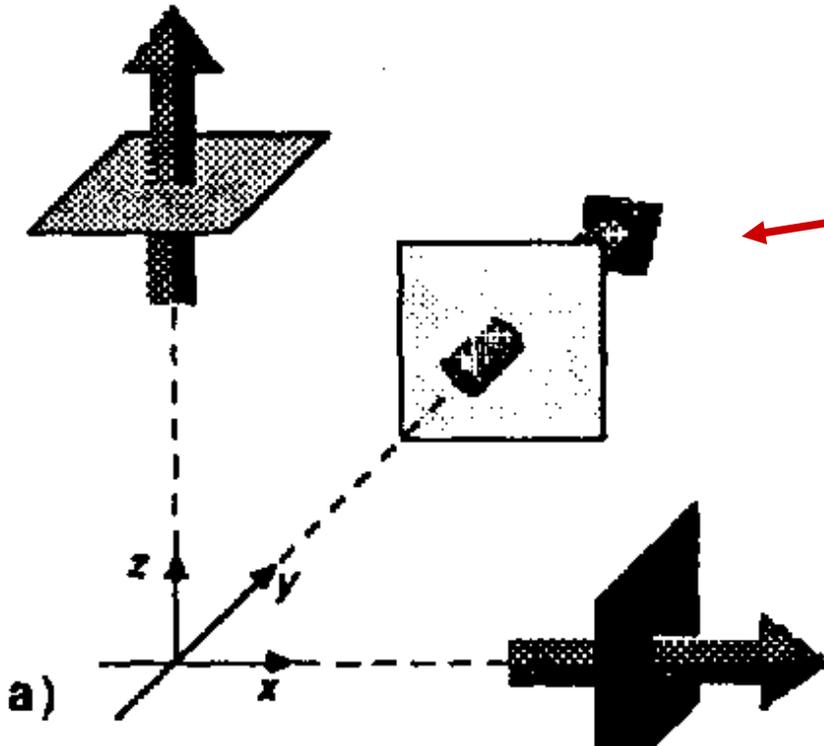
$L_v \cong 2.45 \times 10^6 \text{ J/kg}$
in der GS im Sommer
mit 20°C

- Selten wird eine Größe wie 'Impuls' direkt gemessen. Gemessen werden Größen wie Temperatur und Windgeschwindigkeit.

⇒ Der "kinematische Fluss" wird definiert durch die Division eines Flusses (s.o.) durch die Dichte von feuchter Luft ρ_{air} . Im Falle des sensiblen Wärmeflusses muss zusätzlich durch die spezifische Wärme bei konstanten Druck c_p dividiert werden.

$\rho c_p = 1.216 \times 10^3 \text{ W m}^{-3} / (\text{K m s}^{-1})$ erlaubt die Umwandlung von normalen Wärmeflüssen in kinematische Wärmeflüsse.

- Meistens können Flüsse in drei Komponenten zerlegt werden: eine vertikale und zwei horizontale Komponenten.

