

# Grenzschicht Meteorologie



Sommersemester 2007  
Martin Dameris

**Prof. Dr. Martin Dameris**

**Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.  
Oberpfaffenhofen**

**Tel.: 08153 – 28 1558**

**E-mail: [martin.dameris@dlr.de](mailto:martin.dameris@dlr.de)**

**Meteorologisches Institut  
Ludwig-Maximilians Universität  
München**

**Tel.: 089 – 2180 4570/4571**

# Kapitel 1: Eigenschaften der Grenzschicht

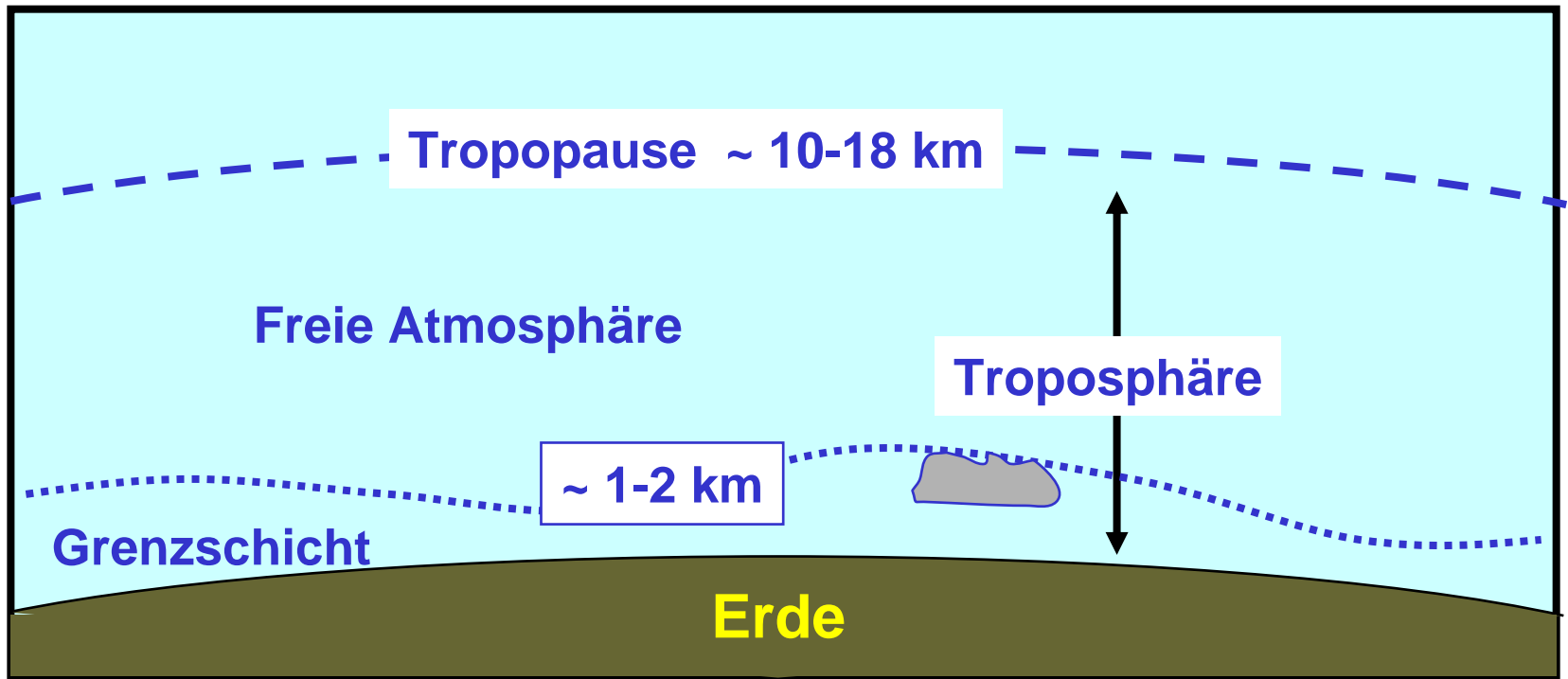


# Kapitel 1: Eigenschaften der Grenzschicht

- Literatur
- Grenzschichtprozesse, Grenzschichtwolken
- Anwendungen der Grenzschichttheorie
- Mittlere Winde, Wellen und Turbulenz, Hypothese von Taylor
- Struktur und Dicke der Grenzschicht
- Charakteristische "Skalen" für mikro- und mesoskalige Prozesse in Raum und Zeit
- Mikroskala und Mikrometeorologie

# Literatur

- **R. B. Stull: An Introduction to Boundary Layer Meteorology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.**
- A. P. Arya: Introduction to Micrometeorology, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1988.
- J. R. Garratt: The Atmospheric Boundary Layer Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- Foken, T.: Angewandte Meteorologie - Mikrometeorologische Methoden, Springer, Berlin, 2003.



- Meistens werden nur die untersten 2 km der Atmosphäre direkt durch die Grenzschicht (GS) beeinflusst (engl. Boundary Layer, BL).
- Die GS ist ein Teil der Troposphäre. Sie steht in direkter Wechselbeziehung mit der Erdoberfläche (Wärme, Feuchte); sie reagiert auf Veränderungen an der Erdoberfläche innerhalb weniger Stunden ( $\ll 1$  Tag).

