

# Statistik und Stochastik

Sommersemester 2008

Prof. Dr. Martin Dameris

Meteorologisches Institut  
Ludwig-Maximilians Universität  
München

Tel.: 089 - 2180 4570/4571

DLR-Institut für Physik der Atmosphäre  
Oberpfaffenhofen

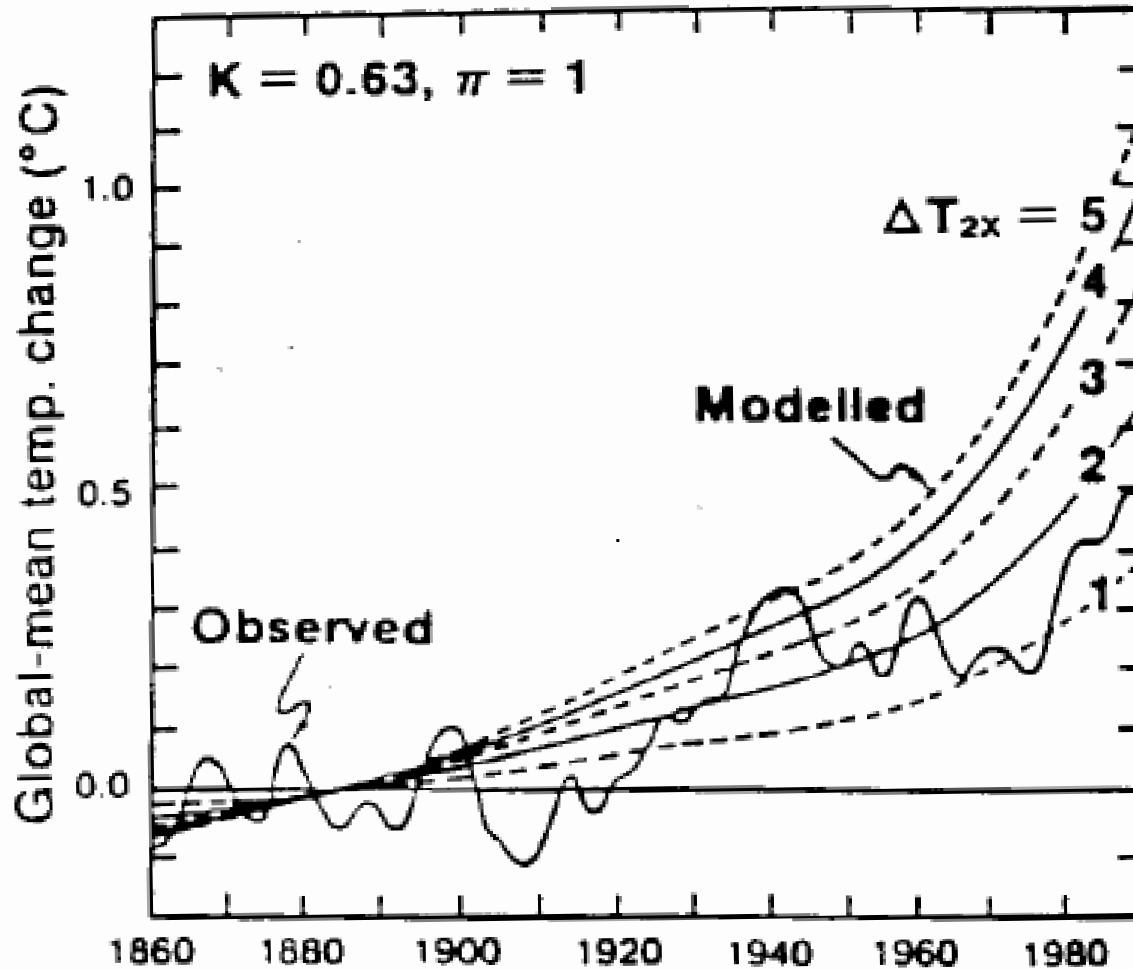
Tel.: 08153 - 28 1558

E-mail: [martin.dameris@dlr.de](mailto:martin.dameris@dlr.de)

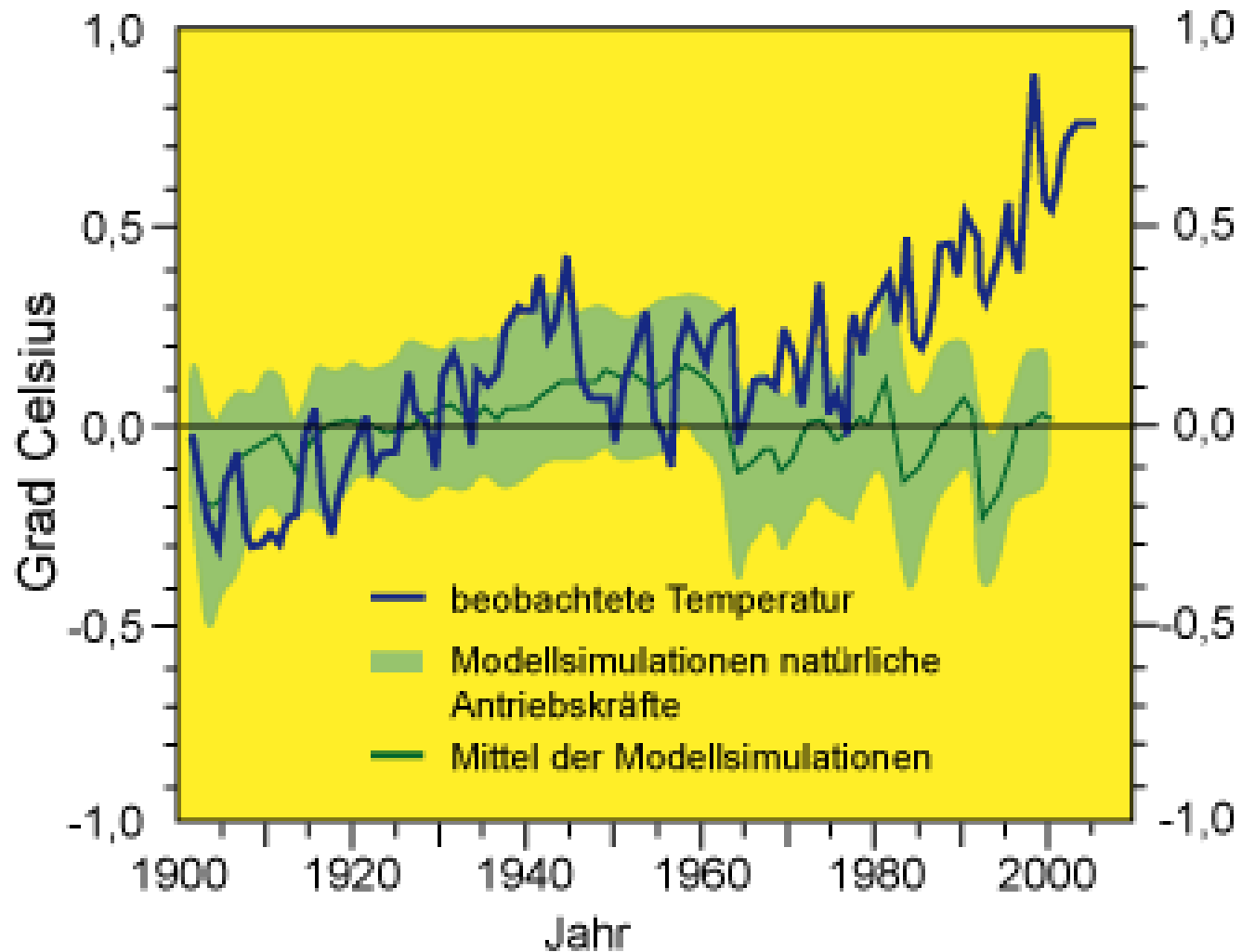
# Literatur

- Christian Dietrich Schönwiese:  
**Praktische Statistik für Meteorologen und Geowissenschaftler**,  
Gebrüder Bornträger, Berlin, Stuttgart.
- Hans von Storch und Francis W. Zwiers:  
**Statistical Analysis in Climate Research**,  
Cambridge University Press.
- **Vorlesungsskript**: Prof. Dr. J. Egger mit einigen Ergänzungen.

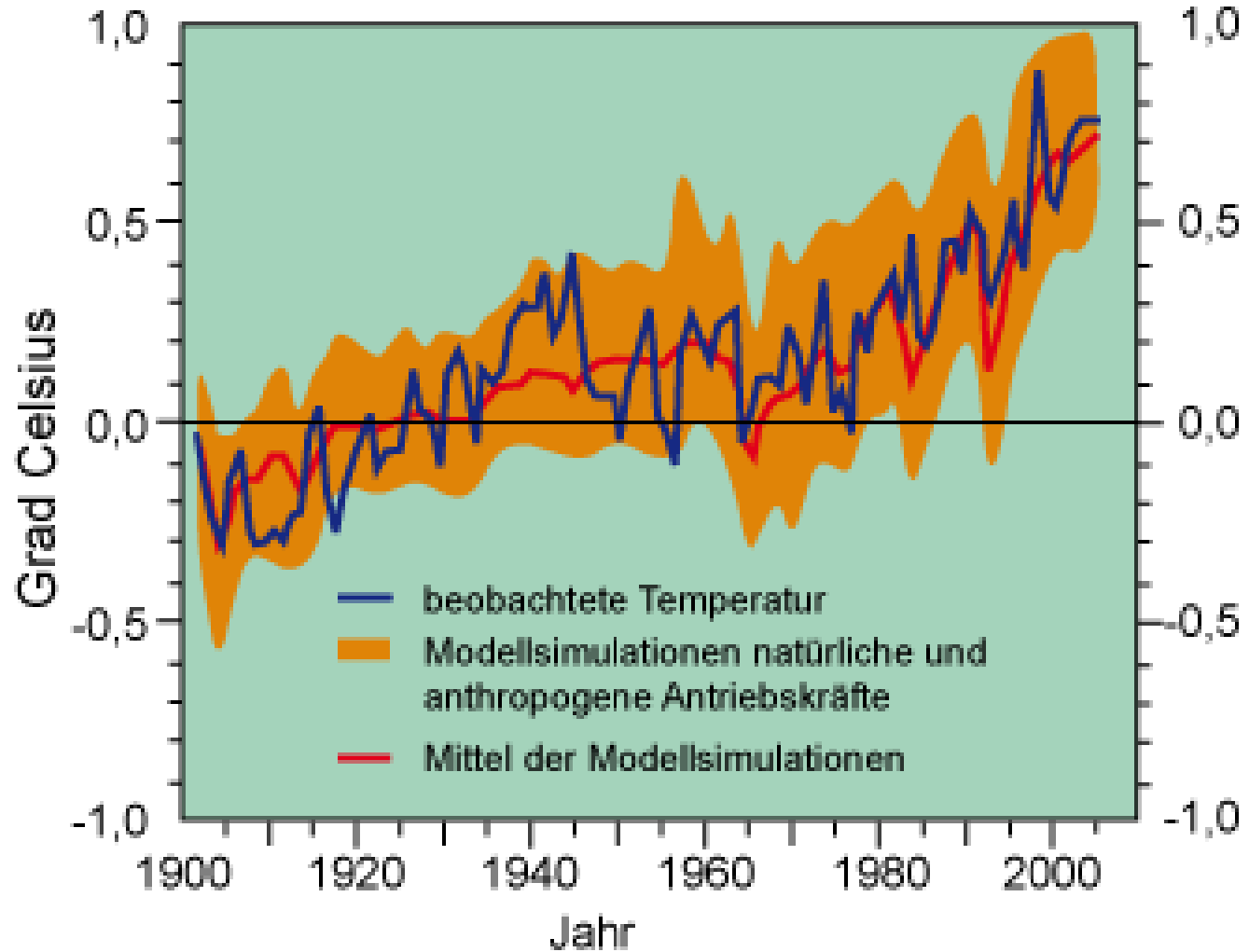
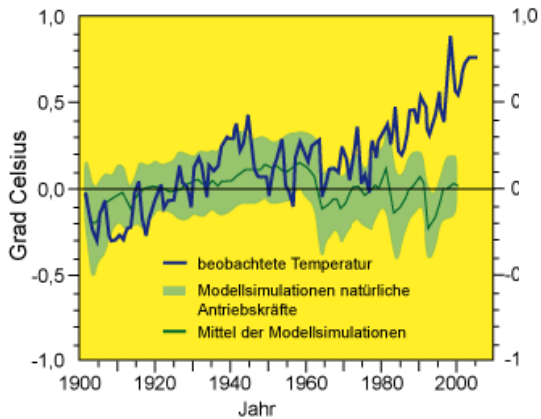
# Änderung der globalen Mitteltemperatur in Bodennähe in Beobachtung und Modell



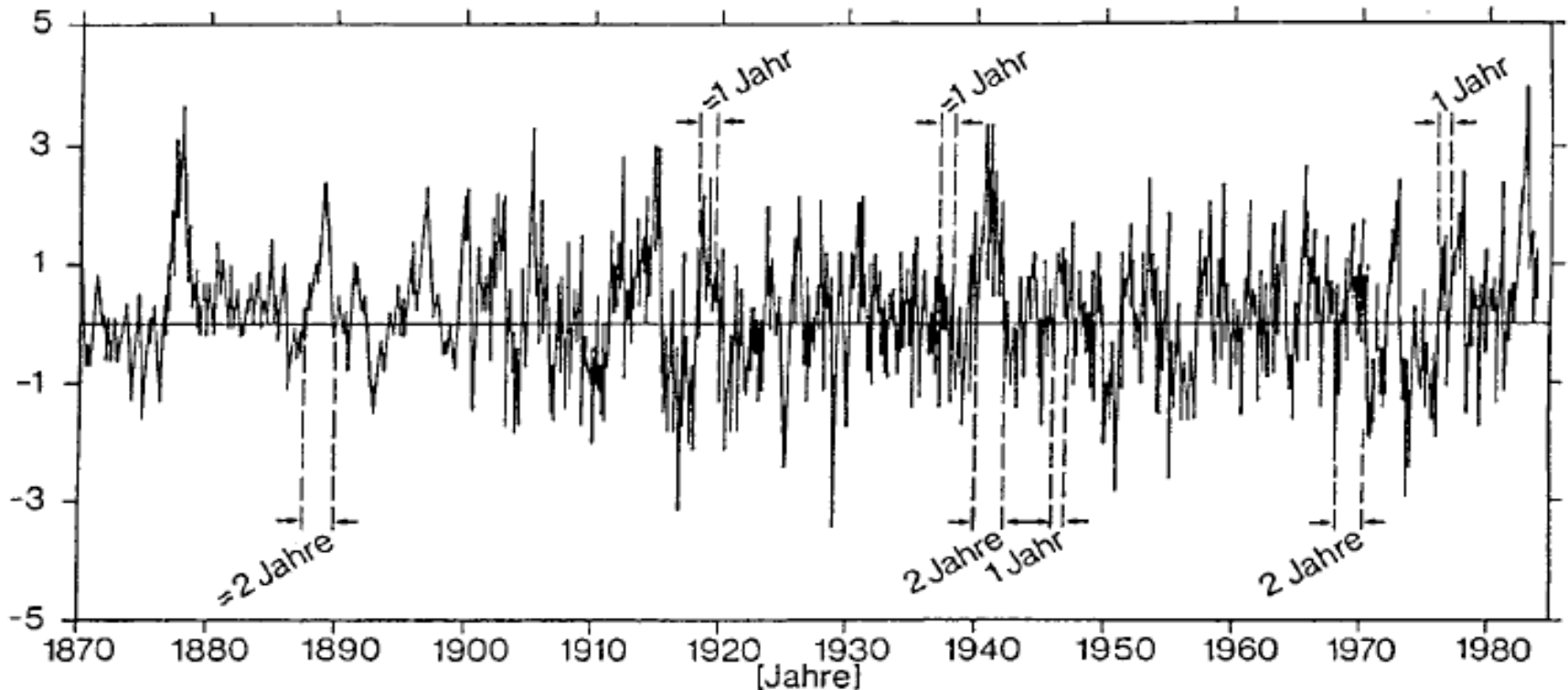
# Simulationen mit Klimamodellen



# Simulationen mit Klimamodellen

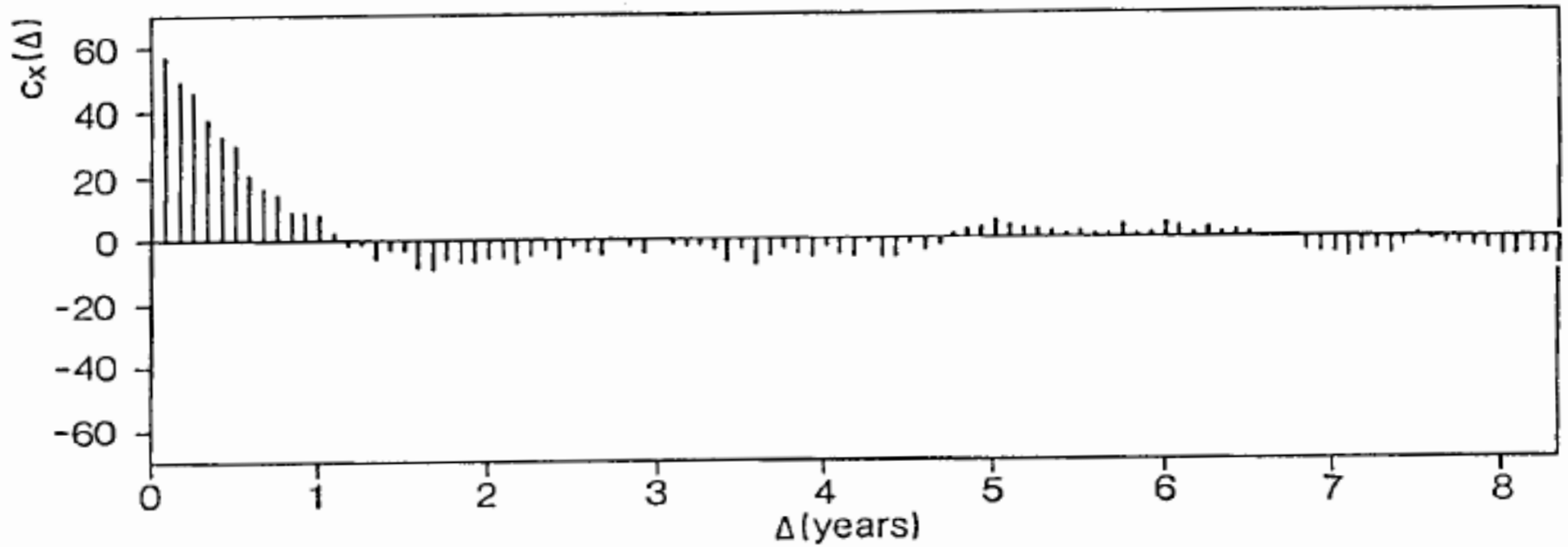


# Southern Oscillation Index SOI

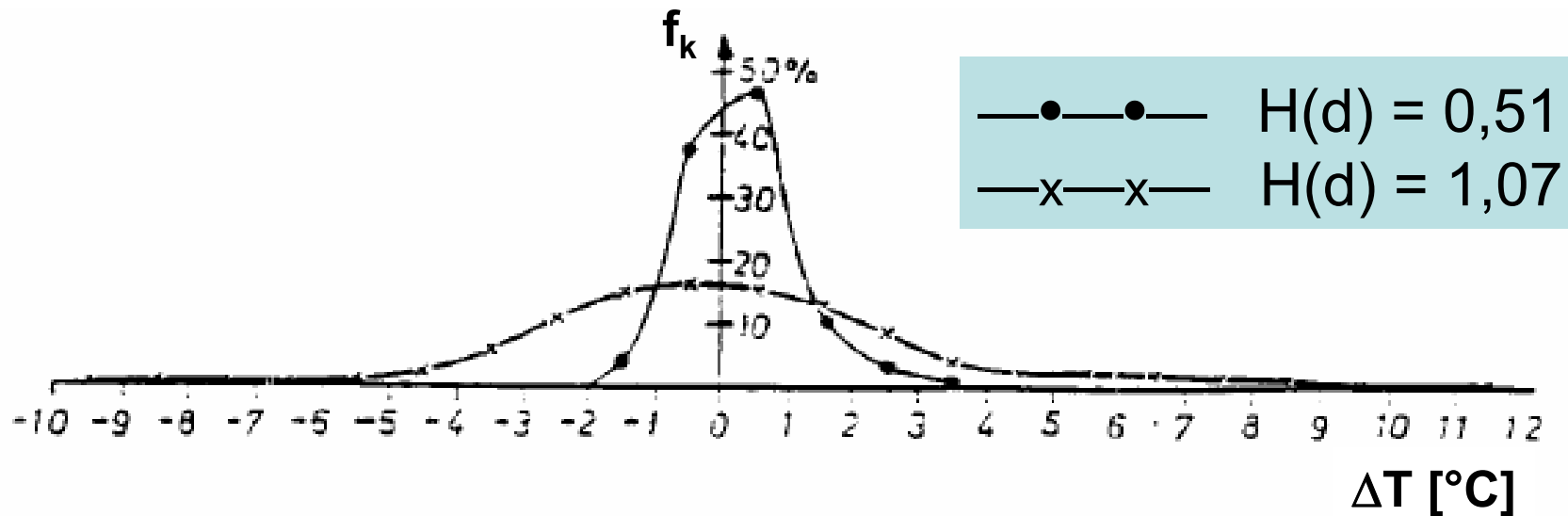


**SOI:** Luftdruckdifferenz (am Boden) zwischen Tahiti und Darwin. Ist der Wert positiv, so deutet dies auf ein La Nina Ereignis hin, ist der Wert negativ, so deutet dies auf eine Erwärmung des östlichen Pazifik hin (El Nino).