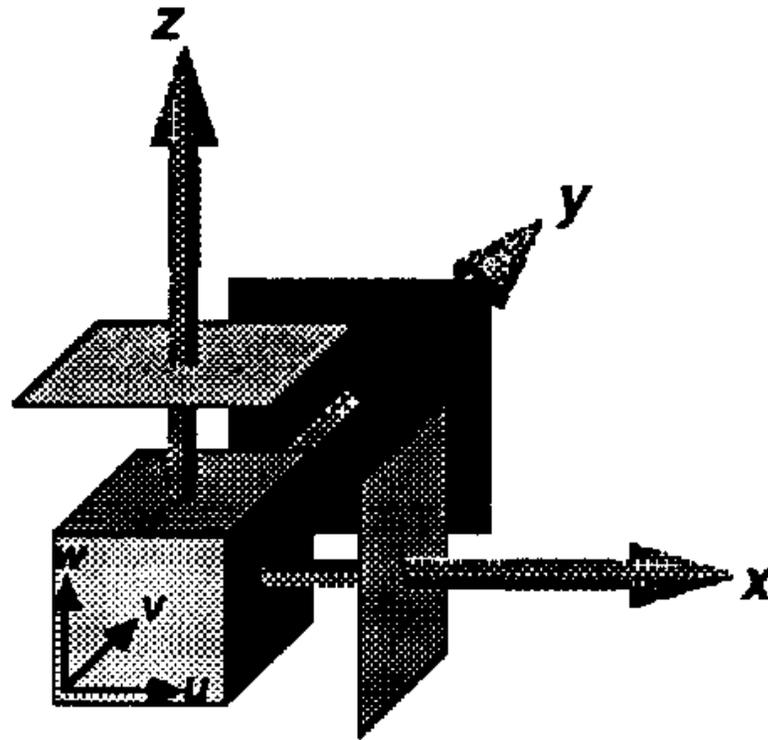


- Wenn ein größerer Fluss in ein Volumen hinein fließt als heraus kommt, muss die Konzentration der Größe in dem Volumen zunehmen.

Flüsse können als Vektoren dargestellt werden.

- Im Falle des Impulses kann der Fluss in einer Richtung der Impulsfluss von u , v oder w sein \Rightarrow es gibt neun Komponenten von diesem Fluss. Jeder dieser drei Impulskomponenten kann durch eine senkrechte Fläche hindurch gehen, in jeder der drei kartesischen Richtungen.

Momentum can be split into the three cartesian directions, based on the u , v , and w components of wind. Momentum flux can consist of the transfer of any of these three components in any of three directions: x , y , and z , yielding a total of nine momentum flux components.



- Der Impulsfluss ist ein Tensor 2-ter Ordnung. (Ein Skalar ist ein Tensor 0-ter Ordnung; ein Vektor ist ein Tensor 1-ter Ordnung.)
- Beispiel: uw ist der kinematische vertikale (w) Impulsfluss in x -Richtung; wu ist der kinematische horizontale (u) Impulsfluss in z -Richtung.
- Die Flüsse können in mittlere und turbulente Anteile zerlegt werden (siehe oben).

➤ Einige der Flüsse, die in direktem Zusammenhang mit dem mittleren Wind (d.h. der Advektion) stehen, sind:

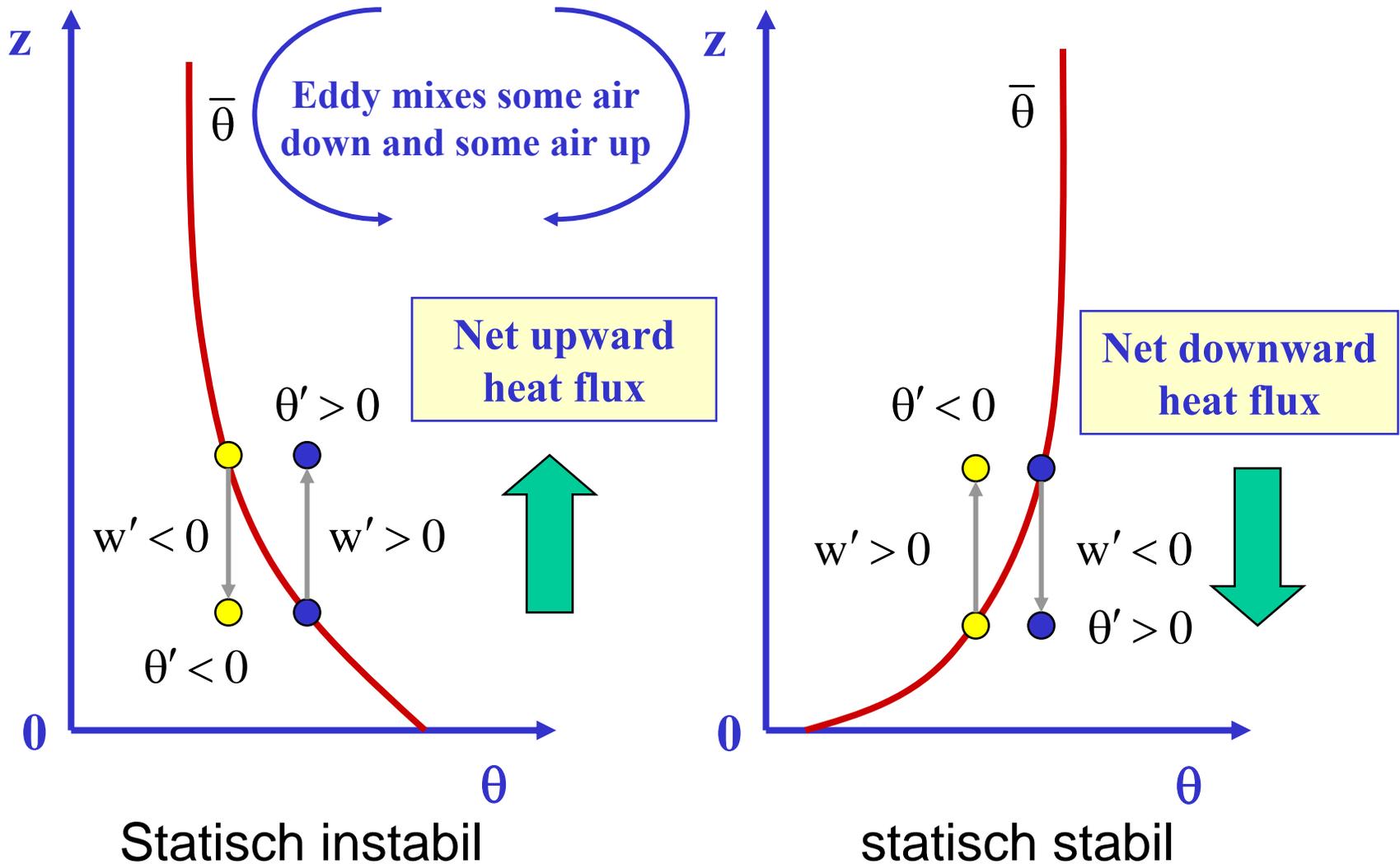
- vertikaler kinematischer advektiver Wärmefluss $\bar{w}\bar{\theta}$
- vertikaler kinematischer advektiver Feuchtefluss $\bar{w}\bar{q}$
- kinematischer advektiver Wärmefluss in x-Richtung $\bar{u}\bar{\theta}$
- kinematischer advektiver horizontaler Impulsfluss (u) $\bar{w}\bar{u}$
in z-Richtung (vertikal)
= kinematischer advektiver vertikaler Impulsfluss (w) in
x-Richtung (horizontal)

➤ Flüsse in anderen Richtungen können entsprechend ermittelt werden.

Turbulenter Transport

- Bewegungen in Fluiden können (Zustands-) Größen (Variable) "transportieren", woraus sich Flüsse ergeben.
- Turbulenz ist ein Bestandteil der Bewegung.
- Daraus ergibt sich, dass auch Turbulenz Größen transportiert.
- Ein Term wie $\overline{w'\theta'}$ sieht einem kinematischen Term basierend auf mittleren Werten (siehe oben) ähnlich, außer dass die Störterme anstelle der mittleren Werte von w und θ verwendet werden.
- Wenn Turbulenz vollständig zufällig ist, kann ein positives $w'\theta'$ in einem Augenblick ein negatives $w'\theta'$ zu einem späteren Moment auslöschen und für den mittleren turbulenten Wärmefluss zu einem Wert nahe Null führen.

- Es gibt Situationen, wo der mittlere turbulente Fluss $\overline{w'\theta'}$ möglicherweise signifikant von Null verschieden ist.



Turbulenter Transport

- Beachte, dass Turbulenz Wärme transportieren kann, d.h. $\overline{w'\theta'} \neq 0$, obwohl es keinen Massentransport gibt, d.h. $\overline{w'} = 0$!
- Diese Form der Flüsse markiert die statistische Form der Turbulenz: Ein Fluss wie $\overline{w'\theta'} \neq 0$ ist lediglich eine statistische Kovarianz.

- vertikaler kinematischer turbulenter Wärmefluss $\overline{w'\theta'}$
- vertikaler kinematischer turbulenter Feuchtefluss $\overline{w'q'}$
- kinematischer turbulenter Wärmefluss in x-Richtung $\overline{u'\theta'}$
- kinematischer turbulenter horizontaler Impulsfluss (u) $\overline{w'u'}$
in z-Richtung (vertikal) 
= kinematischer turbulenter vertikaler Impulsfluss (w)
in x-Richtung (horizontal).