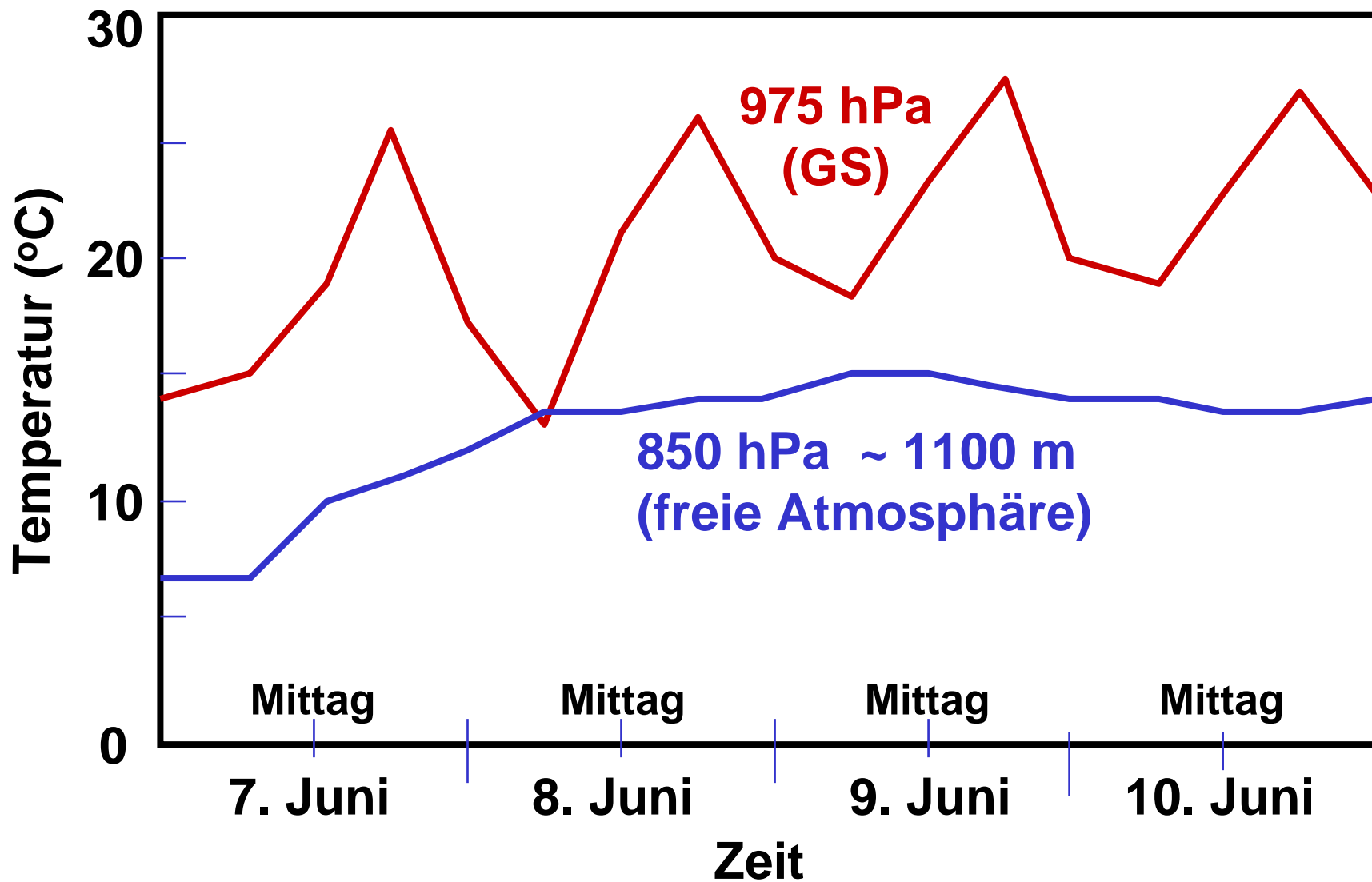
# Prozesse in der Grenzschicht

Prozesse in der Grenzschicht beinhalten:

- Reibungskräfte,
- Verdampfung und Transpiration (durch Pflanzen),
- Transfer von Wärme,
- Emission von Schadstoffen (-gasen),
- Veränderung der Bewegungen durch das Gelände.

Die Dicke der Grenzschicht ist variabel in Raum und Zeit. Sie variiert von einigen hundert Metern bis zu wenigen Kilometern.

# Temperaturvariationen in der unteren Atmosphäre



Lawton, Oklahoma, 1993



- Die täglichen Variationen werden nicht durch den direkten Strahlungsantrieb der Grenzschicht (GS) verursacht.
- In der GS wird nur wenig solare Strahlung absorbiert. Der größte Teil wird zum Erdboden übertragen. Das typische Absorptionsvermögen liegt in der Größenordnung von 90%, d.h. die meiste Energie wird am Boden absorbiert.
- Als Reaktion auf die einfallende solare Strahlung erwärmt sich der Erdboden oder er kühlt sich ab. Dieses führt zu Veränderungen in der GS durch Transportprozesse.
- Turbulenz ist einer der wichtigsten Transportprozesse und wird manchmal auch zur Definition der GS benutzt.
- Indirekt kann sich die gesamte Troposphäre aufgrund von Veränderungen der Eigenschaften in bodennahen Schichten verändern, aber außerhalb der GS ist die Reaktion relativ langsam.

- Bei der Untersuchung der Grenzschicht werden häufig zwei Wolkentypen betrachtet:
  - (Schönwetter) Cumulus (konvektive Wolke),
  - Stratocumulus (tiefe Schichtwolke).
- Cumulus Wolken in der GS sind eng verbunden mit Thermik (engl. thermals\*); es ist schwierig die Dynamik dieses Wolkentypus zu untersuchen, ohne Betrachtung der auslösenden Mechanismen in der GS.
- Stratocumulus Wolken füllen den oberen Teil einer gut durchmischten, feuchten GS, in der niedrigere Temperaturen die Kondensation von Wasserdampf erlauben. Nebel ist auch ein Phänomen der GS; es handelt sich hierbei um eine Stratocumulus Wolke, die den Erdboden berührt.

---

\* Thermals sind Luftsäulen von kräftig aufsteigender Luft in einer konvektiv durchmischten Grenzschicht.