# Autokorrelation des SOI (\*100)



# Häufigkeitsverteilung von Temperaturunterschieden für Stationspaare

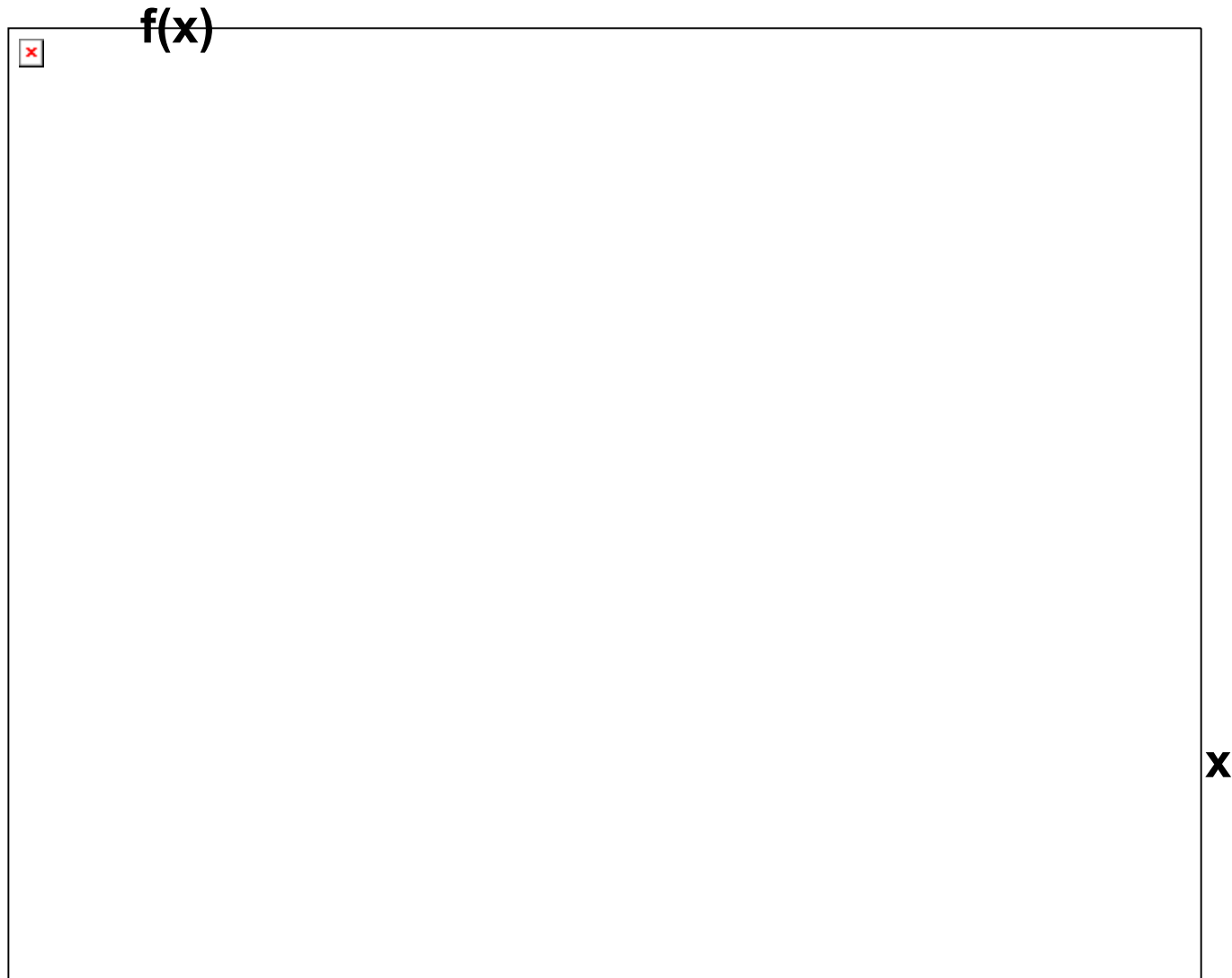


Punkte: Abstand der Stationen ist 4 km.

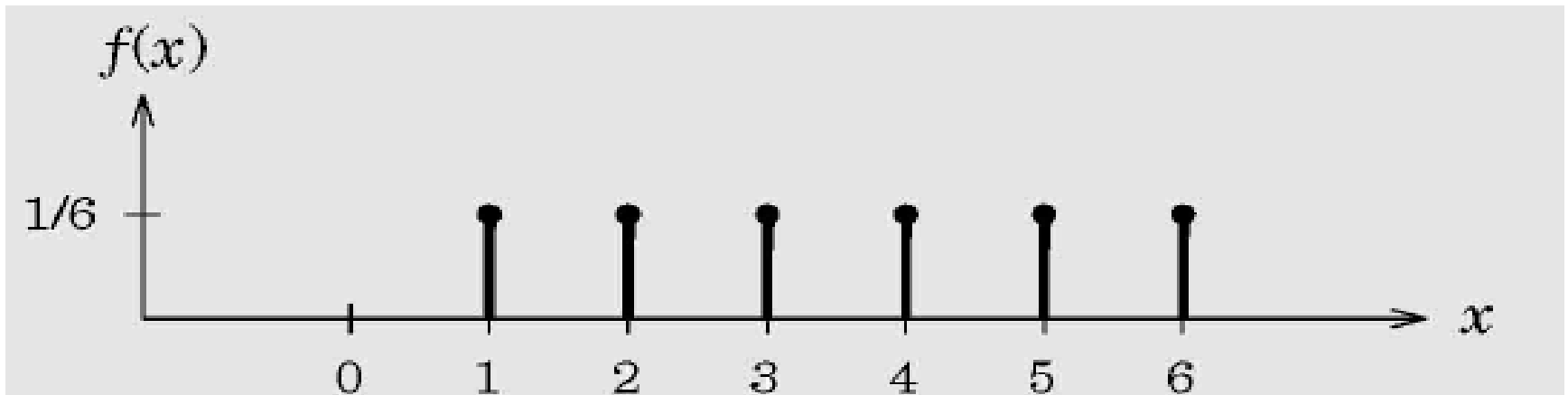
Kreuze: Abstand der Stationen ist 364 km.



# Stetige Gleichverteilung



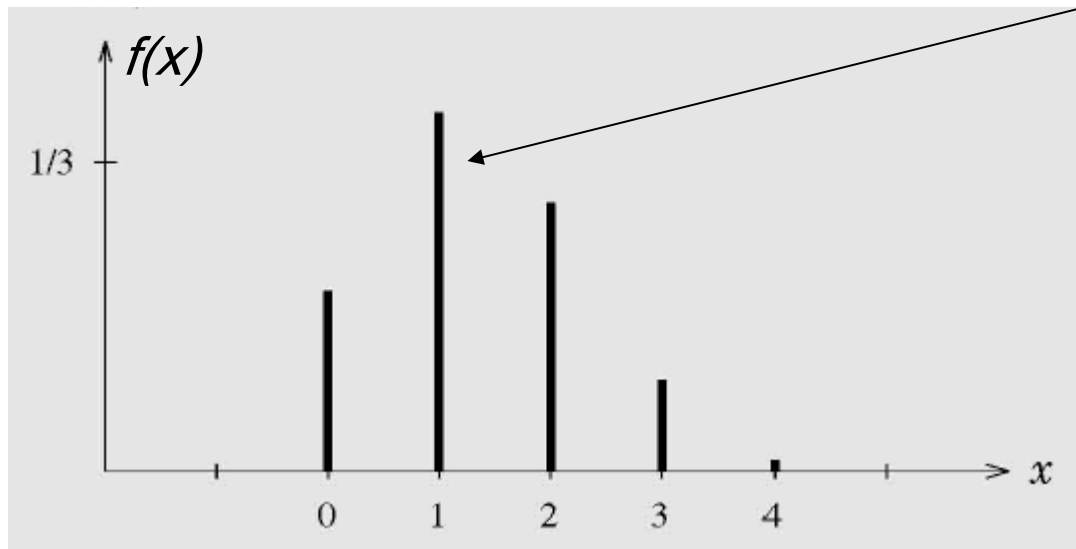
# Diskrete Gleichverteilung



Beispiel der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Augenzahl beim würfeln

# Binominalverteilung

Beispiel: Anzahl der Treffer bei  $n$  Würfeln auf einen Basketballkorb, z.B. vier Würfe.

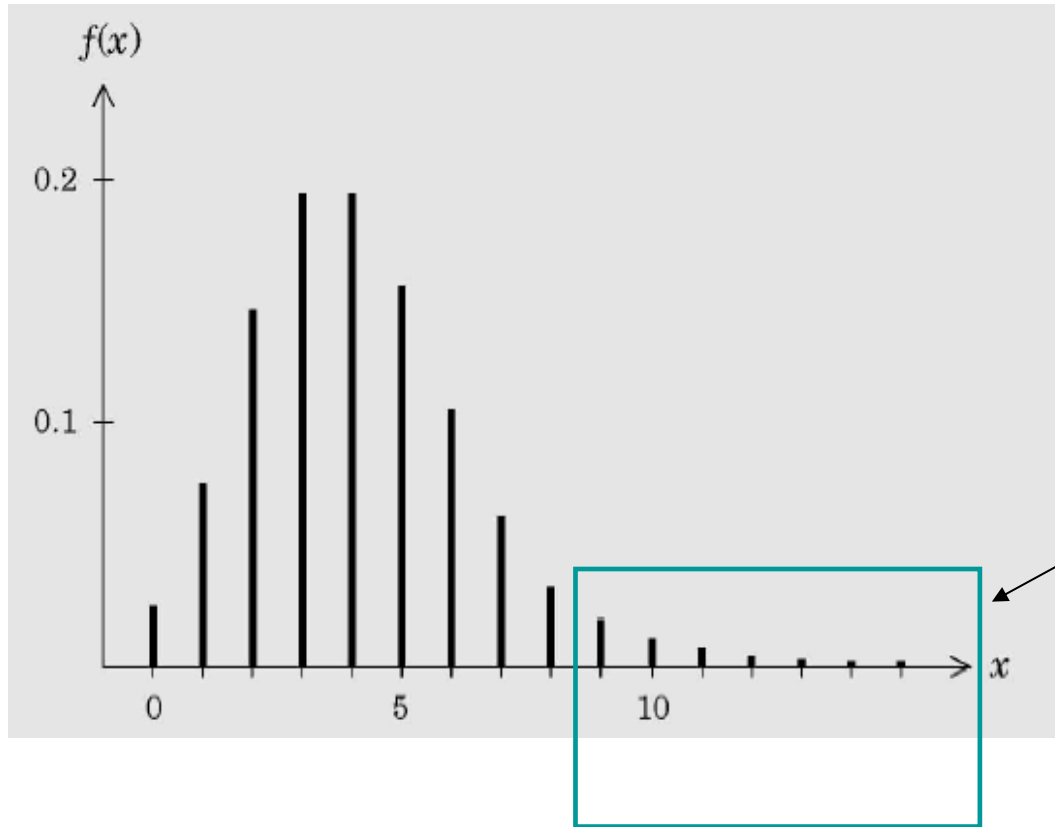


z.B. Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfeln ein Mal zu treffen, falls  $p_1 = \frac{1}{3}$

zu erwartende Treffer-Zahl bei vier Würfeln

$$E(X) = Np_1 = 4 \cdot \frac{1}{3}$$

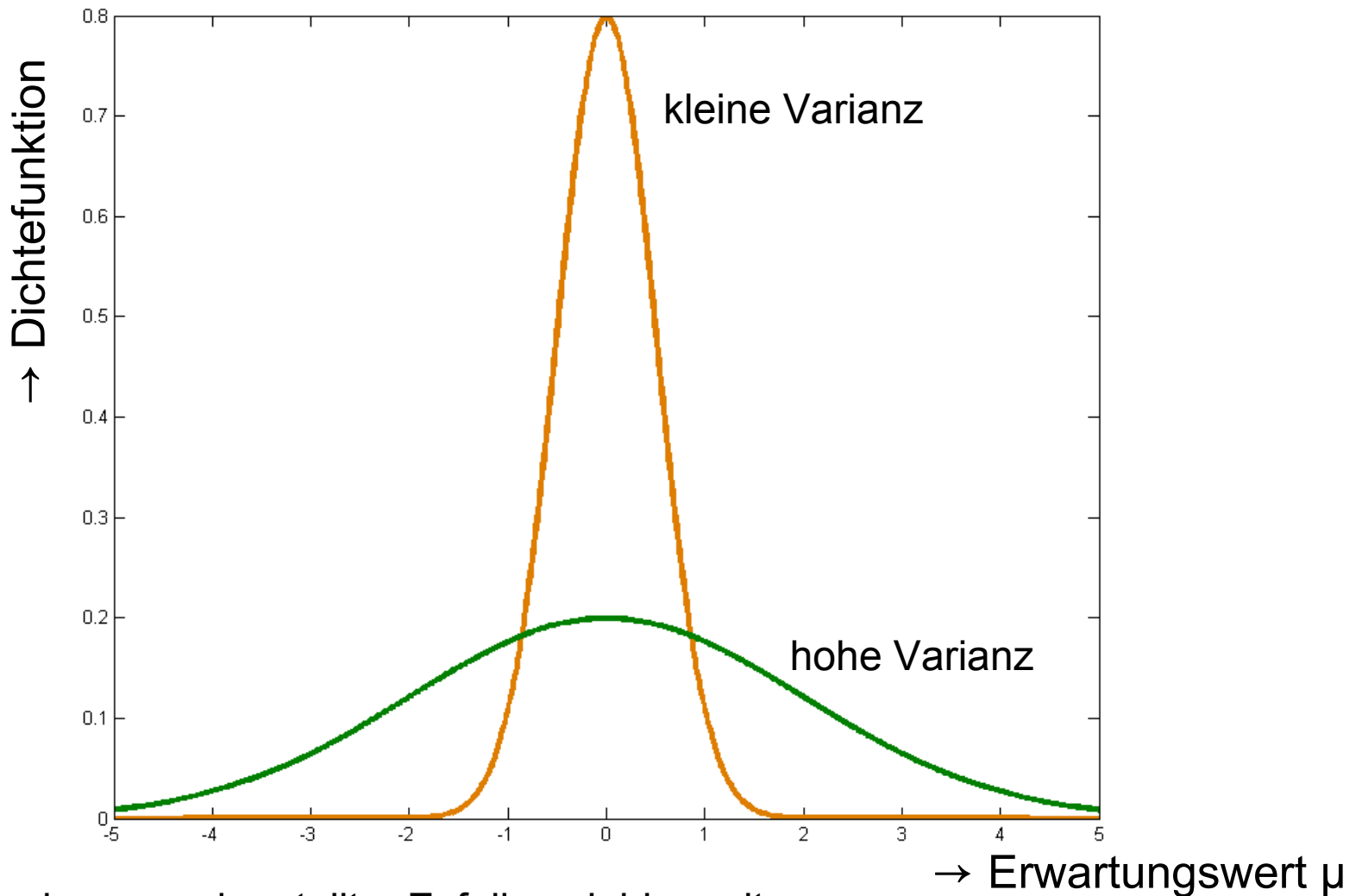
# Poissonverteilung



Wenn pro Stunde durchschnittlich  $\lambda = 4$  Kunden ankommen, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde 9 oder mehr Kunden ankommen:

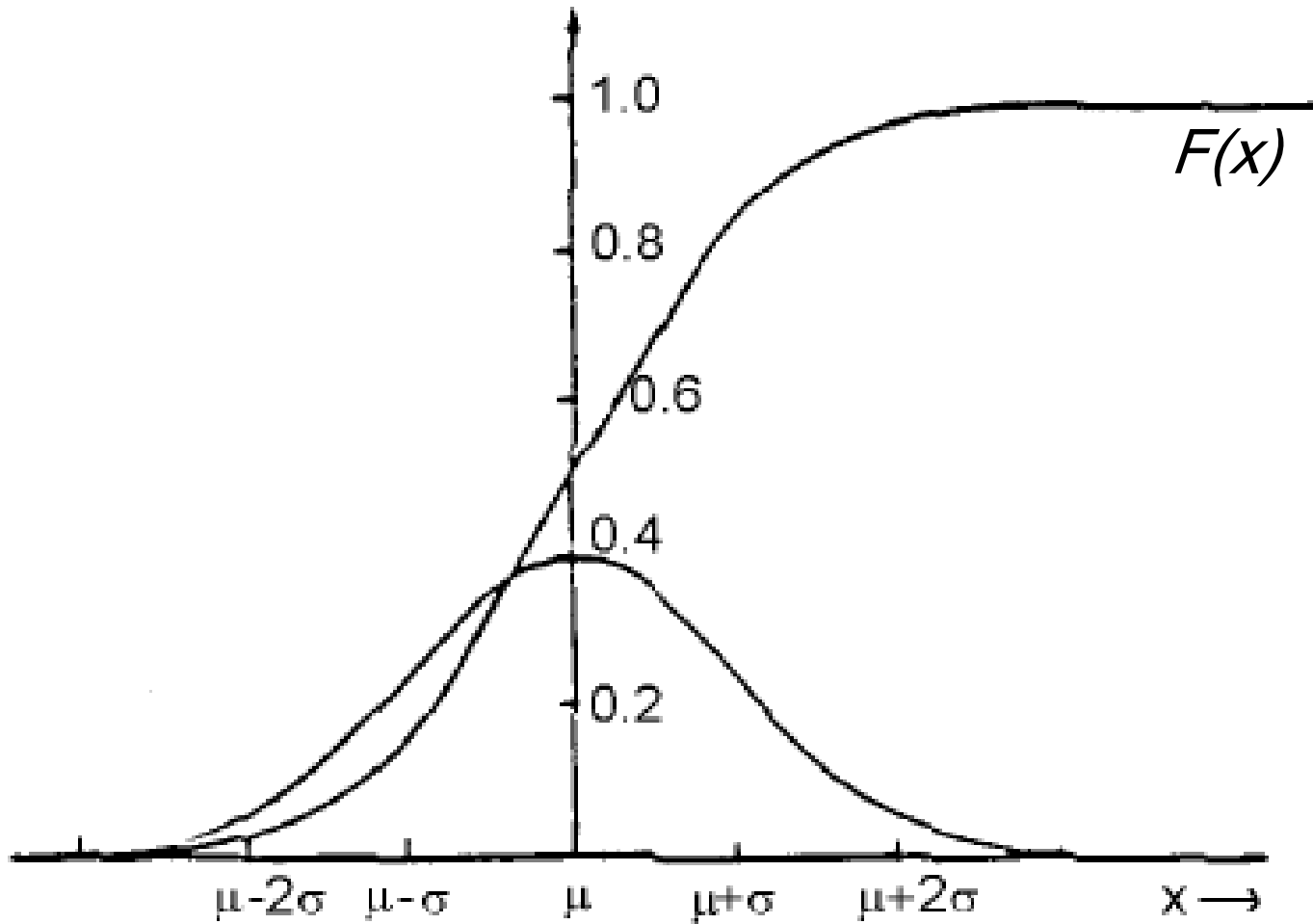
$$P(X \geq 9) = 0.0214$$

# Gaußverteilung (Normalverteilung)



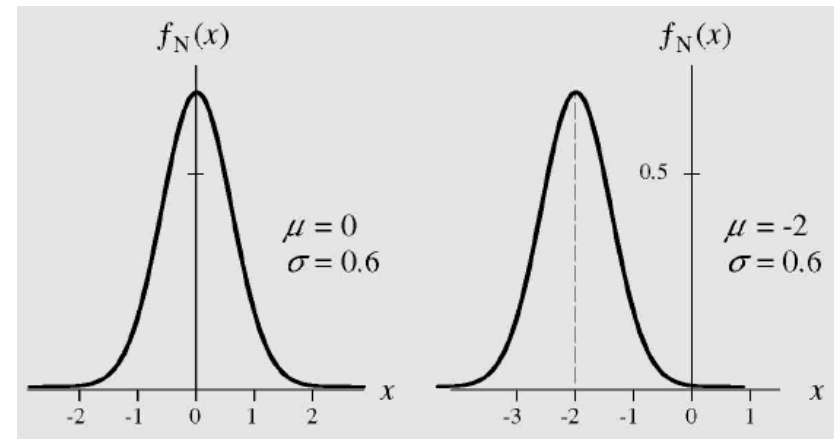
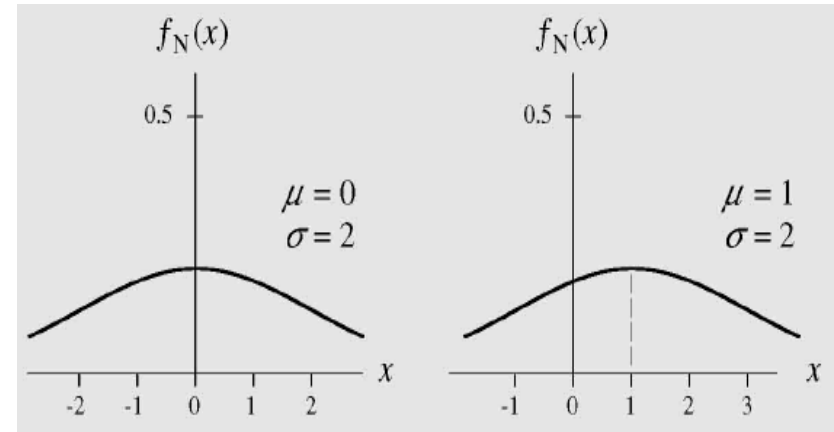
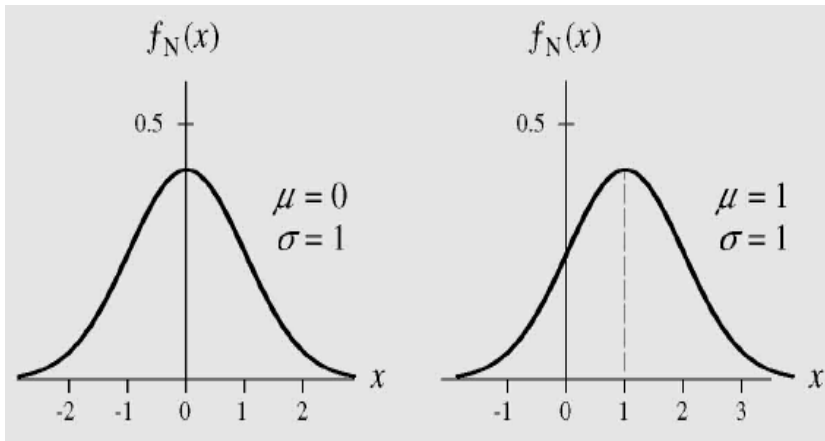
Dichten zweier normal verteilter Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert aber unterschiedlichen Varianzen.

# Normalverteilung



$f(x) = N(\mu, \sigma)$  und die zugehörige kumulierte Verteilungsfunktion.

# Normalverteilung (Beispiele)



# Bivariate Verteilung

Gemeinsame Häufigkeitsverteilung für  $u$   $w$

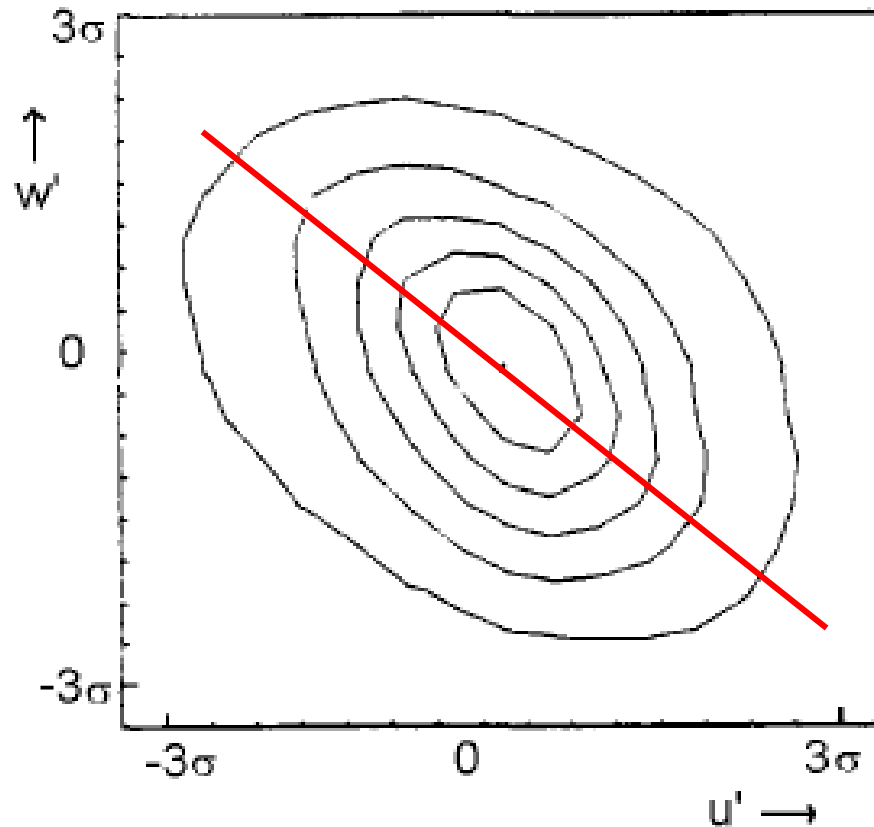
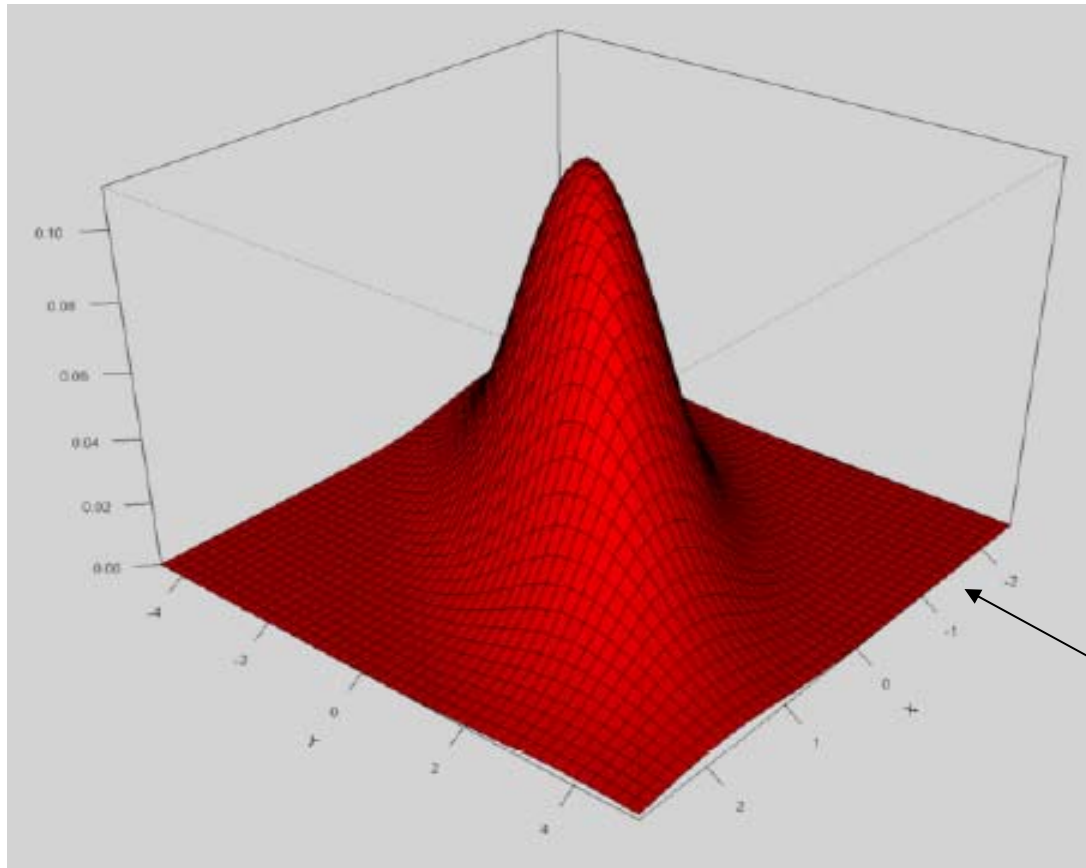


Abb. 6. Bivariate Häufigkeitsverteilung des Windes am Garchinger Turm (Hennemuth), die zeigt, daß positive (negative) Abweichungen  $u'$  des Zonalwinds bevorzugt mit negativen (positiven) Werten der Vertikalbewegung  $w'$  einhergehen.



# Bivariate Normalverteilung



Beispiel:

$$\mu_x = 0, \sigma_x = 1$$

$$\mu_y = 0, \sigma_y = 2$$

$$\rho = 0.7$$

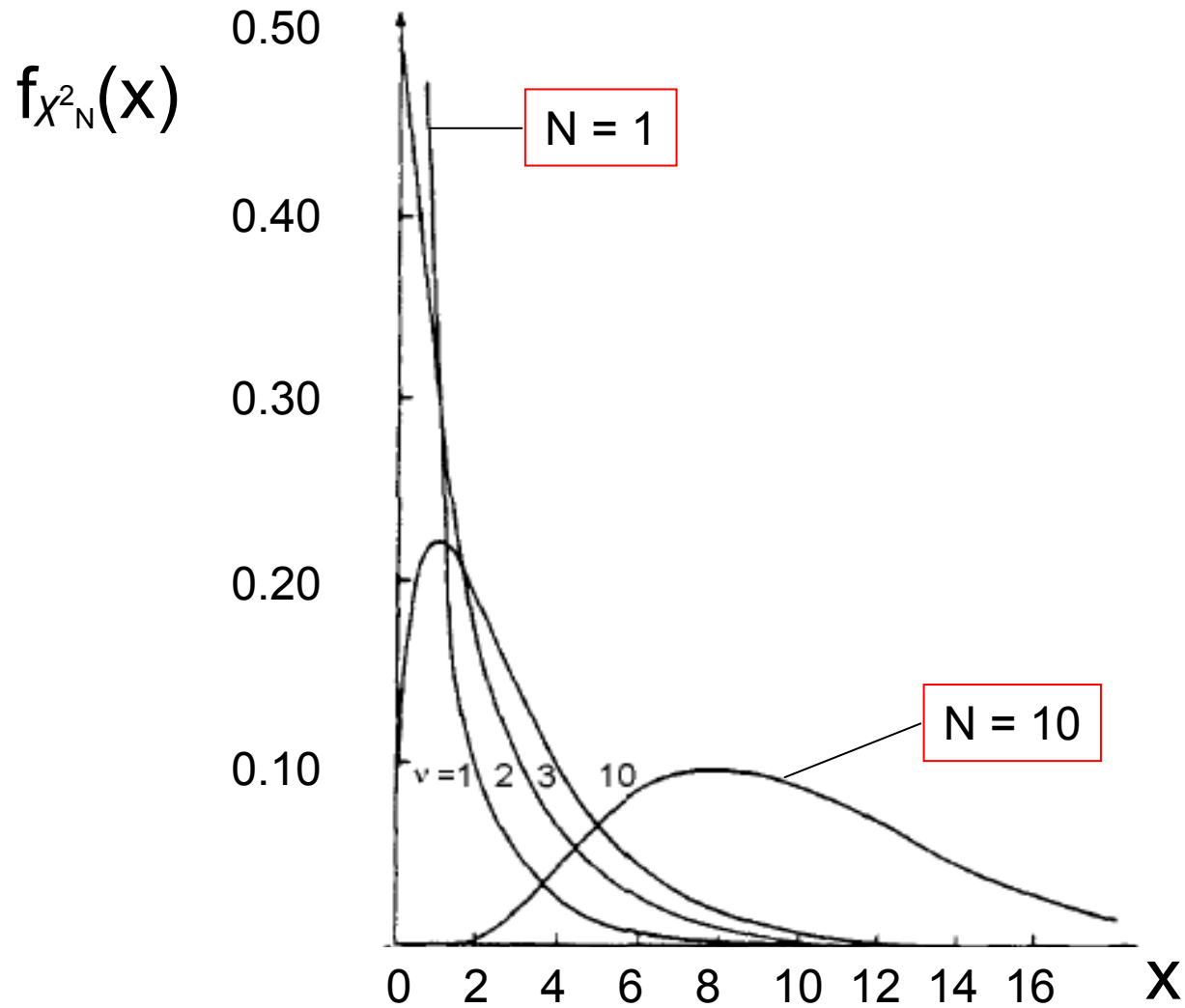
gemeinsame  
Dichtefunktion

$$p = 1 - \alpha$$

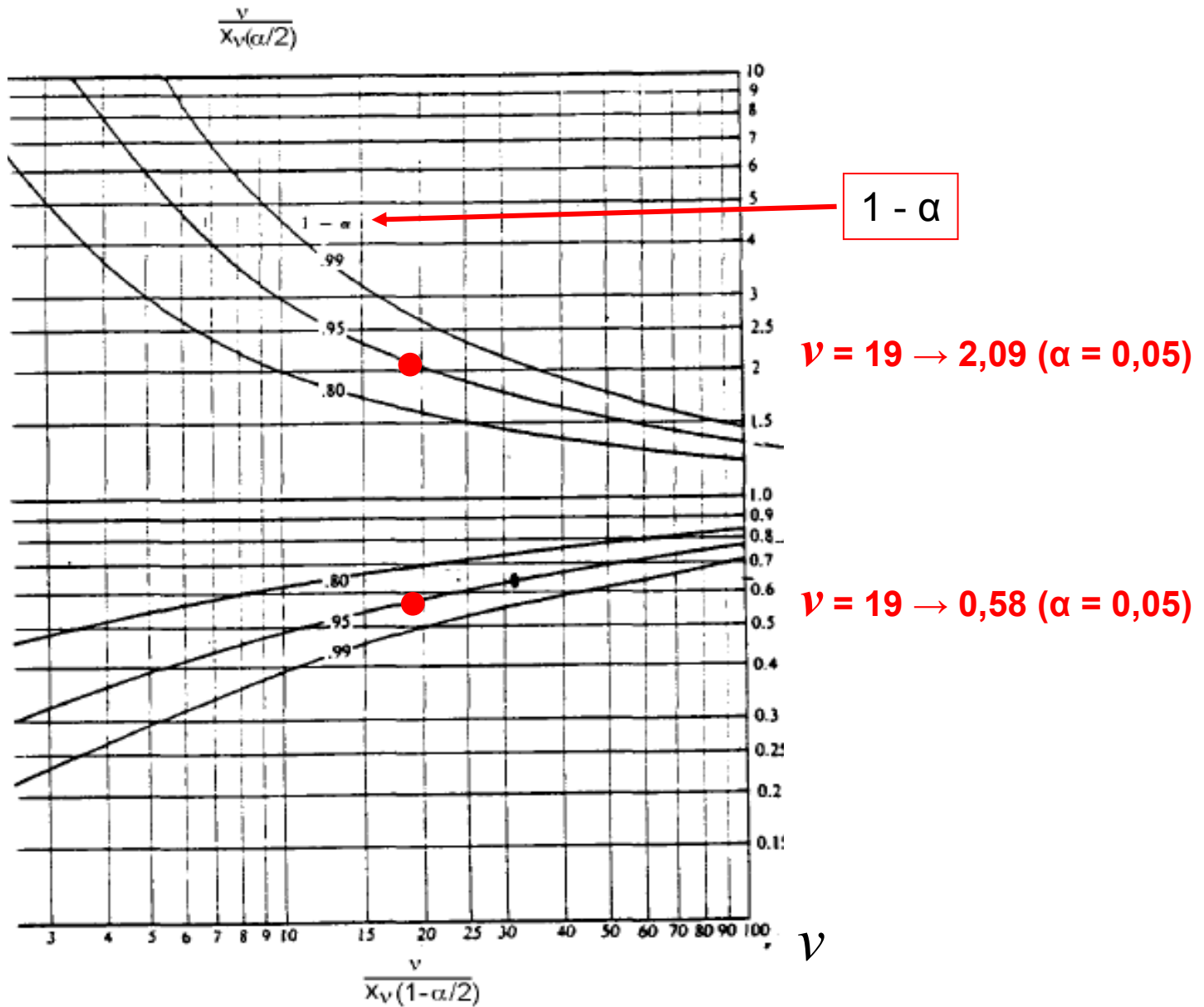
<u>p (-<math>\eta \leq x \leq \eta</math>)</u>	<u><math>\alpha</math>: Fläche von f außerhalb</u>	<u><math>\eta</math></u>
0.683 = 68.3%	0.317 = 31.7%	1.00
0.950	0.050	1.96
0.990	0.010	2.58
0.997 = 99.7%	0.003 = 0.3%	3.00

Tabelle 1

# $\chi^2$ -Verteilung



$\chi^2$ -Verteilung für  $N = 1, 2, 3, 10$ . Der Parameter  $\nu$  entspricht  $N$ .



Graphische Präsentation der Schranken in (1.52).

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$ für den zweiseitigen Test									
FG \ $\alpha$	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598	99,992
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924	28,000
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	11,178
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,211
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,897
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,837
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	4,784
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767	4,693
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,389
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,269
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,228
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	4,127
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	4,096
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	4,072
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	4,053
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,970
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,922
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,906
$\infty$	0,675	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290	3,891
FG \ $\alpha$	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,00005

unser vorheriges Beispiel:  
 $\nu = 19$

Student-Verteilung =  
t-Verteilung.

FG: Freiheitsgrade.

(Diese Tabelle findet sich in  
allen Statistik Büchern.)

<b>Zustand</b>	<b>i = 1</b>	0%	$\leq RS \leq 5\%$
	2	5%	$\leq RS \leq 30\%$
	3	30%	$\leq RS \leq 60\%$
	4	60%	$\leq RS \leq 90\%$
	5	90%	$\leq RS \leq 100\%$ .

RS: relative Sonnenscheindauer

**TABLE 3.** UNCONDITIONAL PROBABILITY VECTOR  $\{p_i(\pi)\}$  AND TRANSITION MATRIX  $\{p_{i,j}(n)\}$  FOR JANUARY ( $n = 15$ ) AND FOR JULY ( $n = 198$ ). THE COLUMN INDEX REFERS TO THE OLD STATE, THE ROW INDEX  $i$  TO THE NEW STATE.