Turbulenter Transport

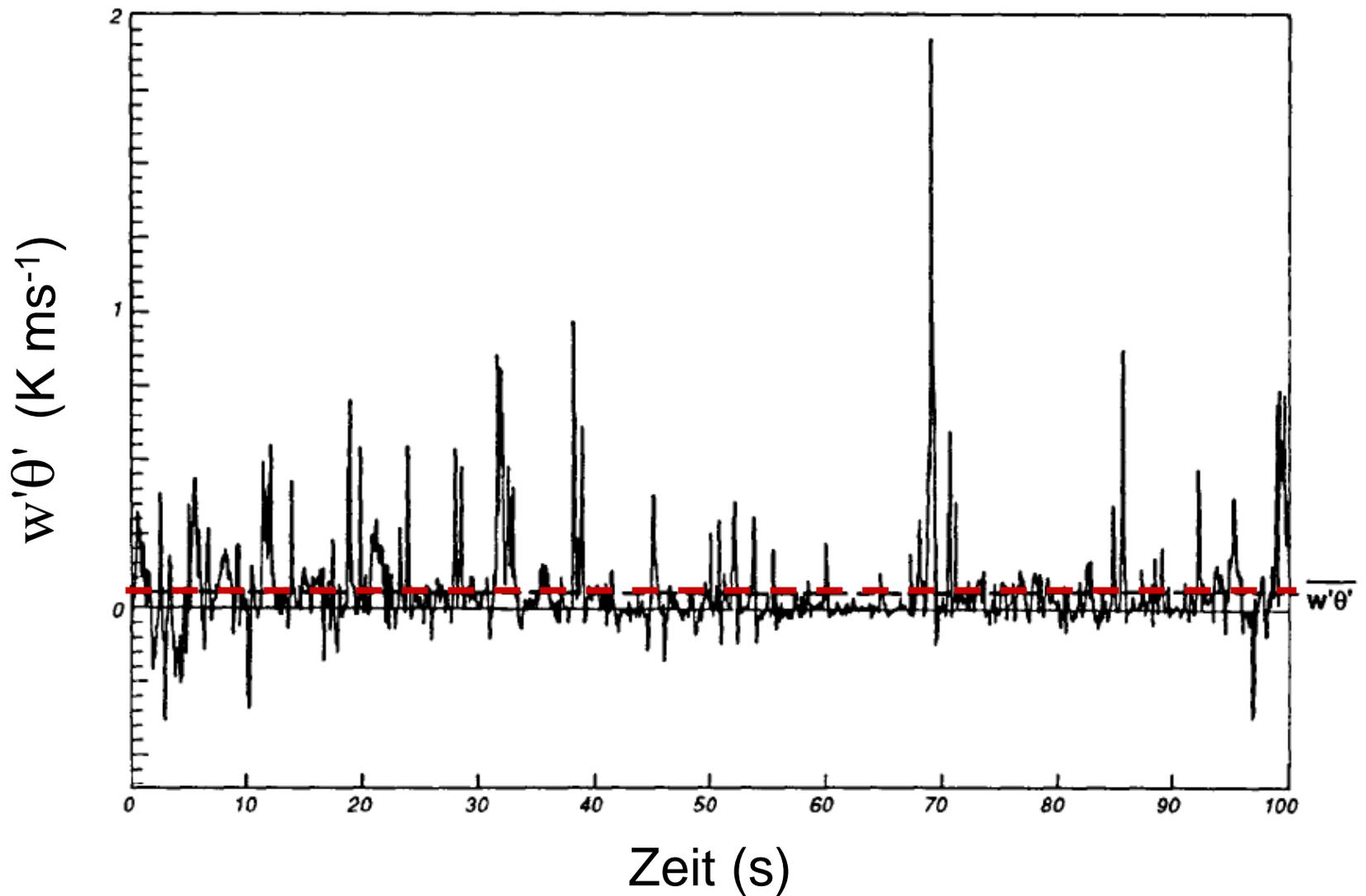
- Wichtig: In der GS gilt größtenteils $\overline{w} \cong 0$!
- Dadurch sind die vertikalen advektiven Flüsse im Vergleich mit den vertikalen turbulenten Flüssen in der Regel vernachlässigbar.
- Eine vergleichbare Aussage kann für die horizontalen Flüsse nicht getroffen werden. Starke mittlere horizontale Winde und starke Turbulenz können jeweils Flüsse in der gleichen Größenordnung verursachen.