# (Schönwetter) Cumulus Wolken



# Stratocumulus Wolken



# Gewitter

- Gewitter können die GS innerhalb von Minuten verändern, indem sie (warme) Luftmassen aus der GS nach oben in eine Wolke ziehen oder kalte, absinkende Luft in die GS einbringen.
- Gewitter sind eigentlich kein GS Phänomen, da sie kein am Erdboden angetriebenen Mechanismus darstellen.



# Konvektion über Land



# Konvektion über Land



# Anwendungen der Grenzschichttheorie

- Die atmosphärische (oder planetare) Grenzschicht spielt in vielen Bereichen eine wichtige Rolle:
  - Luftverschmutzung
  - Agrarmeteorologie
  - Hydrologie
  - Luftfahrt
  - mesoskalige Meteorologie
  - Wettervorhersage und Klima
  - mikroskalige Meteorologie, Stadtmeteorologie



## Beispiel: Stadtmeteorologie

- Stadtmeteorologie steht in direktem Zusammenhang mit dem städtischen Umfeld und der Schadstoffbelastung, einschließlich von Episoden mit starker Belastung in der Photosmog und die zufällige Freisetzung gefährlicher Gase eine Rolle spielt.
- Die Ausbreitung von Smog und Spurenstoffen (-gasen) in den unteren Schichten der Atmosphäre hängt stark von den aktuellen meteorologischen Bedingungen ab.
- Von besonderem Interesse ist die Information von dem wahrscheinlichen Wachstum der flachen, gut durchmischten Grenzschicht als Ergebnis der Oberflächenheizung sowie der Faktoren, die die Erosion und den endgültigen Zusammenbruch der bodennahen Inversion bestimmen.

# Smog in Los Angeles



# Kontrolle und Management der Luftqualität

- Sie steht in engem Zusammenhang mit Transport und Ausbreitung von atmosphärischen Spurenstoffen, einschließlich industrieller Abgasfahnen.
- Die Beschreibung wichtiger Prozesse muss die turbulente Mischung in der atmosphärischen GS einschließen, besonders die Rolle von Konvektion, Photochemie, trockene und nasse Deposition am Erdboden.
- Untersuchungen von atmosphärischer Turbulenz sind in diesem speziellen Bereich für praktische Anwendungen von Bedeutung. Dies gilt ferner für Studien lokaler Meteorologie, einschließlich der Rolle der mesoskaligen Zirkulation (Seebrise, Hangwinde, Talwinde) und dem Phänomen der Entkopplung von (kleinskaligen) Bewegungen (Strömungen) in bodennahen Schichten und den zum Teil überlagerten großskaligen Bewegungen.

## Beispiel: Luftfahrt

- Sie ist betroffen durch GS Phänomene wie tiefe Wolken, tief liegende Windwirbel und starke Windscherung, die zu sehr intensiver Turbulenz führt, vor allem bei Starts und Landungen von Flugzeugen.
- Im Fall von tiefen Wolken und tief liegenden Windwirbeln interessieren besonders die Faktoren, die deren Bildung, Aufrechterhaltung und Auflösung bestimmen.

# Beispiele: Agrarmeteorologie und Hydrologie

- Diese sind vor allem betroffen von Prozessen wie der trockenen und nassen Deposition natürlicher Gase und Schadstoffen auf Feldfrüchten, Verdunstung, Tau- und Frostbildung.
- Die drei letzt Genannten sind eng verbunden mit dem Zustand der atmosphärischen GS, mit der Intensität der Turbulenz und mit der Energiebilanz am Erdboden.

# Beispiel: Numerische Wettervorhersage und Klimasimulationen

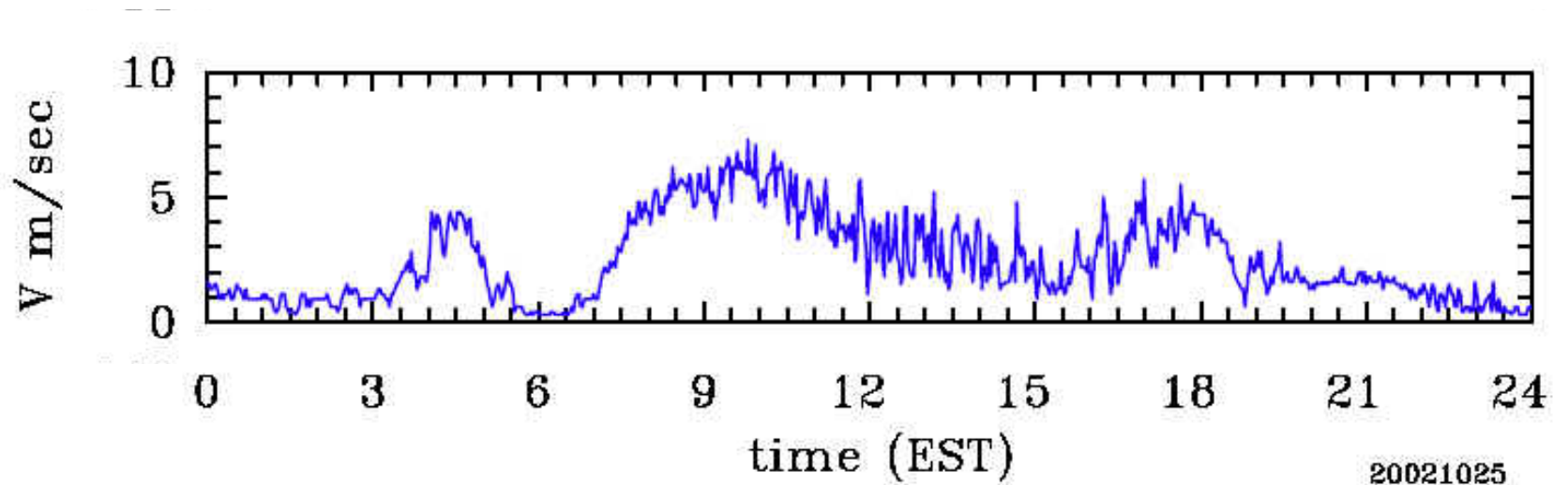
- Diese basieren auf dynamischen Rechenmodellen der Atmosphäre und hängen von der realistischen Behandlung der Erdoberfläche und den wichtigen physikalischen Prozessen in der Atmosphäre ab.
- Kein Zirkulationsmodell (Klimamodell) ist konzeptionell vollständig ohne eine ausreichend genaue Behandlung der GS. Kein Wettervorhersagemodell kann eine gute Prognose liefern ohne ausreichende Behandlung des Einflusses der bodennahen Schichten.
- Die GS beeinflusst sowohl die Dynamik als auch die Thermodynamik der Atmosphäre!