$i$	$p_i$	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$p_{i,3}$	$p_{i,4}$	$p_{i,5}$
			January			
1	0.47	0.57	0.44	0.45	0.31	0.22
2	0.20	0.18	0.26	0.20	0.23	0.11
3	0.14	0.12	0.15	0.15	0.20	0.19
4	0.11	0.09	0.11	0.14	0.15	0.17
5	0.07	0.04	0.04	0.06	0.12	0.31
			July			
1	0.10	0.31	0.13	0.10	0.06	0.01
2	0.23	0.33	0.38	0.20	0.19	0.07
3	0.22	0.19	0.25	0.27	0.22	0.16
4	0.27	0.16	0.19	0.30	0.30	0.33
5	0.19	0.02	0.06	0.13	0.23	0.43

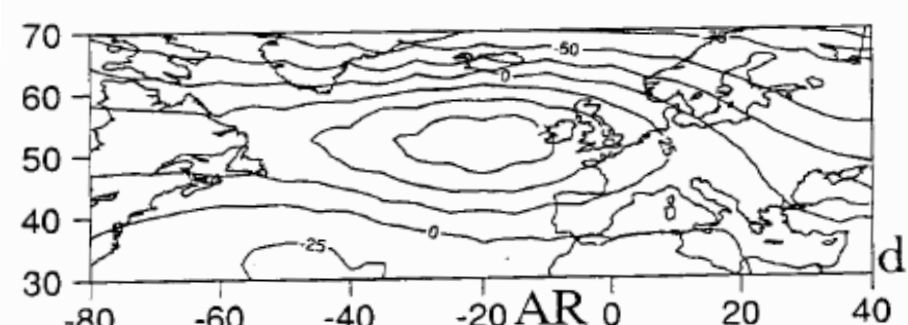
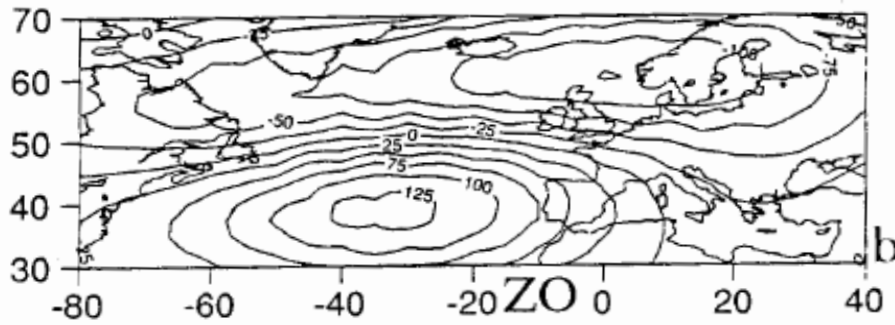
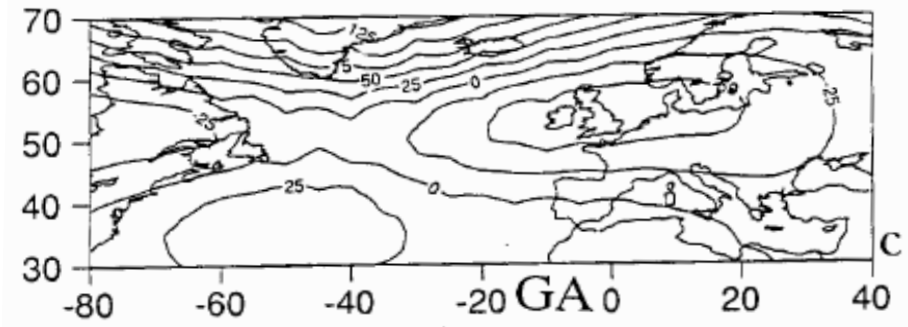
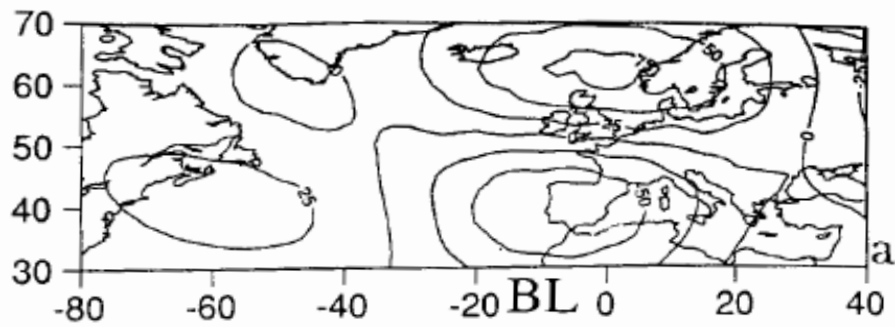


Abb. 10 Abweichung (m) der Höhe der 700mb-Fläche vom Langzeitmittel für die Großwetterlagen blockierendes Hoch (BL), Zonalzustand (ZO), Hoch über Grönland (GA) und Rücken über dem Atlantik (AR) (Vautard, 1990).

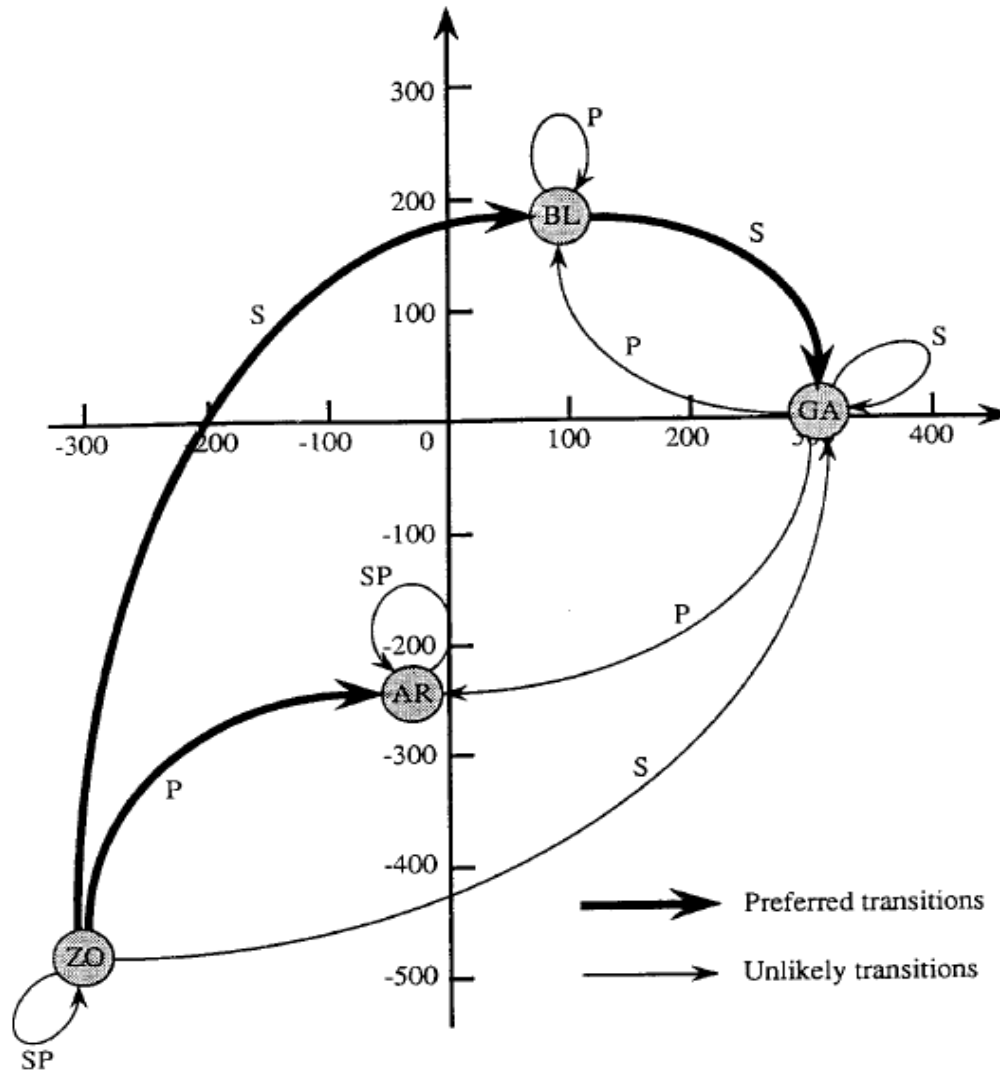


Abb. 9 Übergangendiagramm für die in Abb. 10 aufgeführten Wetterlagen

Vautard, R., Multiple weather regimes over the North Atlantic: Analysis of precursors and successors, *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2056-2081, 1990.



$$\begin{aligned}x_1 &= 1.73^{\circ}\text{C}, & x_2 &= 3.81^{\circ}\text{C}, & x_3 &= 3.12^{\circ}\text{C} \\x_4 &= 3.00^{\circ}\text{C}, & x_5 &= 3.48^{\circ}\text{C}, & x_6 &= 1.68^{\circ}\text{C} \\x_7 &= 3.64^{\circ}\text{C}, & x_8 &= 4.91^{\circ}\text{C}, & x_9 &= 0.39^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Tagesmitteltemperaturen für den 1. Januar von  $N = 9$  Jahren.

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$ für den zweiseitigen Test									
FG \ $\alpha$	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598	99,992
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924	28,000
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	11,178
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,211
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,897
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,837
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	4,784
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767	4,693
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,389
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,269
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,228
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	4,127
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	4,096
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	4,072
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	4,053
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,970
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,922
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,906
$\infty$	0,675	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290	3,891
FG \ $\alpha$	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,00005

Beispiel:  
 $\nu = N - 1 = 8$

Student-Verteilung =  
t-Verteilung.

FG: Freiheitsgrade.

FG	Zweiseitiger Test			Einseitiger Test		
	5 %	1 %	0,1 %	5 %	1 %	0,1 %
1	0,9969	A*	B*	0,9877	0,9995	C*
2	0,9500	0,9900	0,9990	0,9000	0,9800	0,9980
3	0,8783	0,9587	0,9911	0,805	0,934	0,986
4	0,811	0,917	0,974	0,729	0,882	0,963
5	0,754	0,875	0,951	0,669	0,833	0,935
6	0,707	0,834	0,925	0,621	0,789	0,905
7	0,666	0,798	0,898	0,582	0,750	0,875
8	0,632	0,765	0,872	0,549	0,715	0,847
9	0,602	0,735	0,847	0,521	0,685	0,820
10	0,576	0,708	0,823	0,497	0,658	0,795
11	0,553	0,684	0,801	0,476	0,634	0,772
12	0,532	0,661	0,780	0,457	0,612	0,750
13	0,514	0,641	0,760	0,441	0,592	0,730
14	0,497	0,623	0,742	0,426	0,574	0,711
15	0,482	0,606	0,725	0,412	0,558	0,694
16	0,468	0,590	0,708	0,400	0,543	0,678
17	0,456	0,575	0,693	0,389	0,529	0,662
18	0,444	0,561	0,679	0,378	0,516	0,648
19	0,433	0,549	0,665	0,369	0,503	0,635
20	0,423	0,537	0,652	0,360	0,492	0,622
21	0,413	0,526	0,640	0,352	0,482	0,610
22	0,404	0,515	0,629	0,344	0,472	0,599
23	0,396	0,505	0,618	0,337	0,462	0,588
24	0,388	0,496	0,607	0,330	0,453	0,578
25	0,381	0,487	0,597	0,323	0,445	0,568

Tabelle 4: Prüfung des Korrelationskoeffizienten  $\rho$  auf Signifikanz gegen Null. Die Nullhypothese  $\rho = 0$  wird abgelehnt, wenn  $|\rho|$  den für die gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit und den Freiheitsgrad angegebenen Wert überschreitet. Aus Sachs: Angewandte Statistik.

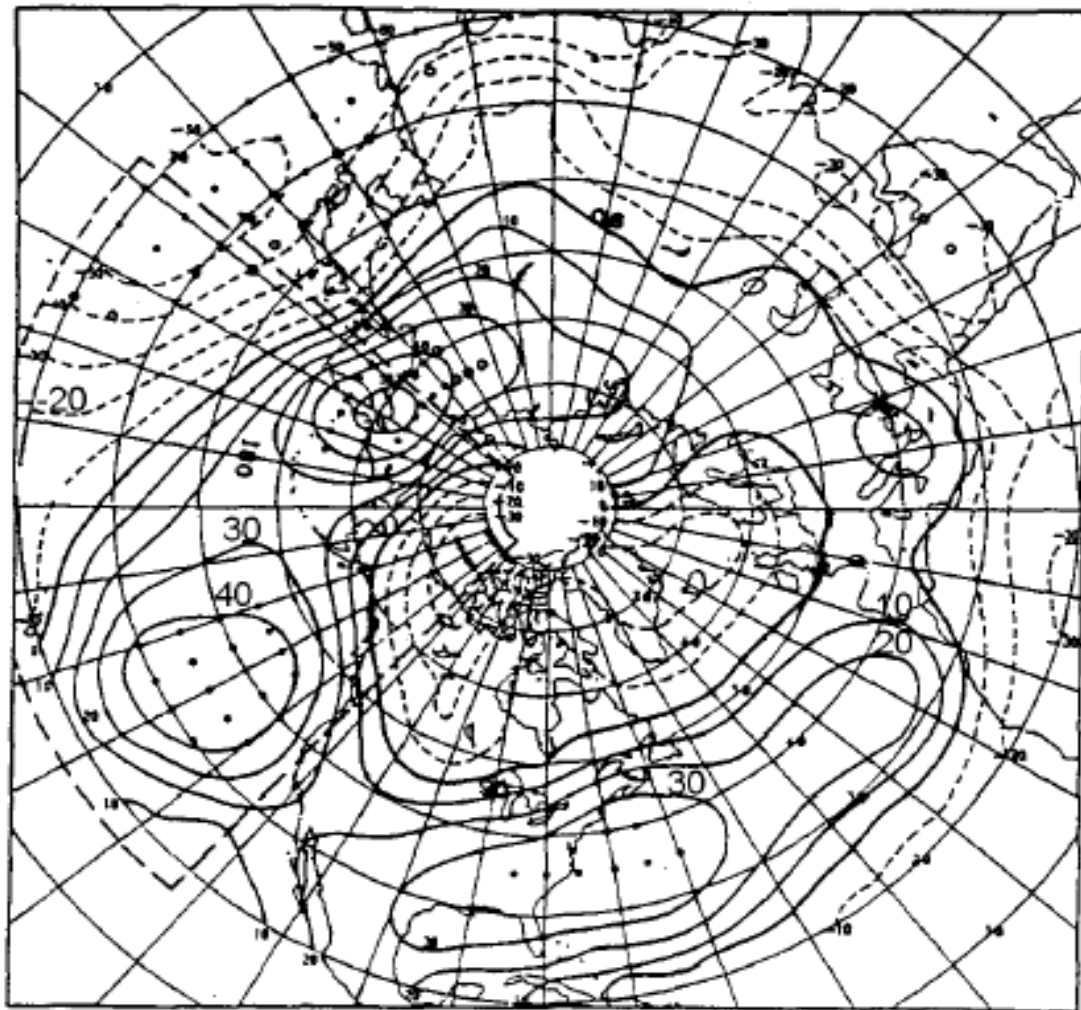
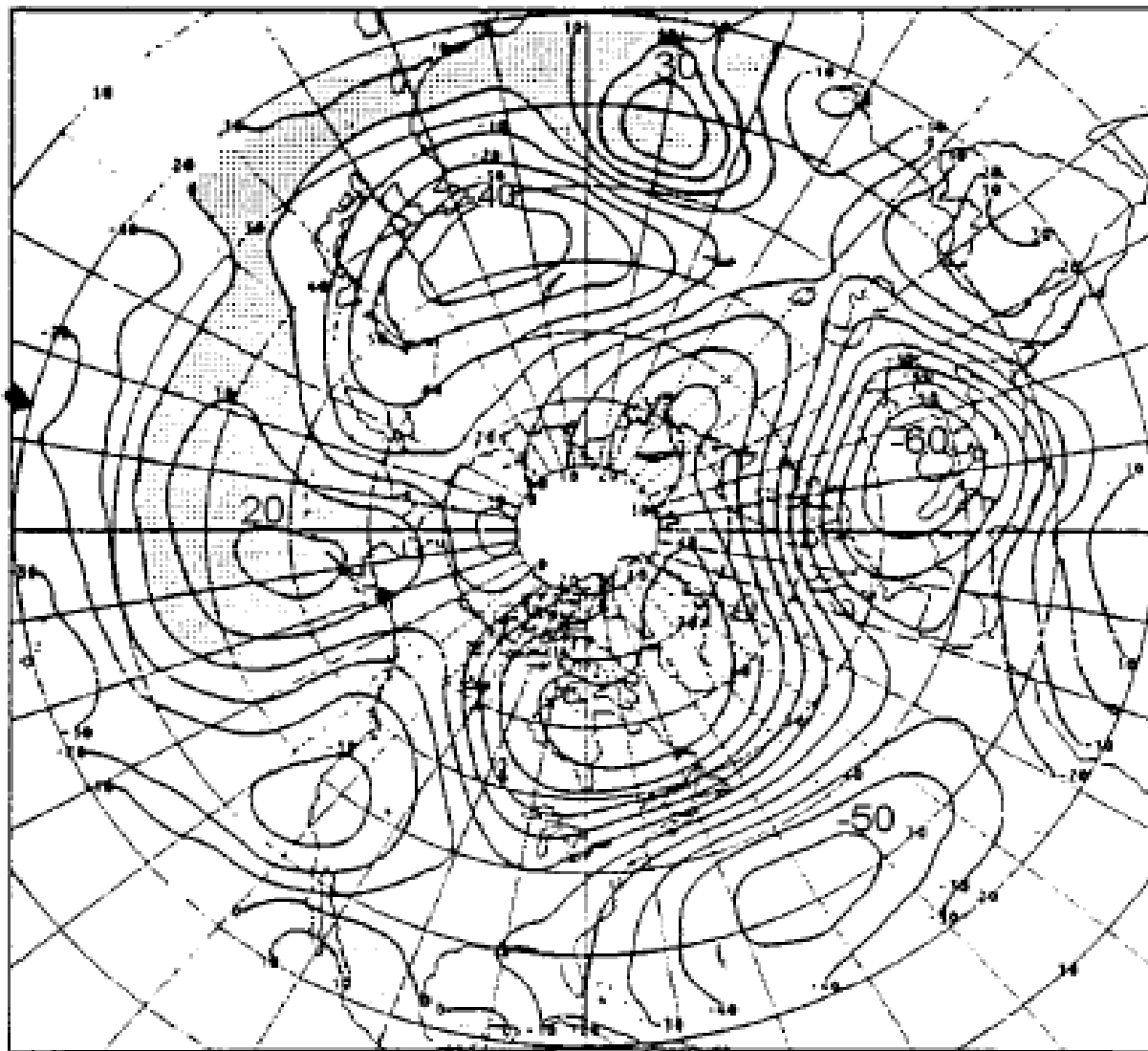


Abb. 11. Correlation of winter season averages of a Southern Oscillation Index (SOI) and 700 mb heights in hundreds. Negative and positive isopleths are shown as thin dashed lines and solid lines, respectively, the two separated by heavy solid zero lines. A subarea approximating the Pacific basin, used for the experiment summarized in Fig. 5c, is enclosed by heavy dashed line. Points on a 5 x 5 degree latitude - longitude grid at which correlations are 95 % significant are indicated by solid dots; open dots represent additional points significant with a more liberal test.



CORRELATION BETWEEN NOISE AND DJF 700 MB HEIGHT

Abb. 12 Correlation in hundreds of winter season averages of 700 mb heights with Gaussian noise. Shading denotes positive values.

# Kolmogoroff-Smirnoff-Test

Zwei Stichproben  $x_i$  und  $y_i$

$x_i$ : 0.6 1.2 1.6 1.7 1.7 2.1 2.8 2.9 3.0 3.2  
 $y_i$ : 2.1 2.3 3.0 3.1 3.2 3.2 3.5 3.8 4.6 7.2

Die erste Stichprobe habe den Umfang  $n_1$ , die zweite  $n_2$ . Im Beispiel ist  $n_1 = n_2 = 10$ .