Turbulenter Transport

- Turbulenz in der realen Atmosphäre besteht normalerweise aus vielen großen positiven und negativen Werten der momentanen Flüsse, wie z.B. der Wärmefluss $w'\theta'$.
- Erst nach entsprechender Mittelung wird ein kleiner aber signifikanter Nettowärmefluss $\overline{w'\theta'}$ offensichtlich.



Beispiel



Vom Flugzeug aus gemessener kinematischer Wärmefluss $w'\theta'$ am Erdboden. Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet den mittleren Wärmefluss $\overline{w'\theta'}$.

Spannung

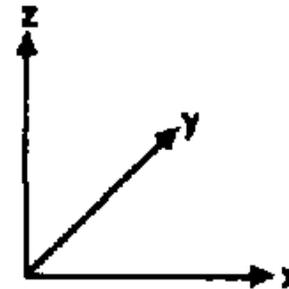
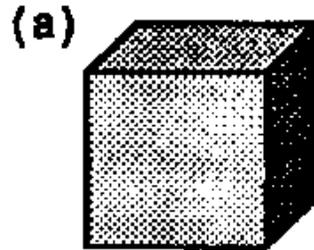
- Es wurde soeben gezeigt, dass die Kovarianz einen turbulenten Fluss beschreibt. Aber ein Impulsfluss ist auch analog zu einer Spannung (Belastung).
- Spannung ist eine Kraft, die versucht einen Körper zu verformen.
- Sie wird gemessen als Kraft pro Einheitsfläche.
- Drei Typen von Spannung müssen berücksichtigt werden:
 - Druck,
 - Reynolds Spannung und
 - viskose Scherspannung.



Druck

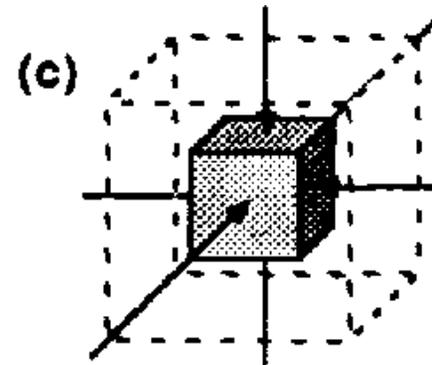
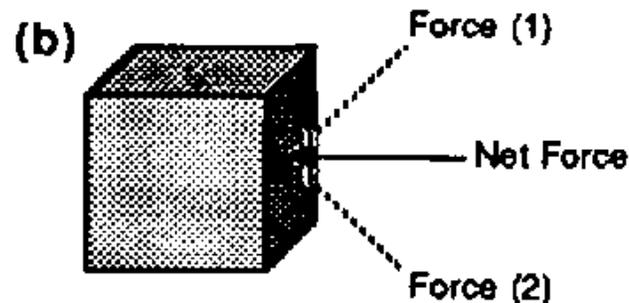
- Druck ist isotrop (von der Richtung unabhängig) und deshalb eine skalare Größe.