- Es gibt eine Vielzahl dynamischer Effekte:
  - Mehr als die Hälfte der kinetischen Energie (KE) der Atmosphäre geht in der GS verloren.
  - Reibung in der GS verursacht in der unteren (freien) Atmosphäre Bewegungen quer zu den Isobaren; vertikale Bewegungen an der Obergrenze der GS verursachen Änderungen der Wirbelstärke (Vorticity) in der darüberliegenden freien Atmosphäre.
- Thermodynamische Effekte:
  - Der gesamte Wasserdampf, der durch Verdampfen an der Erdoberfläche in die Atmosphäre gelangt, muss die GS durchqueren.
- Die Ozeane gewinnen den meisten Impuls durch die GS, was wiederum die Ozeanzirkulation beeinflusst.

- Sowohl bei der Betrachtung von Klima, als auch lokalem Wetter, sind vertikale Durchmischung sowie die Bildung, Aufrechterhaltung und Auflösung von Wolken die wichtigsten GS Prozesse, die in numerischen Modellen der Atmosphäre parametrisiert werden.
- Landoberflächeneigenschaften, die für genaue Klimasimulationen mitentscheidend sind, sind Albedo, Rauigkeit, Feuchtigkeitsgehalt und Vegetation.



# Mittlerer Wind, Wellen und Turbulenz

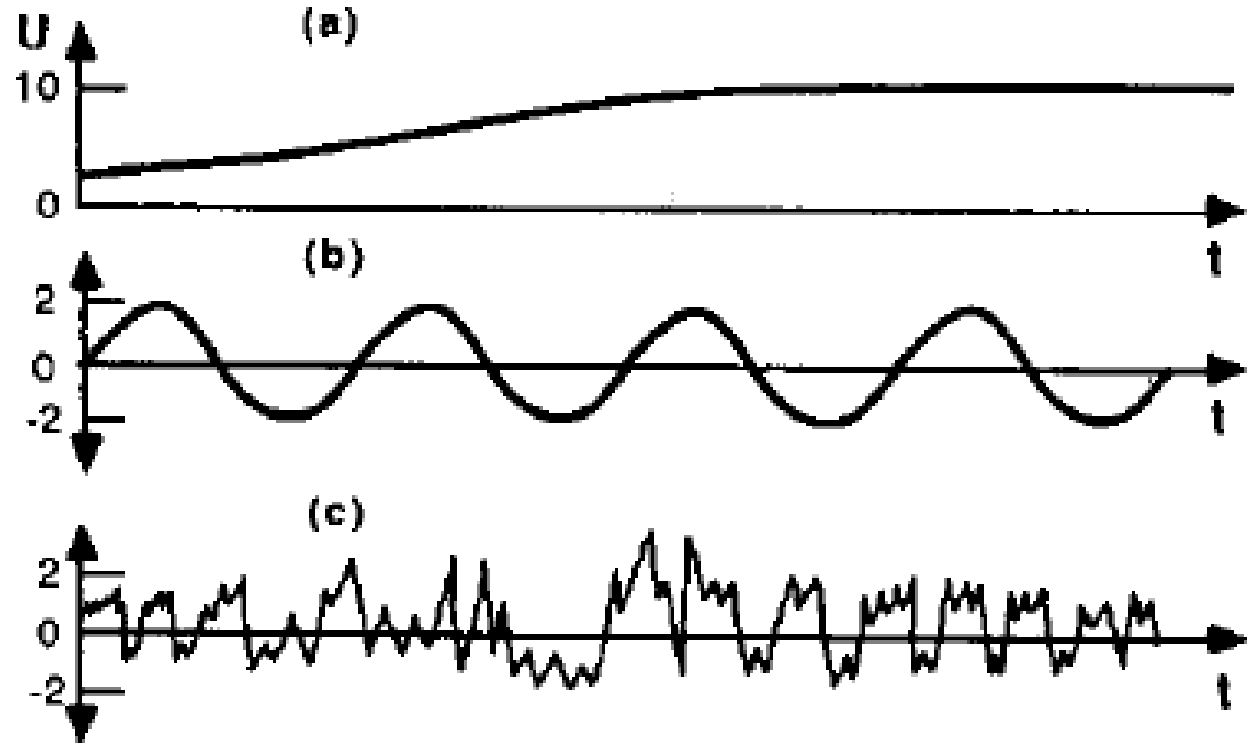


# Mittlerer Wind, Wellen und Turbulenz

Winde (Luftströmungen) können in drei Kategorien eingeteilt werden: Mittlerer Wind, Wellen und Turbulenz:

**Fig. 1.3**

Idealization of  
(a) Mean wind  
alone, (b) waves  
alone, and (c)  
turbulence alone.  
In reality waves  
or turbulence are  
often super-  
imposed on a  
mean wind.  $U$  is  
the component  
of wind in the  
 $x$ -direction.



# Mittlerer Wind

- In der GS sind mittlere Winde für den schnellen, horizontalen Transport (die Advektion) von Luftmassen verantwortlich. Horizontale Winde in der GS sind in der Größenordnung von 2-10 m/s.
- Reibung führt dazu, dass die mittlere Windgeschwindigkeit an der Erdoberfläche am niedrigsten ist.
- Vertikalwinde nahe der Erdoberfläche sind sehr viel kleiner, normalerweise in der Größenordnung von mm/s bis cm/s.