Einteilung in Klassen und Bestimmung der Häufigkeiten  $n_x$  und  $n_y$

Klasse	0-0.9/	1-1.9/	2.0-2.9/	3.0-3.9/	4.0-4.9/	5.0-5.9/	6.0-6.9/	7.0-7.9
$n_x$	1	4	3	2	0	0	0	0
$n_y$	0	0	2	6	1	0	0	1

Bildung der Summenhäufigkeiten  $F_x$  und  $F_y$

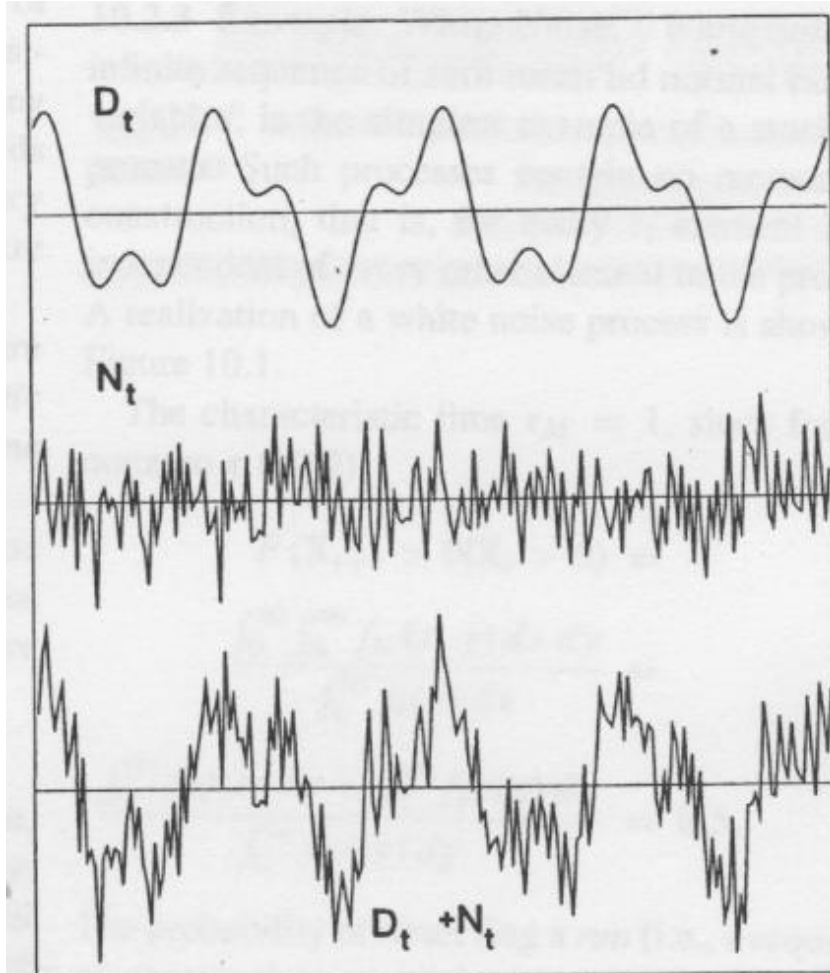
$F_x$ : 1/10, 5/10, 8/10, 10/10, 10/10, ...

$F_y$ : 0/10, 0/10, 2/10, 8/10, 9/10, 9/10, 9/10, 10/10

# Kolmogoroff-Smirnoff-Test [siehe (2.9)]

SAMPLE SIZE (N)	LEVEL OF SIGNIFICANCE FOR D = MAXIMUM [ F <sub>0</sub> (X) - S <sub>n</sub> (X) ]				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.210	.220	.240	.270	.320
30	.190	.200	.220	.240	.290
35	.180	.190	.210	.230	.270
OVER 35	<u>1.07</u> $\sqrt{N}$	<u>1.14</u> $\sqrt{N}$	<u>1.22</u> $\sqrt{N}$	<u>1.36</u> $\sqrt{N}$	<u>1.63</u> $\sqrt{N}$

# Stochastische Prozesse



Eine Zeitreihe  $X_t$  besteht häufig aus zwei Komponenten, einer dynamisch bestimmten Komponente  $D_t$  und einer stochastischen Komponente  $N_t$ , so dass

$$X_t = D_t + N_t.$$

Manchmal ist die zeitliche Entwicklung von  $D_t$  unabhängig von der Anwesenheit der stochastischen Komponente  $N_t$ ; in diesen Fällen ist die Entwicklung von  $D_t$  deterministisch.

$N_t$  wird auch als "weißes Rauschen" (engl. 'white noise' oder nur 'noise') bezeichnet.

Eine Zeitreihe ist eine Zufallsprobe von begrenzten Abschnitten unbegrenzter langer Sequenzen von Zufallszahlen. Eine Zeitreihe ist also eine Zufallsprobe eines stochastischen Prozesses.



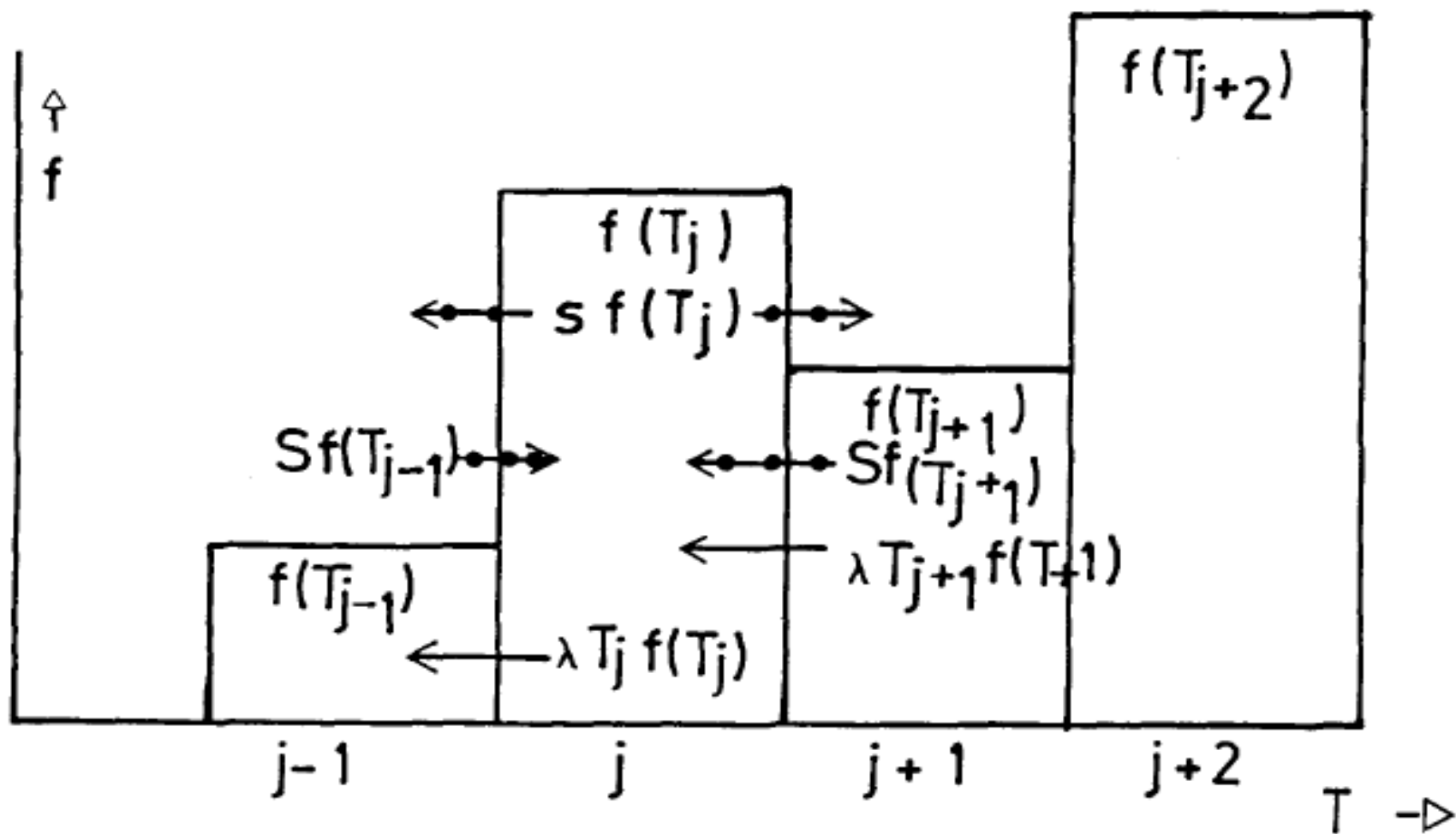


Abb. 13 Die Abbildung dient der Veranschaulichung von (3.32). Dargestellt sind die Zu- und Abflüsse von Zuständen für das Intervall  $j$ . Dabei ist  $s = Q/(2\alpha)DT$ . Die mit dem Sprungprozeß verbundenen Übergänge sind punktiert.

# Nulldimensionales Klimamodell

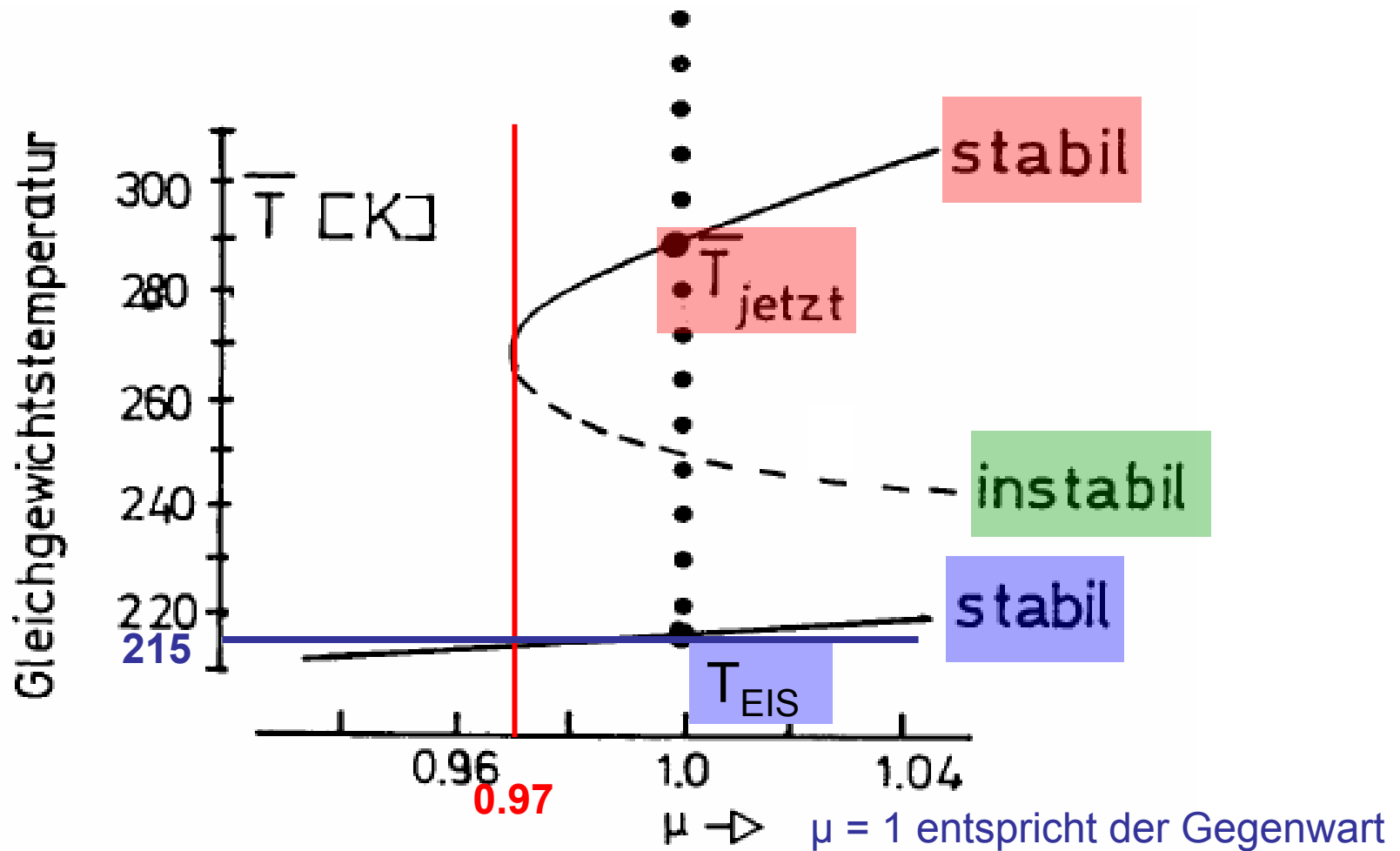


Abb. 14: Gleichgewichtstemperaturen  $\bar{T}$  des 0-dim. Klimamodells ( $\bar{T}$  ist also eine globale, mittlere Gleichgewichtstemperatur), wobei  $\mu$  hier die relative Intensität der Solarstrahlung ist (= Variationsparameter der Solarkonstante).

# Nulldimensionales Klimamodell

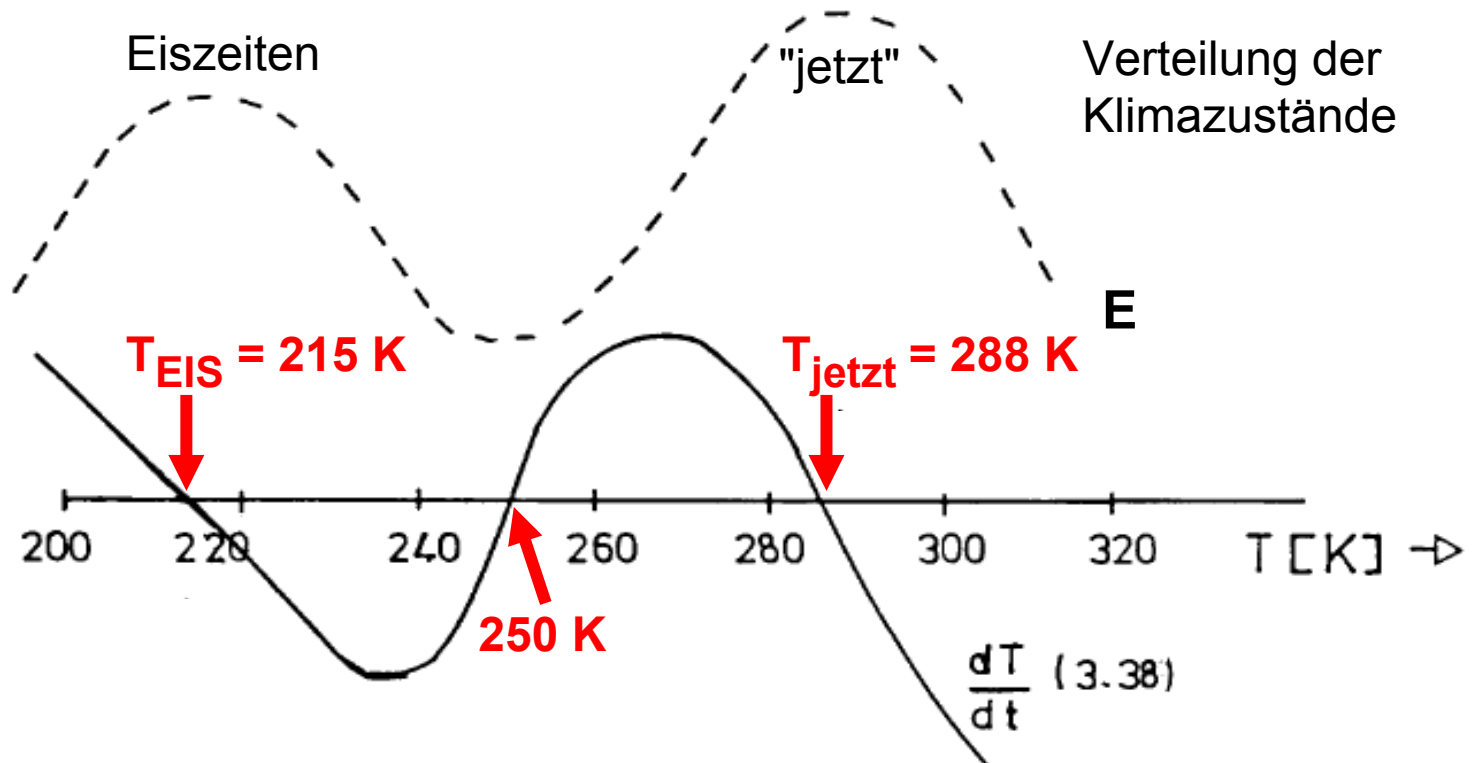
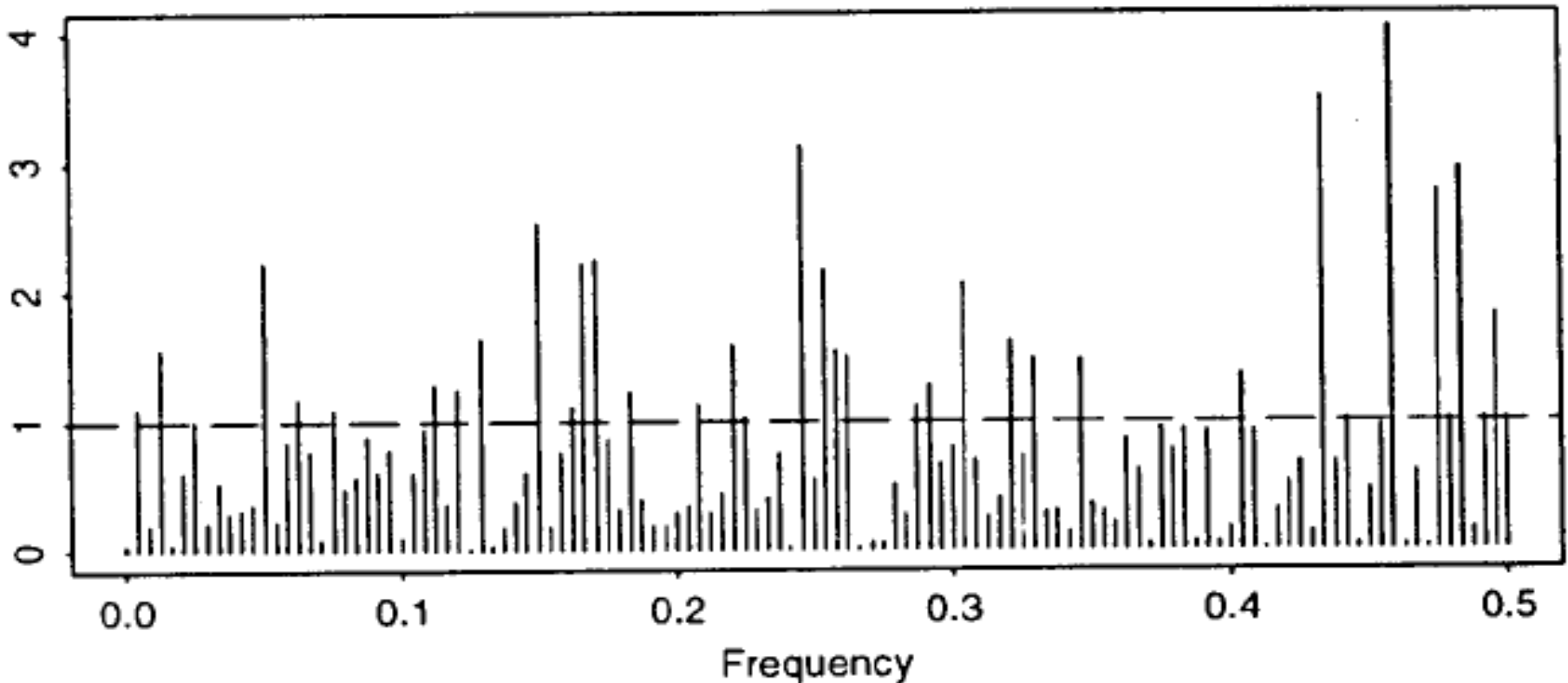


Abb. 15 Schematische Darstellung der Ableitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f$  für das Klimamodell. Die durchgezogene Kurve gibt die Tendenz  $\frac{dT}{dt}$  des Modells ohne stochastischen Antrieb, wie sie aus (3.31) folgt und etwa längs der gepunkteten Kurve in Abb. 14 abgelesen werden könnte. Die strichlierte Kurve stellt  $E$  dar und wegen  $f \sim \exp E$  deutet sie auch den Verlauf von  $f$  an.