Anfangszustand



Druck

Wirkung auf einen Würfel



Die Kraft wirkt senkrecht auf die Flächen \Rightarrow Kompression oder Expansion

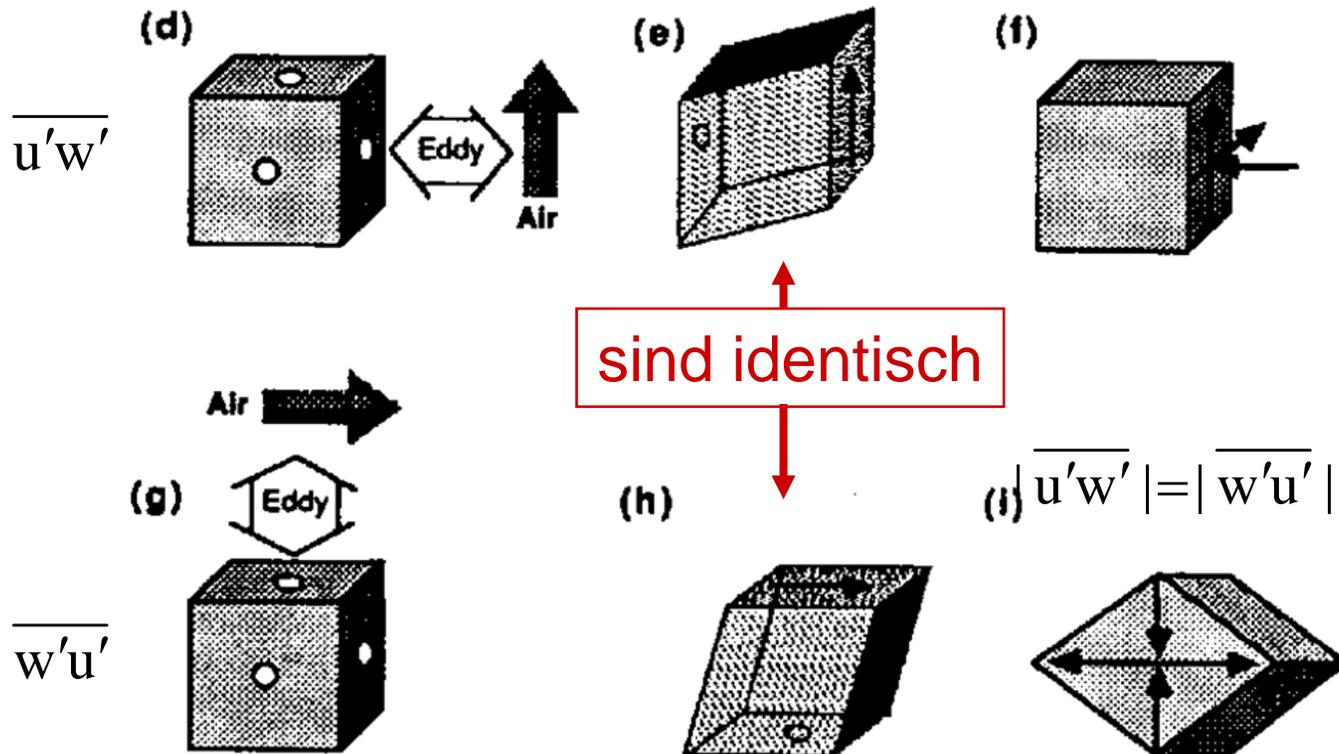
Reynolds Spannung

- Turbulenter Impulsfluss wirkt wie eine Spannung (Belastung) und wird Reynolds Spannung τ_{Reynolds} genannt.
- Es ist keine "richtige" Spannung mit Einheiten Kraft pro Einheitsmasse.

Reynolds Spannung

- Reynolds Spannung existiert nur, wenn sich die Flüssigkeit oder das Gas in turbulenter oder wellenförmiger Bewegung befindet! Der Reynolds Spannungstensor ist symmetrisch.

Reynolds Spannung: Einfluss auf einen Würfel

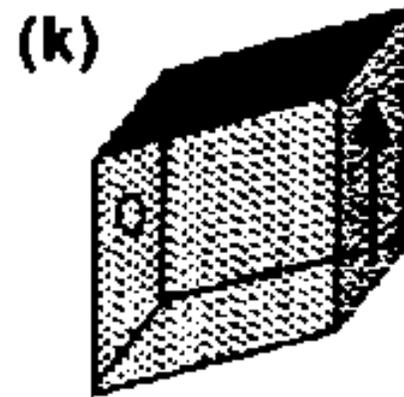
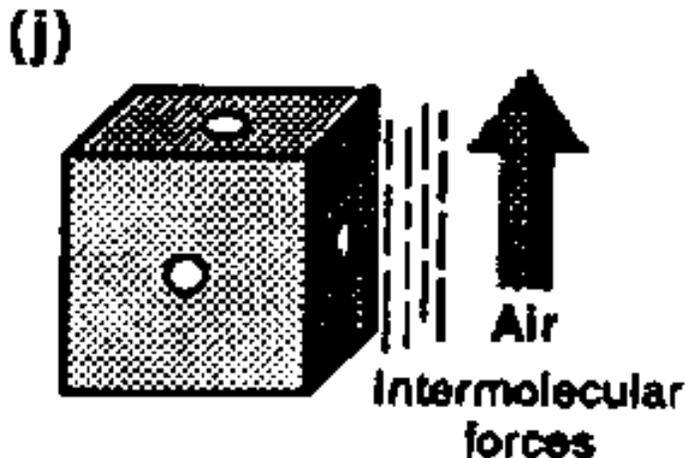