# Wellen

- Wellen werden besonders häufig in der nächtlichen GS beobachtet.
- Wellen transportieren nur in geringen Umfang Wärme, Feuchtigkeit oder Schadstoffe, aber sie transportieren sehr effektiv Impuls und Energie.
- Wellen können zum Beispiel durch lokale Windscherung oder beim Überströmen von Hindernissen erzeugt werden.
- Wellen können sich über größere Distanzen ausbreiten.

# Turbulenz

- Die relativ große Häufigkeit des Auftretens von Turbulenz nahe dem Erdboden ist eine herausragende Eigenschaft der GS, die diese auch von dem Rest der Atmosphäre unterscheidet.
- Außerhalb der GS findet man Turbulenz vorwiegend in konvektiven Wolken und nahe dem Strahlstrom, wo starke Windscherungen sogenannte "Clear Air Turbulence (CAT)" erzeugen können.
- Manchmal können atmosphärische Wellen die Windscherung lokal verstärken und somit Turbulenz erzeugen. Wellenphänomene können daher mit turbulentem Transport von Wärme und Schadstoffen verknüpft sein, obwohl Wellen ohne Turbulenz nicht so effektiv wären.

## Zerlegung einer Variablen (Größe)

- Um Turbulenz oder Wellen zu untersuchen ist es üblich, Variable wie Temperatur oder Wind in einen mittleren Anteil und die Abweichung davon zu zerlegen, zum Beispiel:  $T = \bar{T} + T'$ .
- Der Abweichungsterm  $x'$  kann entweder den Effekt von Wellen oder Turbulenz repräsentieren, der dem mittleren Wert überlagert ist.
- Wenn man dies zum Beispiel in den Bewegungsgleichungen für die Atmosphäre berücksichtigt, ergeben sich neue Terme, die sogenannte Störgrößen einschließen.

# Turbulenz kontra Wellen

- Produkte dieser Störgrößen ( $x'y'$ ) beschreiben nicht-lineare Wechselwirkungen und sind primär mit Turbulenz verbunden. Häufig werden diese vernachlässigt, vor allem wenn Wellenbewegungen von vorrangigem Interesse sind.
- Andere Terme, die nur eine Störvariable ( $xy'$ ) beinhalten, beschreiben lineare Prozesse, die mit Wellen verbunden sind. Diese werden vernachlässigt, wenn Turbulenz untersucht wird.

# Turbulenz

- Turbulenz, die dem mittleren Wind überlagert ist, kann man sich als zusammengesetzte irreguläre kleine Wirbel der Bewegung vorstellen; im englischen werden sie mit "Eddy" oder "Eddies" bezeichnet.
- Üblicherweise besteht Turbulenz aus Wirbeln (Eddies) unterschiedlicher Größe, die sich gegenseitig überlagern. Die relative Größe dieser verschiedenen Eddies definieren das Turbulenzspektrum (siehe Kapitel 2).



# Turbulenz

- Ein Großteil der GS-Turbulenz hat seine Quellen am Erdboden:
- Die solare Erwärmung des Erdbodens an einem sonnigen Tag verursacht ein Aufsteigen warmer Luftmassen (engl. thermals). Diese "Thermals" sind nichts anderes als große, warme Luftwirbel (Eddies).
  - Reibungskräfte, die auf die Luft wirken, führen beim Überströmen des Erdbodens zur Windscherung, die häufig Turbulenz erzeugt.
  - Hindernisse, wie Bäume oder Gebäude, lenken den Luftstrom ab und verursachen turbulente Strukturen unmittelbar an den Hindernissen und stromabwärts davon.

# Turbulente Eddies

- Die größten Eddies in der GS haben eine Größe, die in etwa der Dicke der GS entsprechen, d.h. sie haben einen Durchmesser von etwa 100 bis zu 3000 Meter.
- Hierbei handelt es sich um die stärksten (intensivsten) Eddies.
- Kleinere Eddies sind z.B. sichtbar bei der Verwirbelung von Laub oder der wellenförmigen Bewegungen von Gras oder Kornfeldern. Diese Eddies versorgen die größeren Eddies mit Energie.
- Die kleinsten Eddies (mit einem Durchmesser von nur einigen mm) sind wegen der Dissipationseffekte der molekulare Viskosität sehr schwach.