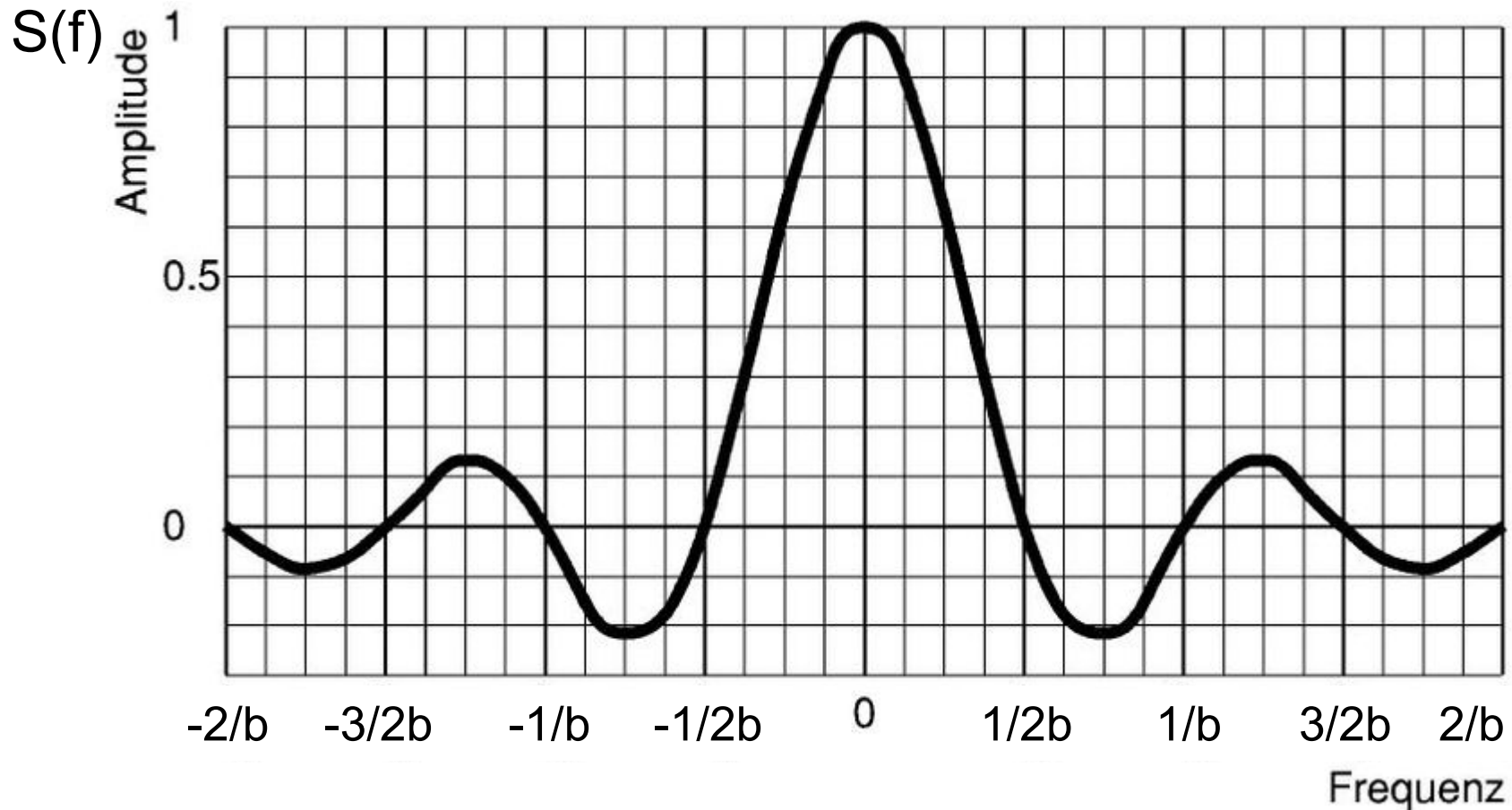
# Periodogramm von weißem Rauschen



$N = 2n = 240$ ; die Frequenz 0.5 ist die halbe Abtastfrequenz (= Nyquistfrequenz).  
Die gestrichelte Linie entspricht der Spektraldichte des weißen Rauschens.

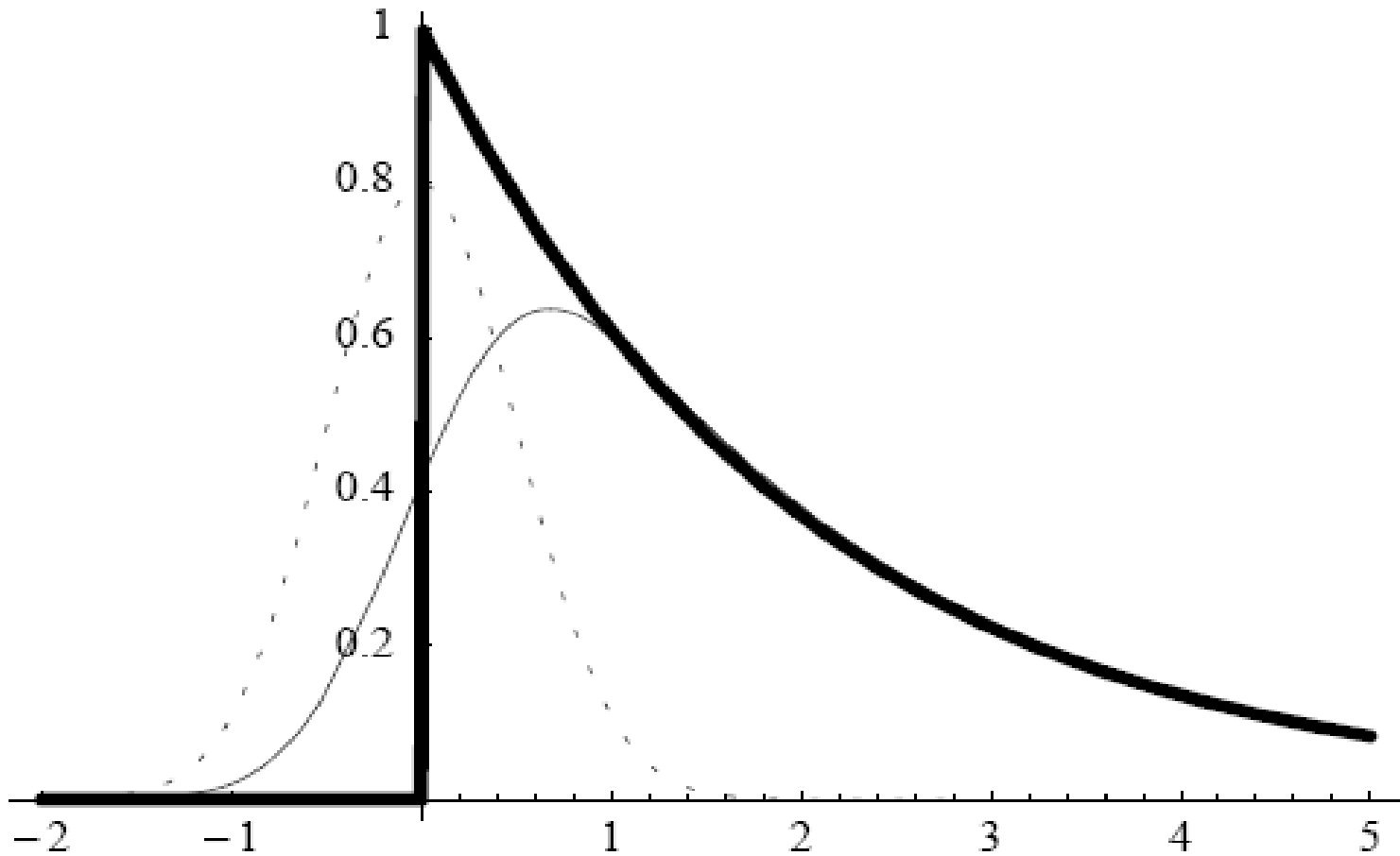
# Fourier-Transformierte des Rechtecks $s(t)$

(mit Höhe  $a=1$ , Fensterbreite  $2b$  und  $2ab=1$ )



Die Fourier-Transformierte hat die Form einer gedämpften Sinus-Schwingung, deren Periode der "Fenster-Frequenz"  $1/2b$  entspricht. Beim Vielfachen der Fenster-Frequenz ist der Betrag der Fourier-Transformierten gleich null.

# Faltung

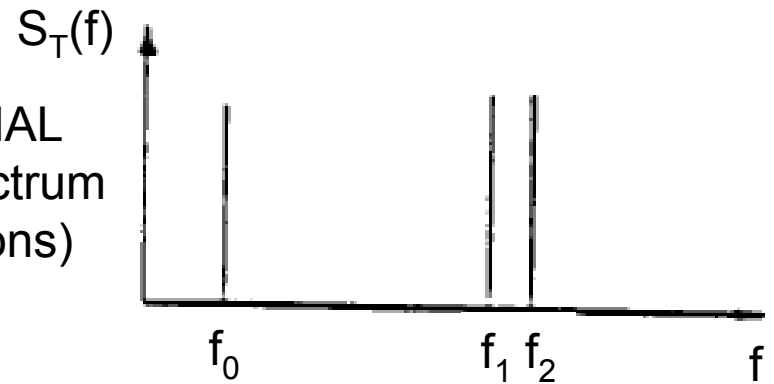


Gaußfunktion mit  $\sigma=1/2$  (gepunktete Linie); einseitige Exponentialfunktion mit  $\lambda=1/2$  (dicke Linie); und die dazugehörige Faltung dieser beiden Funktionen (dünne Linie).

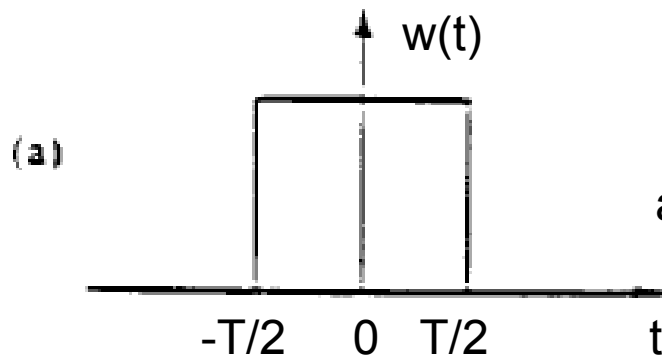
# Spektren in Abhängigkeit vom gewählten Fenster

"korrektes" Spektrum  
als Eingabe

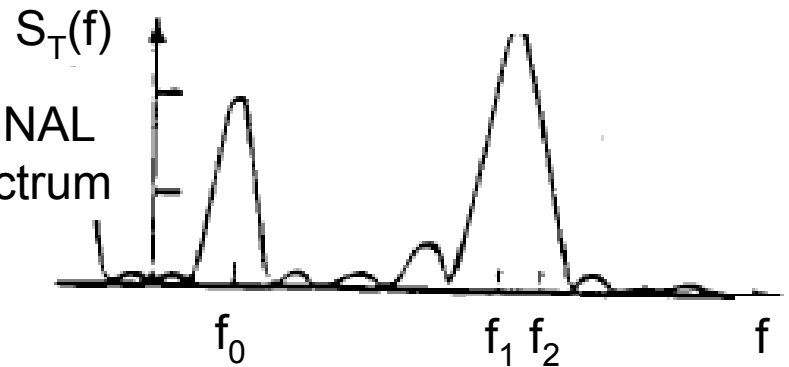
INPUT SIGNAL  
amplitude spectrum  
(unit  $\delta$ -functions)



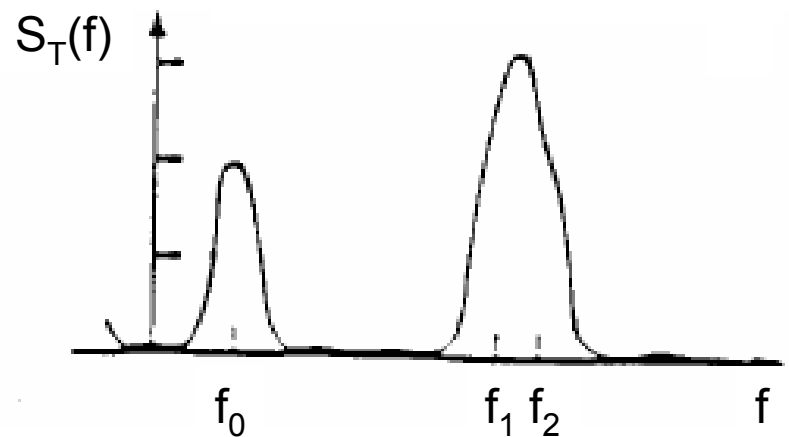
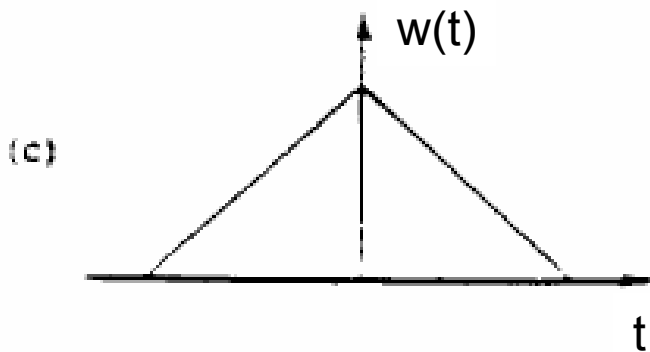
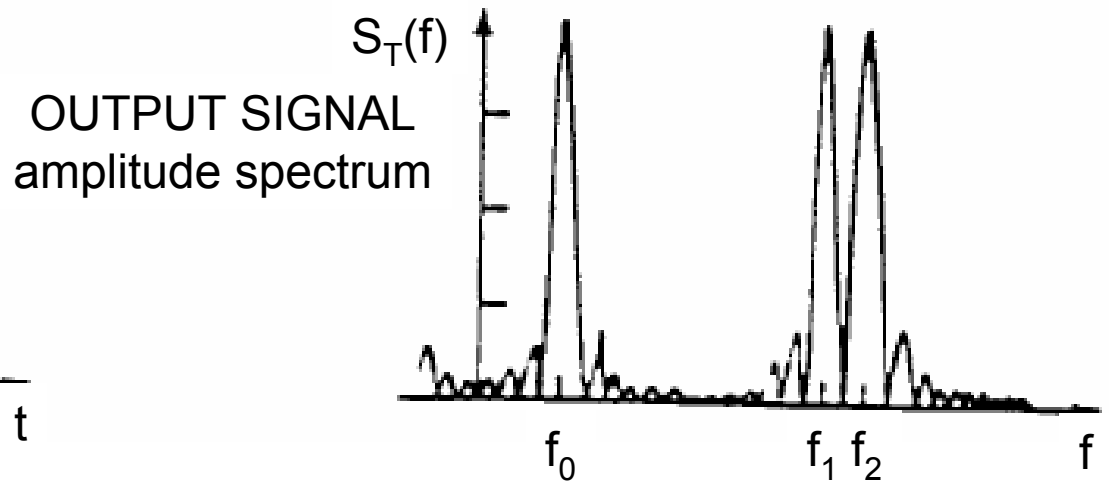
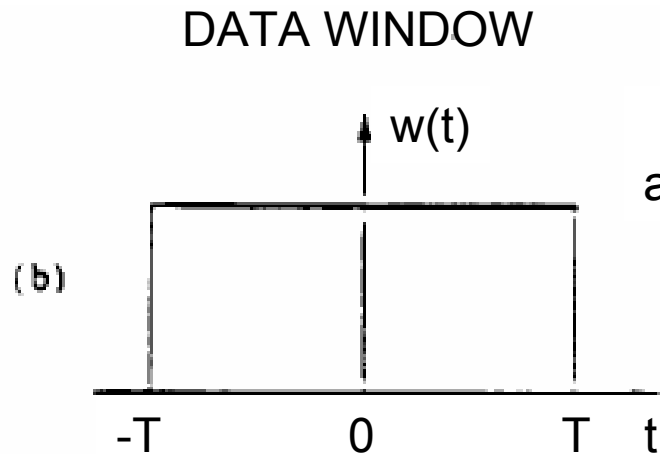
DATA WINDOW