Viskose Scherspannung

- Viskose Scherspannung existiert, wenn es in einem Fluid eine Scherbewegung gibt. Diese Bewegung kann laminar oder turbulent sein.

Viskose Scherspannung

Wirkung auf einen Würfel



- In diesem Fall sind molekulare Bewegungen für den Transport von Impuls verantwortlich und nicht turbulente Eddies. Dies ist der wesentliche Unterschied zur Reynolds Spannung.

Viskose Scherspannung

- Ein Fluid, für das die viskose Scherspannung linear abhängig ist von der Scherung (Deformation), wird ein 'Newton'sches Fluid' genannt. Die Spannung τ_{ij} ist gegeben durch:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu_B - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ für } i=j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \end{array}$$

Dynamischer
Viskositätskoeffizient

'Bulk' (Volumen)
Viskositätskoeffizient

μ_B ist nahe Null für die meisten Gase

- τ_{ij} wird interpretiert als Kraft pro Einheitsmasse in der x_i -Richtung, die auf eine Fläche wirkt, die senkrecht zur x_j -Richtung ist.

Viskose Scherspannung

- Die viskose Scherspannung kann in die kinematische Form gebracht werden (Division durch ρ): Die kinematische Viskosität ist gegeben durch $\nu = \mu/\rho$.
- Der Standardwert für Luft (auf Meeresebene) ist $\nu = 1.4607 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- Für eine mittlere Windscherung von $du/dz = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (typischer Wert für atmosphärische Bodenschichten) ist die resultierende viskose Scherspannung $\mu/\rho = 7.304 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Viskose Scherspannung

- Dieser Wert ($\mu/\rho = 7.304 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$) ist in der GS um soviel kleiner als die Reynolds Spannung, dass die viskose Scherspannung in der Regel zur Vorhersage des mittleren Windes vernachlässigt werden kann. Dennoch können turbulente Eddies lokal (d.h. in Regionen, die von der Größe eines Eddies sind) große Scherungswerte aufweisen. Deshalb kann man die Viskosität nicht vernachlässigen, wenn man Turbulenz vorhersagen will.

Reibungsgeschwindigkeit

- In Situationen, wo Turbulenz in Bodennähe durch Windscherung angeregt oder moduliert wird, erweist sich die Größe der bodennahen Reynolds Spannung als wichtige Skalierungsvariable.
- Nahe der Erdoberfläche ist der gesamte vertikale Fluss von horizontalem Impuls gegeben durch:

$$\tau_{xz} = -\bar{\rho}_s \overline{u'w'}|_s \quad \text{und} \quad \tau_{yz} = -\bar{\rho}_s \overline{v'w'}|_s$$

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (= |\tau_{\text{Reynolds}}|_s)$$

Definiere eine Reibungsgeschwindigkeit u_* (am Boden) durch:

$$u_*^2 = |\boldsymbol{\tau}_s| / \bar{\rho}_s = \sqrt{(\overline{u'w'})_s^2 + (\overline{v'w'})_s^2}$$

Reibungsgeschwindigkeit und andere Größen an der Erdoberfläche

- Für den Spezialfall, indem das Koordinatensystem so ausgerichtet ist, dass die x-Achse in Richtung der Spannung am Erdboden zeigt, kann man die Reibungsgeschwindigkeit wie folgt schreiben:

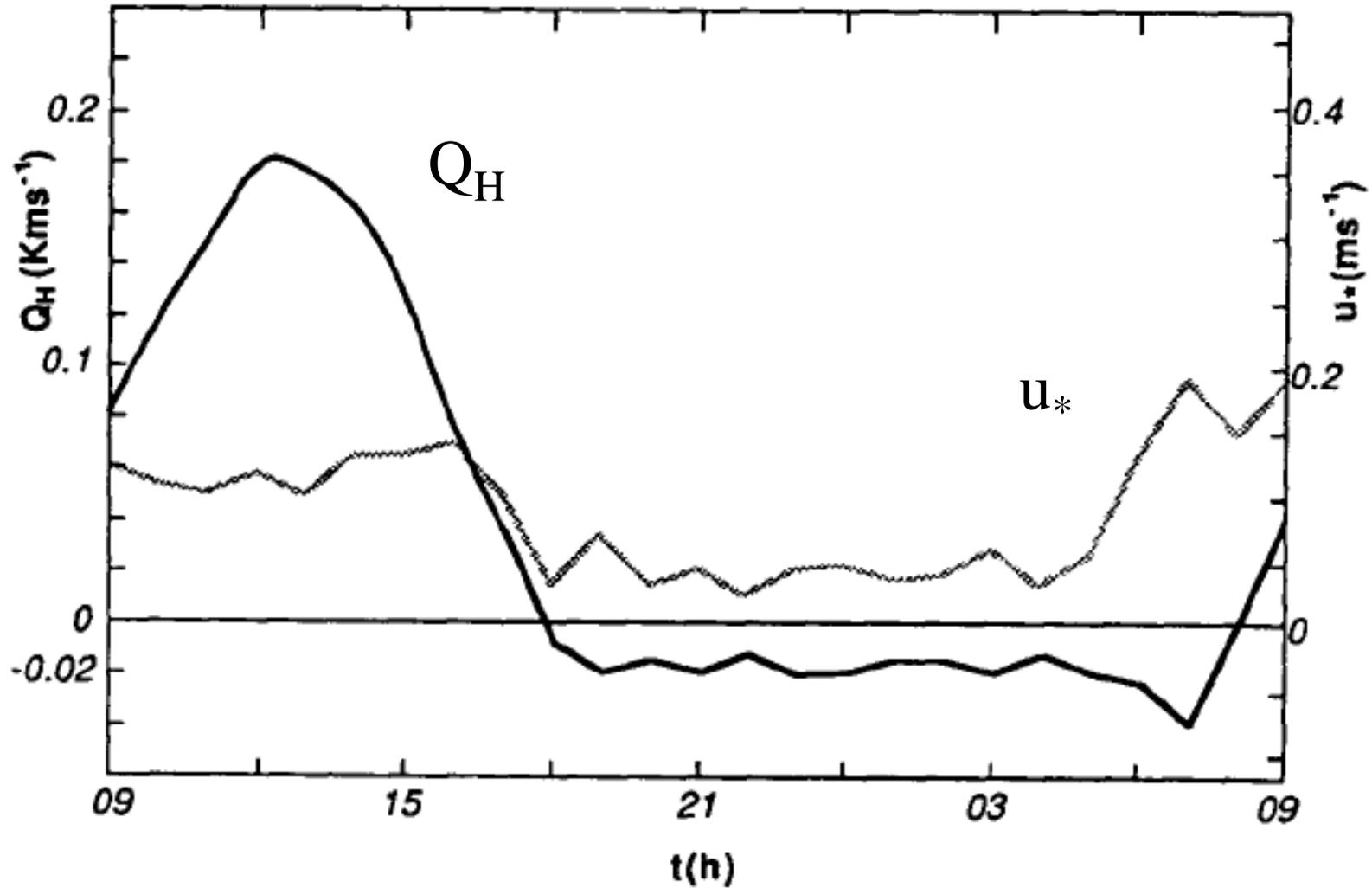
$$u_*^2 = \overline{u'w'}|_s = |\boldsymbol{\tau}_s| / \bar{\rho}$$

- Ganz ähnlich kann man die Temperatur θ_*^{SL} und die spezifische Feuchte q_*^{SL} der Bodenschicht (SL) definieren durch:

$$\theta_*^{SL} = \frac{\overline{-w'\theta'}|_s}{u_*}$$

$$q_*^{SL} = \frac{\overline{-w'q'}|_s}{u_*}$$

Tagesgang der Reibungsgeschwindigkeit und des kinematischen Wärmeflusses





Ende Kapitel 2