# Hinweis auf große Eddies in der GS: Wolkenstrassen



# Wolkenstrassen



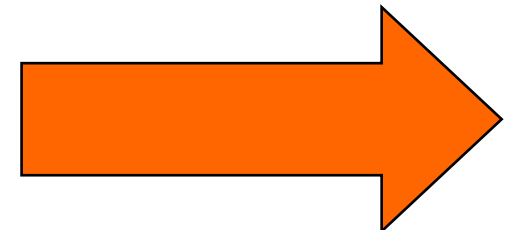


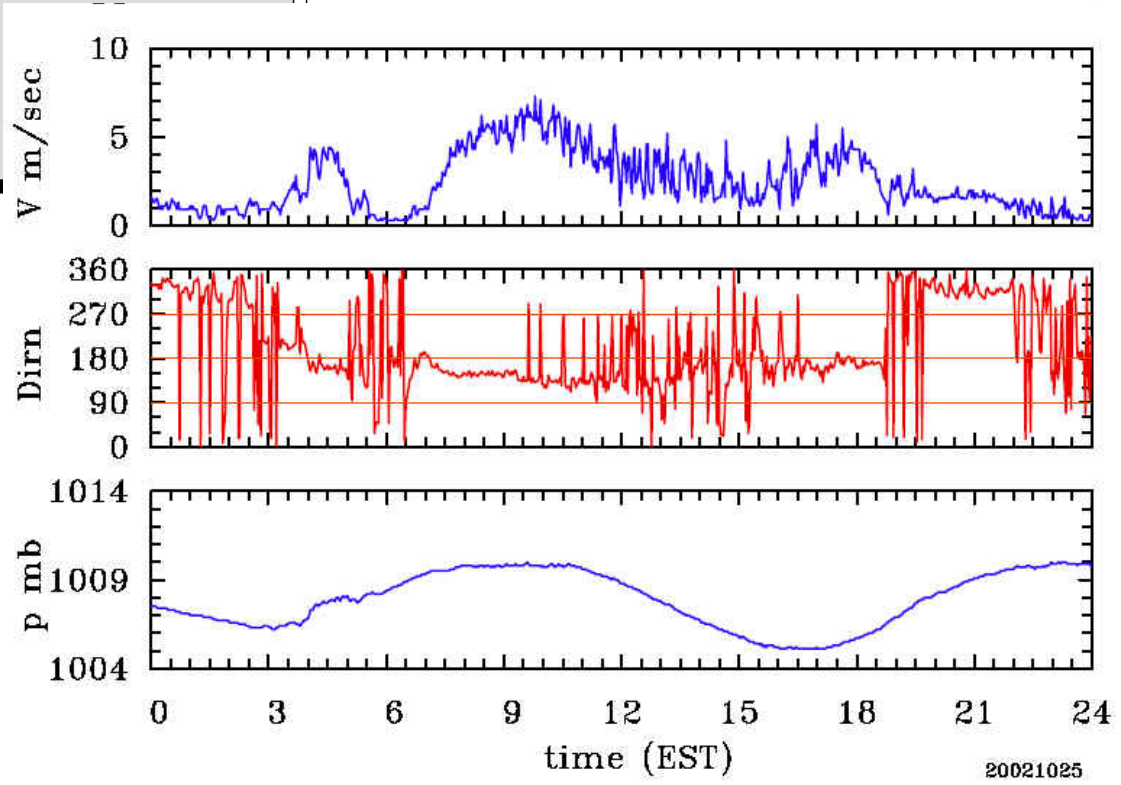
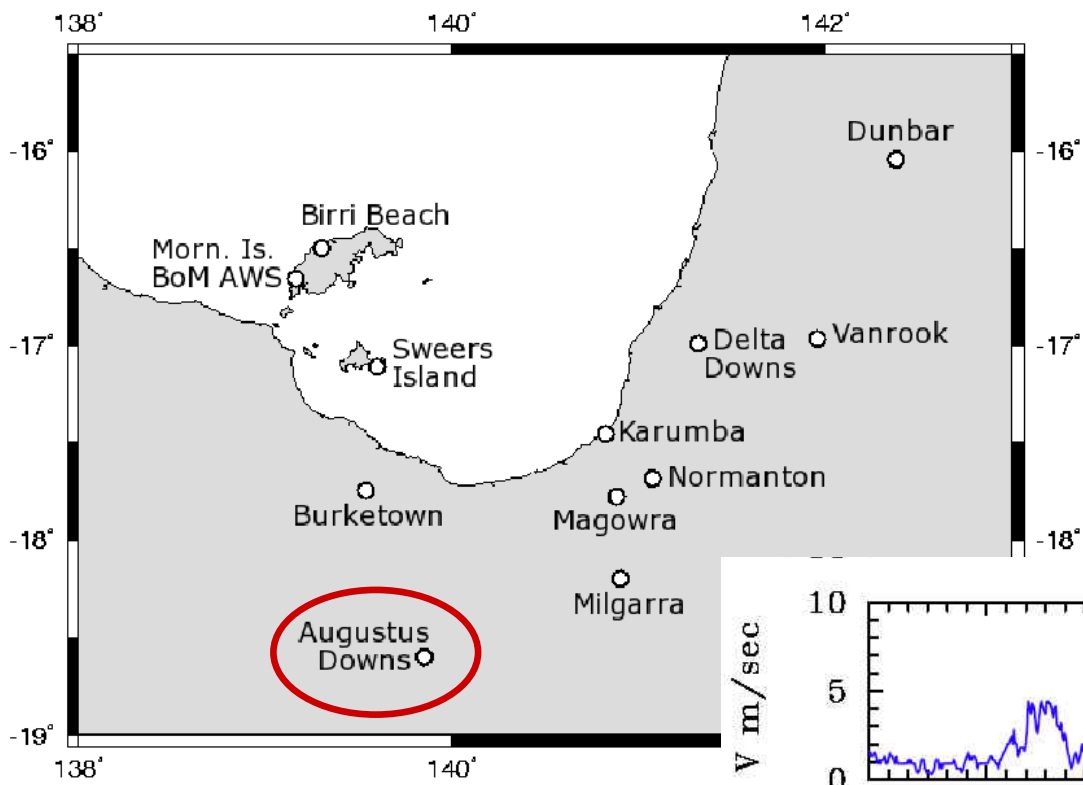
# Wolkenstrassen



# Die Hypothese von Taylor

- Häufig benötigt man Informationen über die Größe der Eddies und die Größenordnung (engl. scale) der Bewegung in der GS.
- Es ist schwierig, eine Momentaufnahme der GS zu erstellen (siehe Abbildung).





# Die Hypothese von Taylor

- Anstatt eine große Region zu einer bestimmten Zeit zu beobachten ist es einfacher, Messungen an einem einzelnen Ort über einen längeren Zeitraum durchzuführen.
  - 1938 schlug G.I. Taylor vor, dass unter bestimmten Umständen Turbulenz (in einem Luftvolumen) als "eingefroren" betrachtet werden kann, während die Luftmasse an einen Messsensor vorbei driftet.
- ⇒ Die (gemessene) Windgeschwindigkeit kann genutzt werden, um Turbulenzmessungen, die an einem Ort als Funktion der Zeit durchgeführt werden, in eine Information der Turbulenzänderung im Raum zu übersetzen.