OUTPUT SIGNAL  
amplitude spectrum

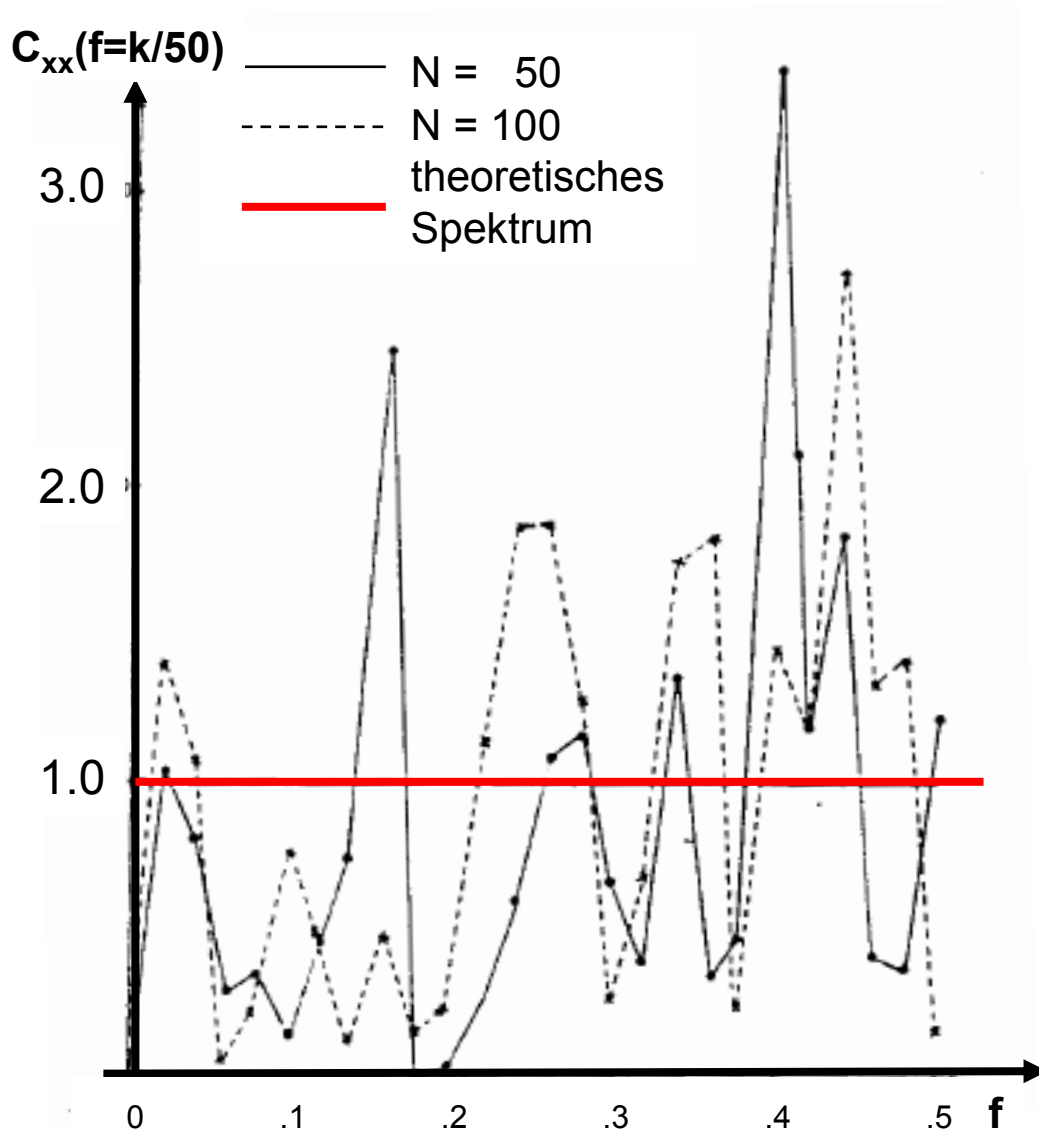


# Spektren in Abhängigkeit vom gewählten Fenster



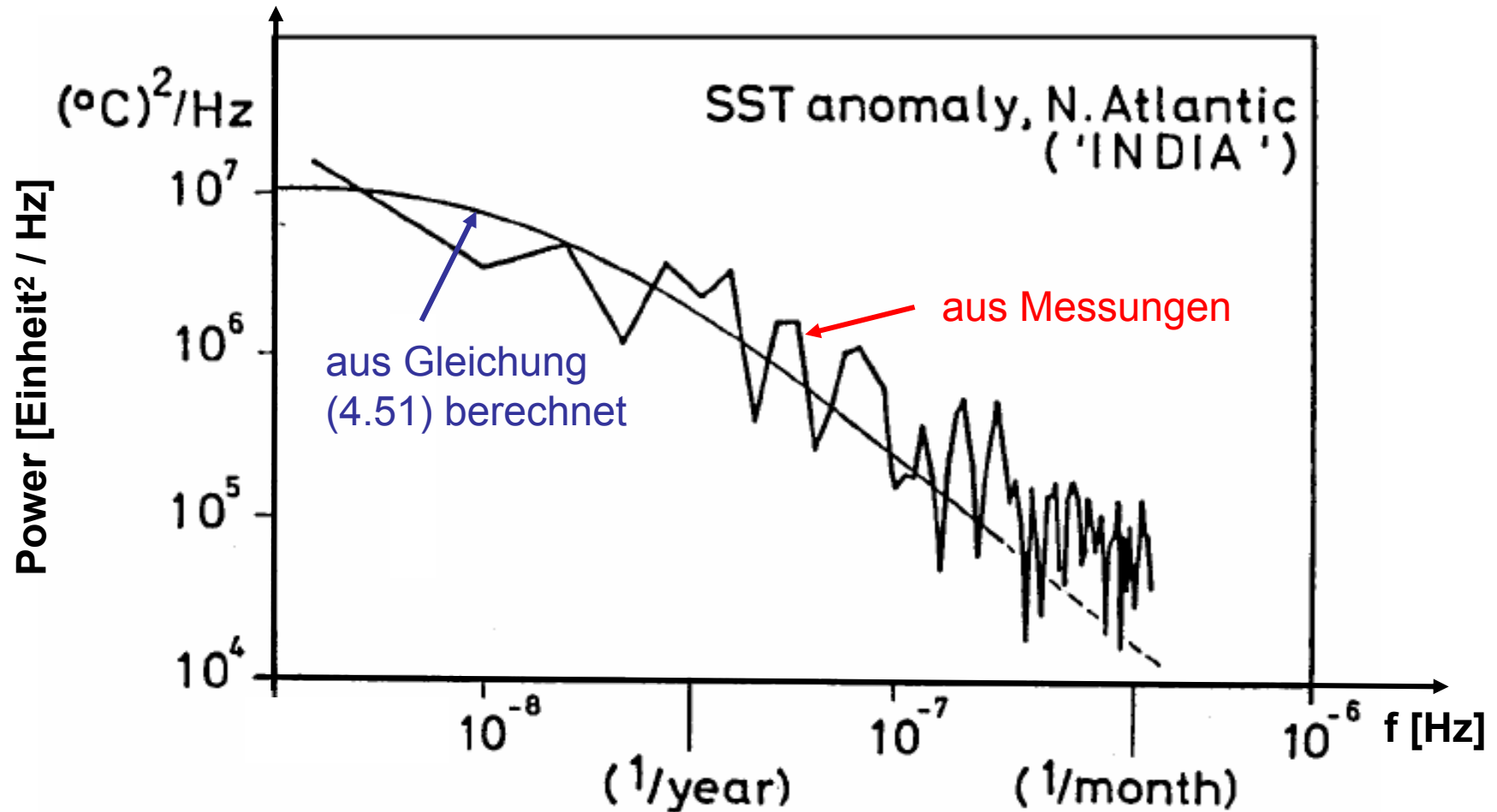


# Stichprobenspektrum für $N=50$ und $N=100$



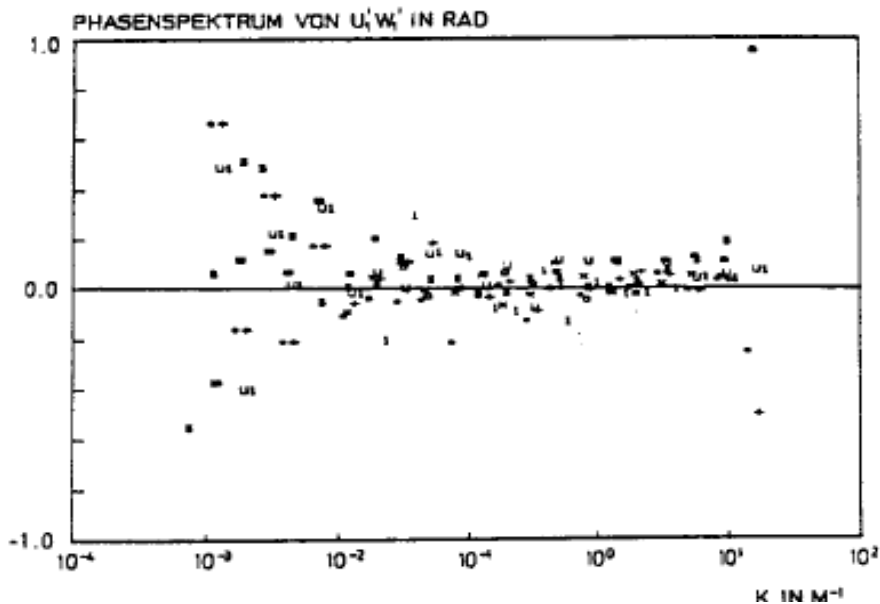
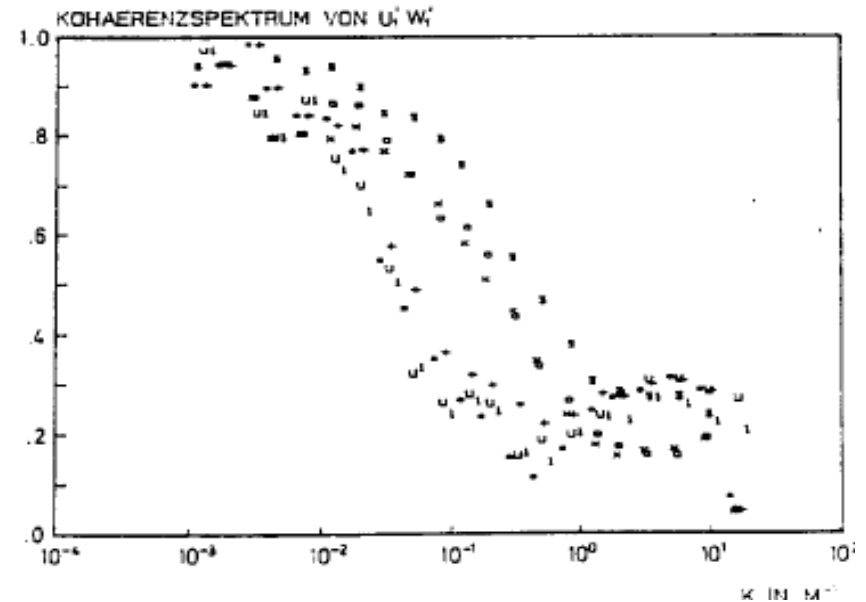
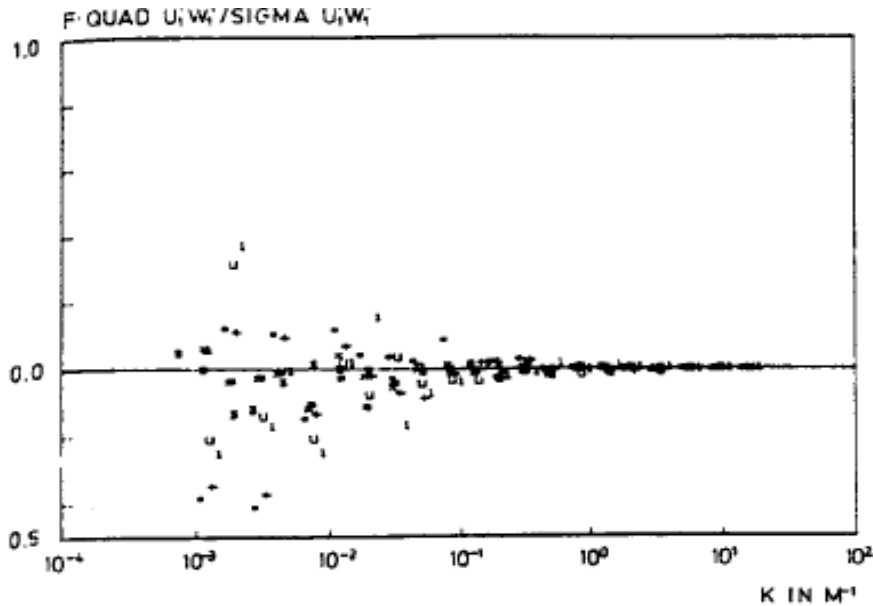
Stichprobenspektrum für 50 bzw. 100 Stichproben einer Realisierung von "weißem Rauschen" (diskret, Normalverteilt).  $f=0.5$  ist die Nyquistfrequenz.

# Powerspektrum der Anomalie der Meeresoberflächentemperatur



Powerspektrum abgeleitet aus Messungen (vom Wetterschiff *INDIA*) und berechnet aus Formel (4.51).

# Quadratur-, Phasen- und Kohärenzspektren

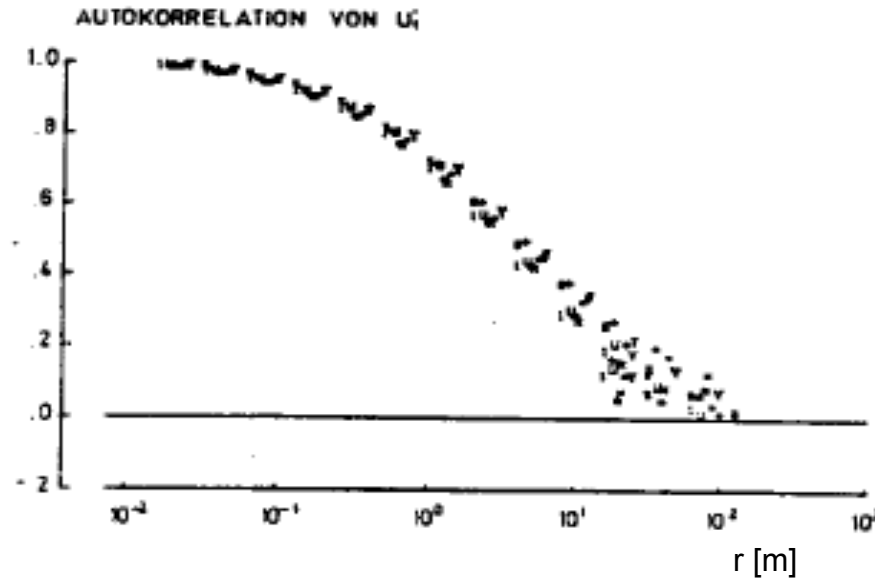
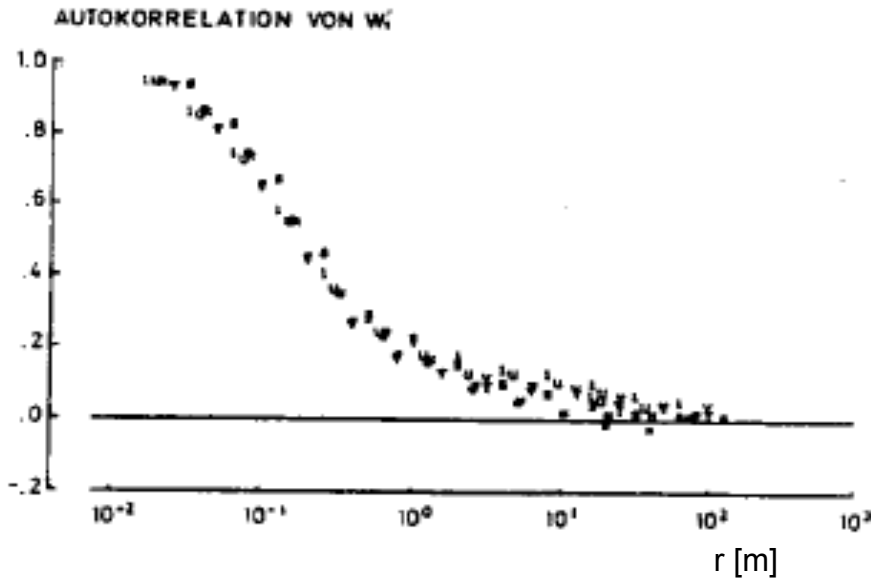


Oben links: Quadraturspektrum von  $u'$  und  $w'$ , normiert mit  $\sigma_{u'w'}$  sowie mit der Frequenz  $f$  multipliziert, um den höher frequenten Anteil besser hervor zu heben.

Links: Phasenspektrum von  $u'$  und  $w'$ .  
Oben rechts: Kohärenzspektrum von  $u'$  und  $w'$ .

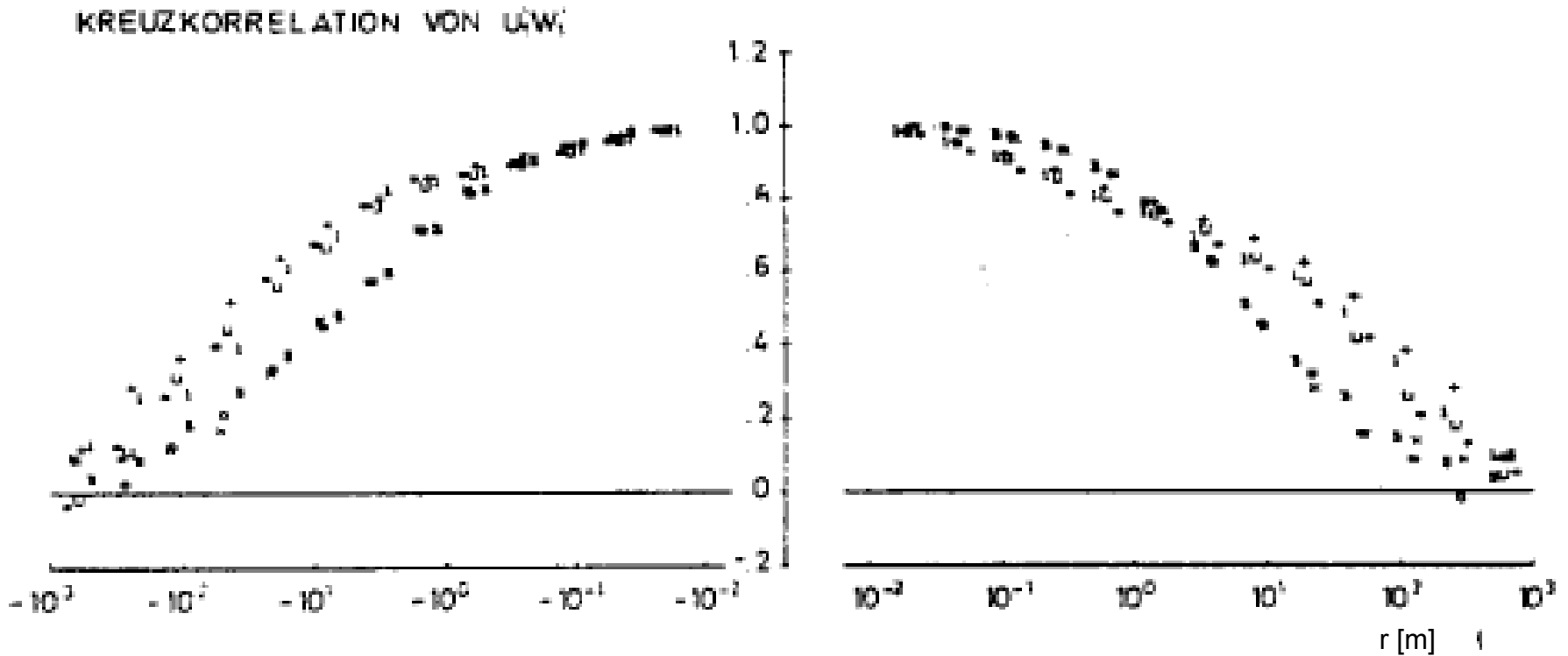
Jeweils in 0.8 m Höhe aufgetragen die Wellenzahl  $k$  [ $m^{-1}$ ].

# Autokorrelationspektrum



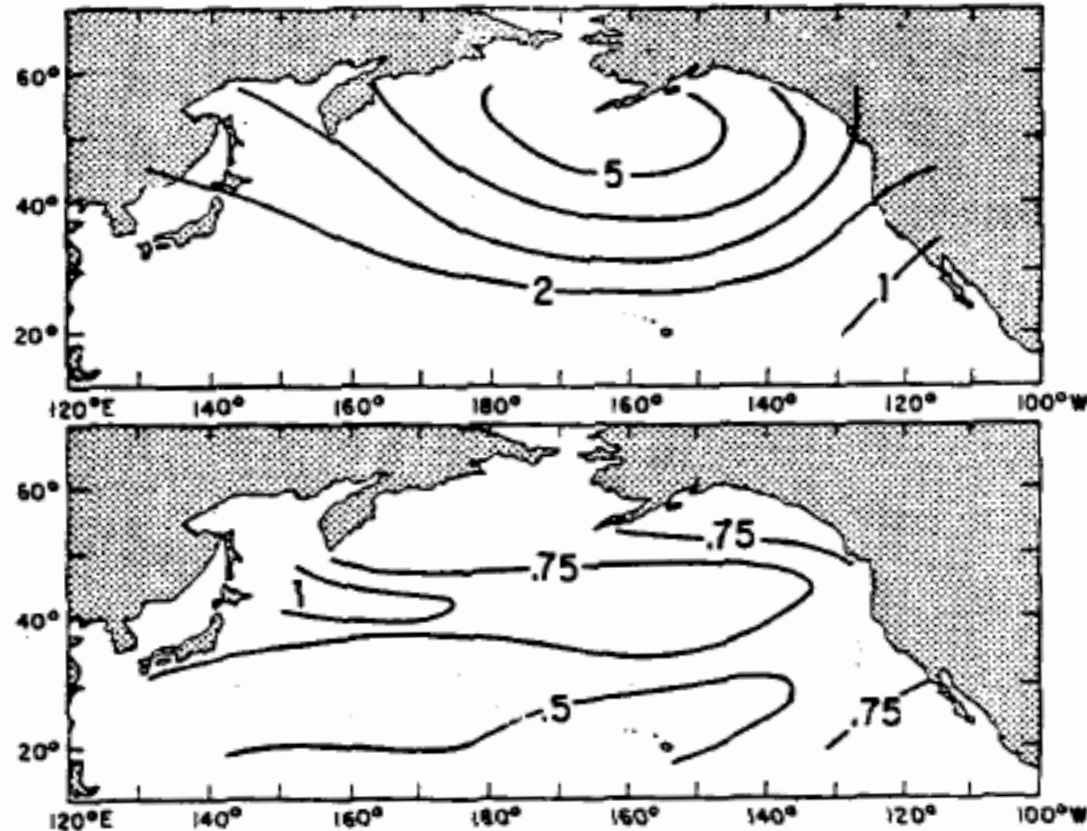
Autokorrelationsfunktion von  $w'$  (links) und  $u'$  (rechts) in 0.8 m Höhe. Sie fällt für  $w'$  bei einer Verschiebung von  $\tau = 0.3$  s bzw. für  $u'$  bei einer Verschiebung von  $\tau = 30$  s auf Null ab (mit  $\tau = \bar{u} / r$  und  $\bar{u} = 3$  m/s).