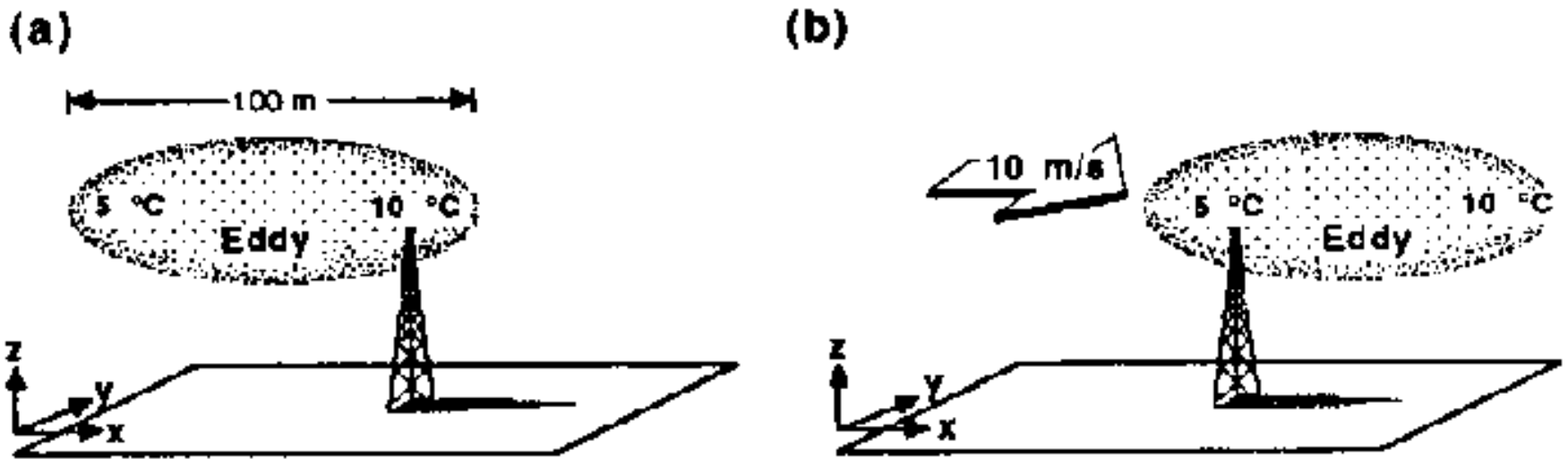
# Eignung der Hypothese von Taylor

➤ Sicherlich ist die Turbulenz nicht wirklich "eingefroren", d.h. zeitlich konstant.

⇒ Die getroffene Annahme von Taylor ist nur in den Fällen anwendbar, wenn sich die turbulenten Eddies auf einer Zeitskala entwickeln, die größer ist, als die Zeit, die ein Luftpaket benötigt, den Messsensor zu passieren.



**Beispiel**

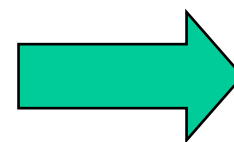


**Fig. 1.4** Illustration of Taylor's hypothesis. (a) An eddy that is 100 m in diameter has a 5 °C temperature difference across it. (b) The same eddy 10 seconds later is blown downwind at a wind speed of 10 m/s.

Die gemessene Temperatur variiert mit der Zeit, während der Eddy die Messstelle passiert.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.05 \text{ K/m}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -0.5 \text{ K/s}$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} = -U \frac{\partial T}{\partial x}$$

**Hypothese von Taylor für eine Dimension**



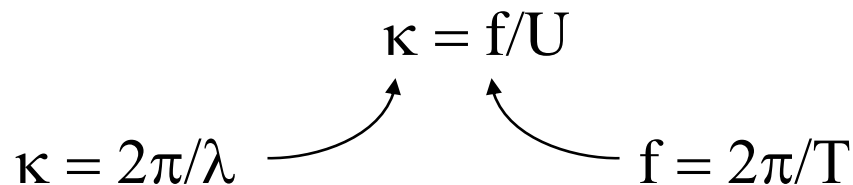
# Die Hypothese von Taylor

- Für jede Variable  $\xi$  setzt die Taylor Hypothese fest, dass Turbulenz "eingefroren" ist wenn gilt:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + U \frac{\partial\xi}{\partial x} + V \frac{\partial\xi}{\partial y} + W \frac{\partial\xi}{\partial z} = 0$$

d.h. 
$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -U \frac{\partial\xi}{\partial x} - V \frac{\partial\xi}{\partial y} - W \frac{\partial\xi}{\partial z}$$

Die Hypothese kann auch in Termen mit der Wellenzahl  $\kappa$  und Frequenz  $f$  geschrieben werden:

$$\kappa = 2\pi/\lambda \quad \kappa = f/U \quad f = 2\pi/T$$


$\lambda$  = Wellenlänge

$T$  = Periode

# Die Hypothese von Taylor

- Um die Bedingung zu erfüllen, dass ein Eddy nur vernachlässigbare Veränderungen erfährt, während er den Messpunkt passiert, schlugen Willis und Deardorff (1976)\* vor, dass  $\sigma_U < 0.5U$  sein muss, wobei  $\sigma_U$  die Standardabweichung der Windgeschwindigkeit, d.h. ein Maß für die Intensität der Turbulenz, ist (→ siehe Kapitel 2:  $I = \sigma_U/U$ ).
- Daraus ergibt sich, dass die Taylor-Hypothese erfüllt ist, wenn die Intensität der Turbulenz klein ist im Vergleich mit der mittleren Windgeschwindigkeit.

\* Willis, G. E., und J. W. Deardorff, On the use of Taylor's translation hypothesis for diffusion in the mixed layer, Quart. J., 102, 817-822, 1976.

# Anwendung der Hypothese von Taylor

- Die Gültigkeit der Taylor-Hypothese erlaubt zum Beispiel, dass ein Frequenzspektrum, welches an einem Ort gemessen wird, als Wellenzahlspektrum zu einem Zeitpunkt interpretiert werden kann.