# Kreuzkorrelationspektrum



Kreuzkorrelationsfunktion  $\rho_{u'w'}$  in 0.8 m Höhe. Im Vergleich zur Autokorrelationsfunktion von  $u'$  sieht man einen etwas langsameren Abfall mit  $\tau$ . Die Autokorrelationsfunktion ist nahezu symmetrisch bezüglich  $\tau = 0$ .

# Empirische Orthogonalfunktionen (EOF)

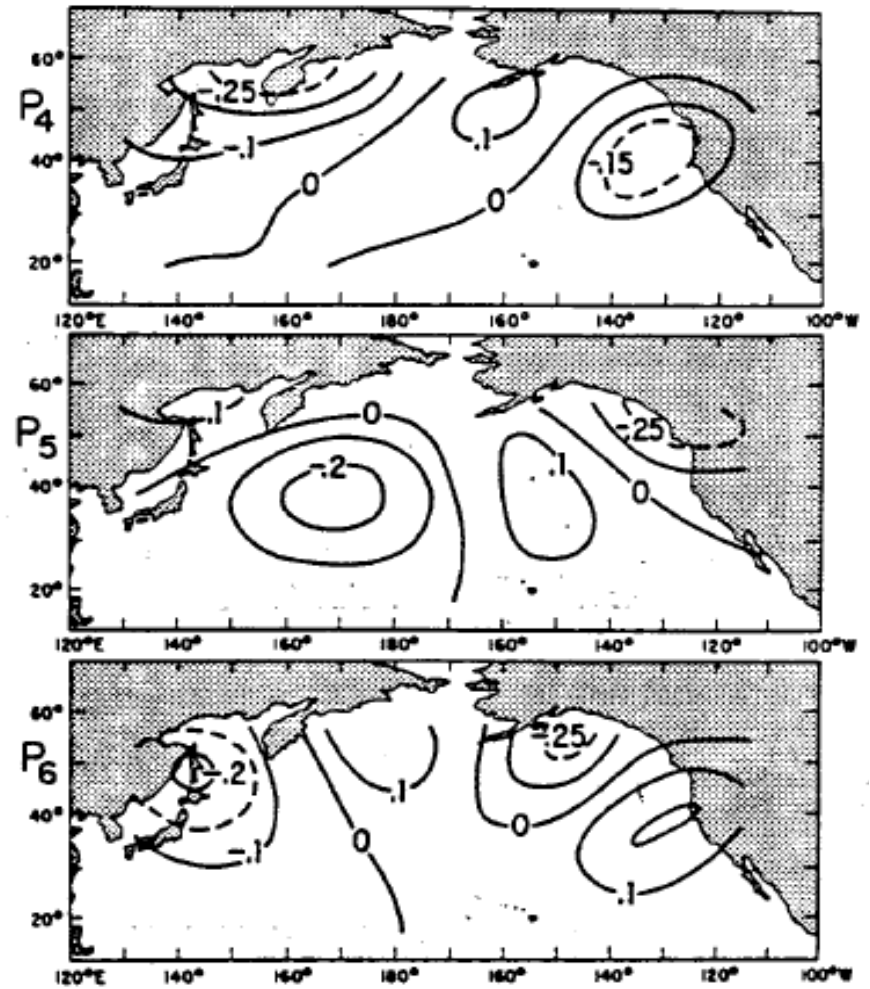
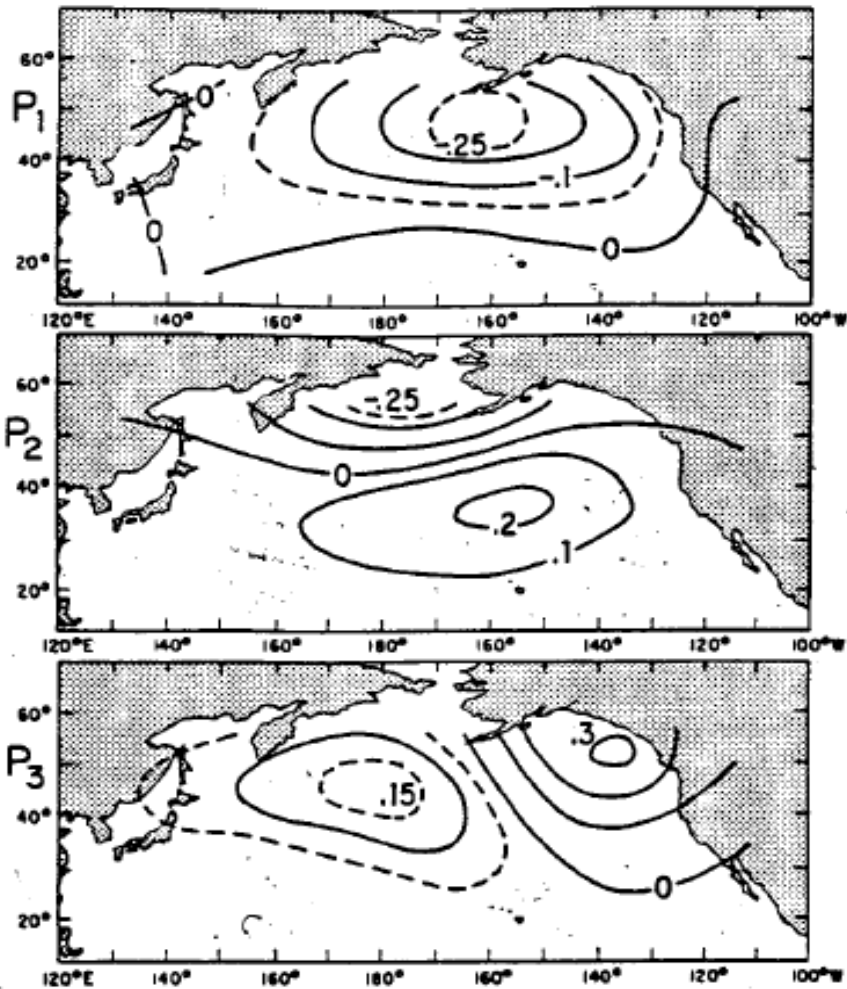


Untersuchung von Bodendruck  
Meerestemperatur im pazifi-  
schen Raum über 28 Jahre:

Die Standardabweichung zeigt  
deutliches Maximum bei den  
Bodendruckanomalien (oben)  
sowie bei den Anomalien der  
Meeresoberflächentemperatur  
(engl. sea surface temperature,  
SST) (unten).

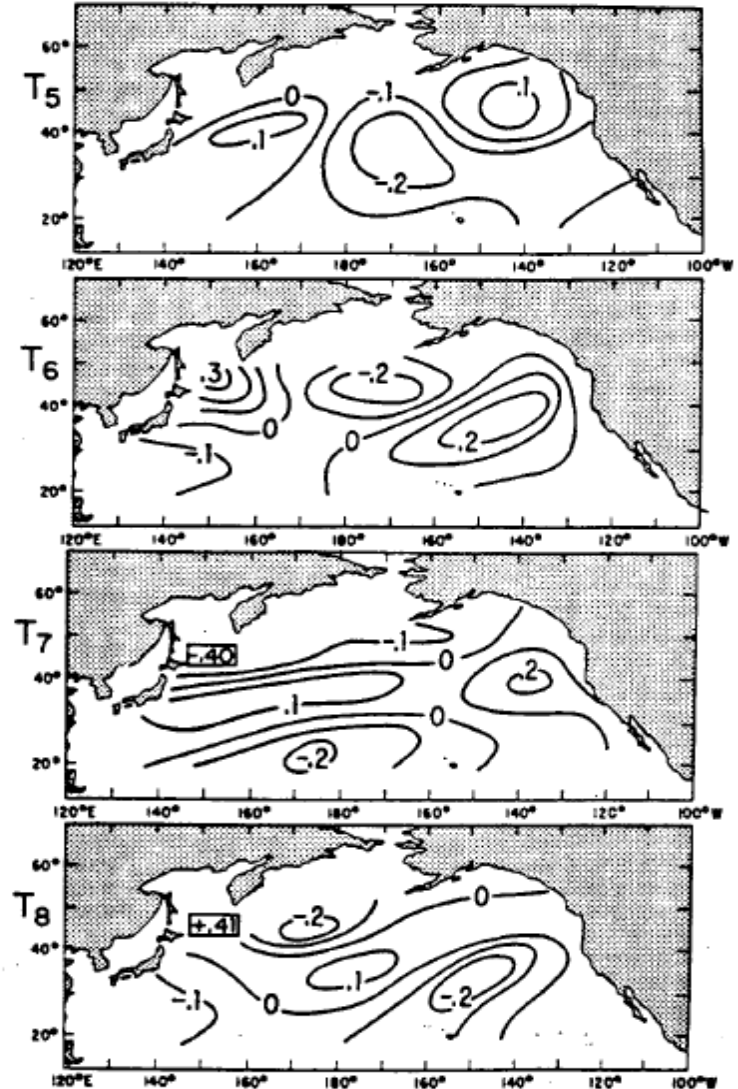
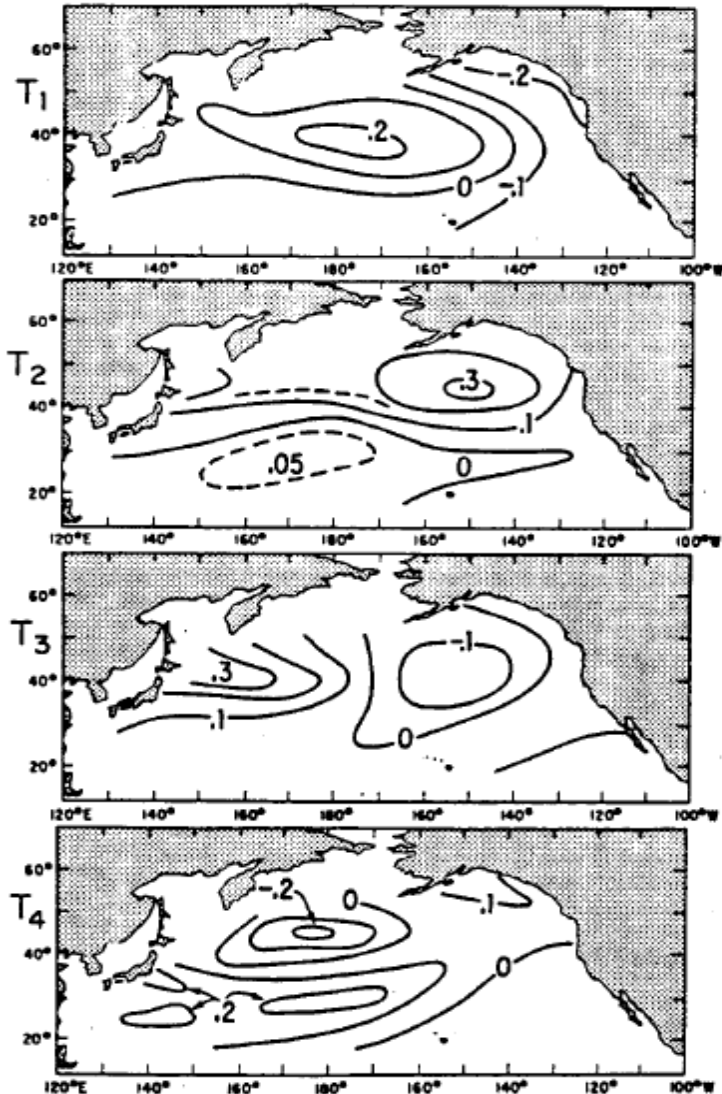
FIG Standard deviation of SLP anomalies (mb), upper, and SST anomalies (°C), lower. Anomalies are departures from monthly normal values. The anomaly variances are averaged over all months of the 28-year record.

# Empirische Orthogonalfunktionen (EOF)



Die ersten 6 EOFs P1-P6, die die Bodendruckanomalien beschreiben.

# Empirische Orthogonalfunktionen (EOF)

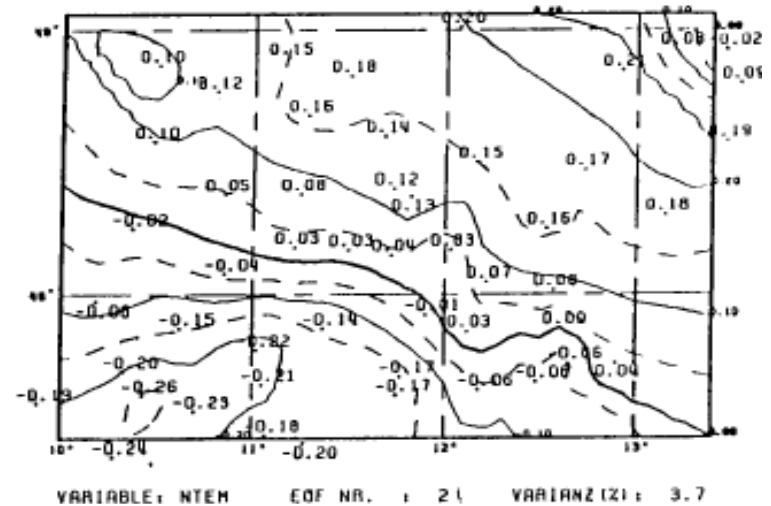
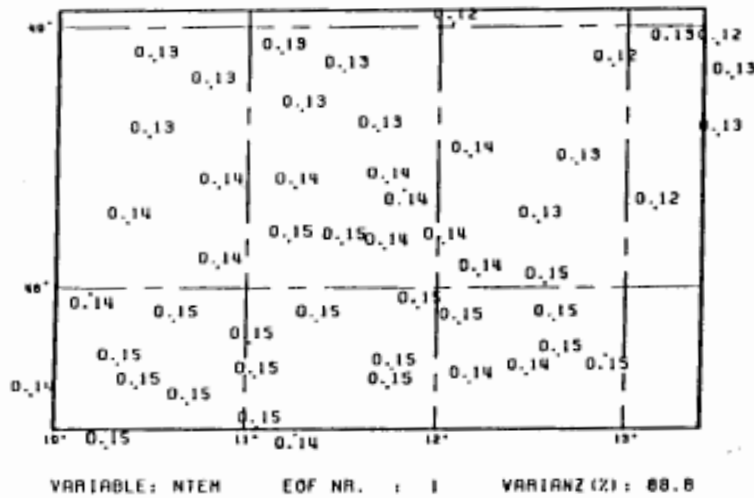


Die ersten 8 EOFs T1-T8, die die Anomalien der SST beschreiben.



# Empirische Orthogonalfunktionen (EOF)

## Temperatur



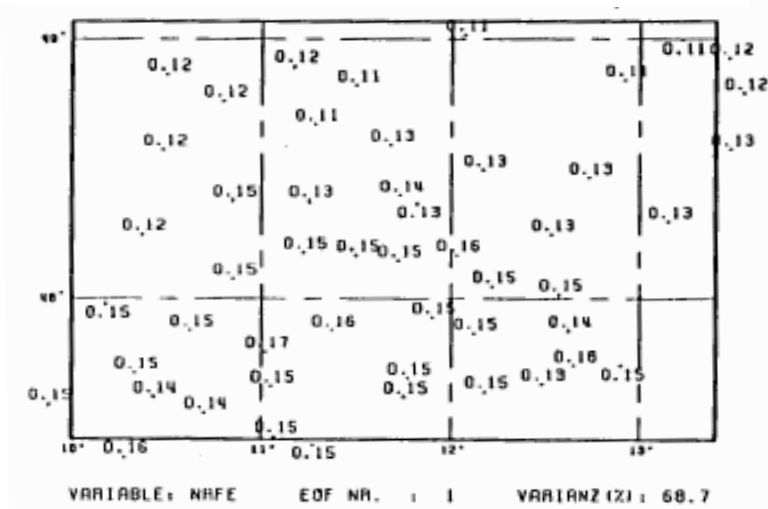
EOF1: Varianz = 88,8%

EOF2: Varianz = 3,7%

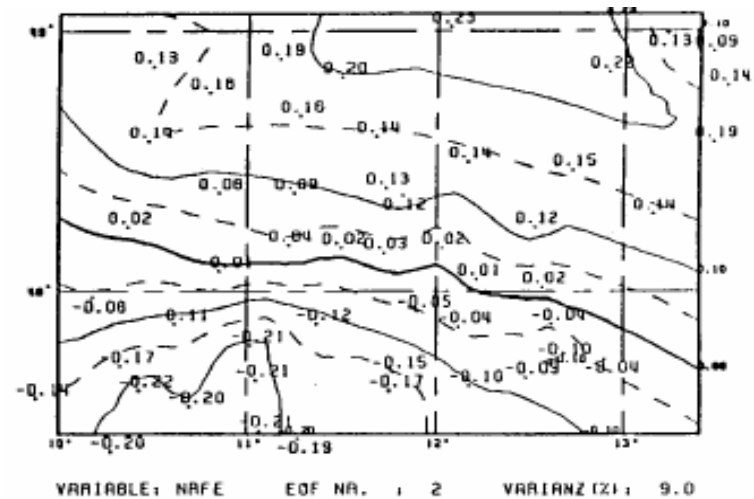
Zahlenwerte entsprechen den an den einzelnen Stationen ermittelten Werten.

# Empirische Orthogonalfunktionen (EOF)

## Relative Feuchte



EOF1: Varianz = 68,7%

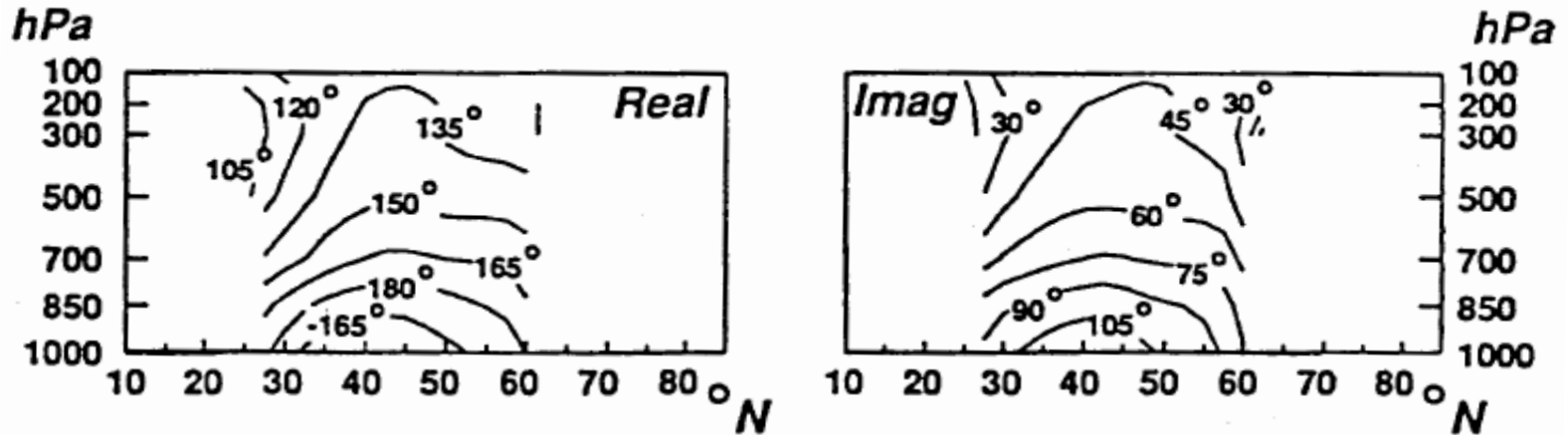


EOF2: Varianz = 9,0%

Zahlenwerte entsprechen den an den einzelnen Stationen ermittelten Werten.

# Analyse der 'Principal Oscillation Pattern' (POP)

## Phase



## Amplitude