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- Über Ozeanen variiert die Dicke der GS relativ langsam in Raum und Zeit. Die Meeresoberflächentemperaturen (engl. sea surface temperature, SST) ändern sich nur wenig im Tagesverlauf, wegen der enormen Vermischung der oberen Ozeanschichten und der großen Wärmekapazität von Wasser.
- Eine sich nur langsam ändernde SST bedeutet eine langsame Änderung des Antriebs der atmosphärischen GS über Ozeanen.

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- Die meisten Veränderungen der Dicke der GS über Ozeanen werden durch die Advektion von anderen Luftmassen über der Meeresoberfläche verursacht; diese sind meist mit synoptischen und mesoskaligen Prozessen verbunden.
- Eine Luftmasse mit einer Temperatur, die sich von der SST unterscheidet, wird solange verändert, bis Gleichgewicht eintritt.

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- Wenn ein Gleichgewicht erreicht ist, variiert die Dicke der GS über eine horizontale Entfernung von ~1000 km nur um etwa 10% (d.h. etwa 100-200 m).
- Zu Ausnahmen kann es an der Grenze zwischen zwei Ozeanströmen kommen, die unterschiedliche Temperatur aufweisen.
- Sowohl über Land als auch Ozeanen tendiert die GS im Bereich von Hockdruckregionen zu geringerer Dicke bzw. größerer Mächtigkeit in Tiefdruckregionen.



# Struktur und Mächtigkeit der GS

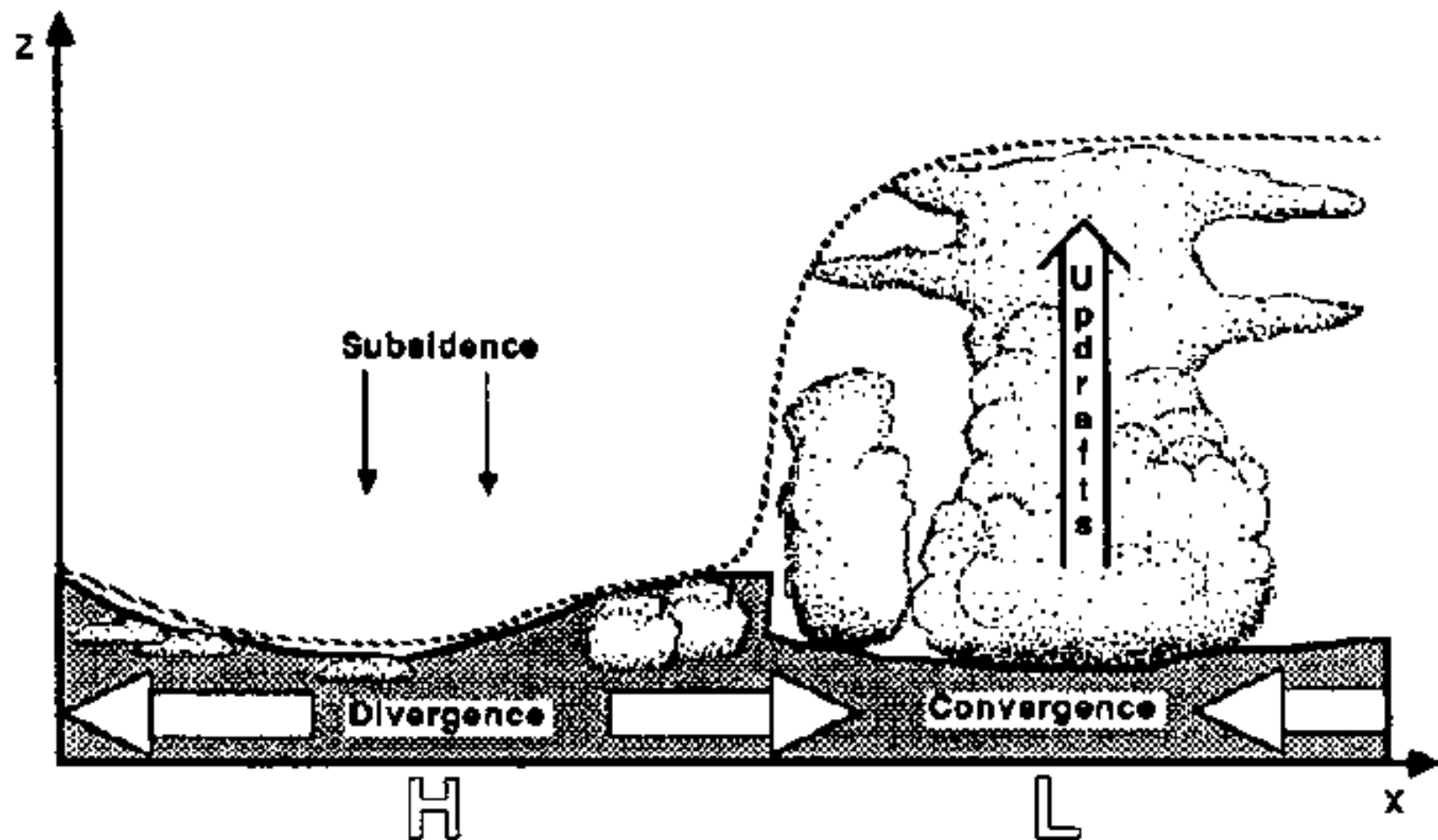
- Das Absinken von Luftmassen sowie die Divergenz in tieferen Schichten, die mit synoptisch hohem Druck verbunden sind, verfrachten Luftmassen aus Bereichen mit hohem Luftdruck in Bereiche mit niedrigerem Luftdruck.
- Die flacherer GS (Hochdrucklage) ist oft verbunden mit wolkenfreien Bereichen.
- Wenn Wolken vorhanden sind, handelt es sich vielfach um (Schönwetter) Cumulus oder Stratocumulus Wolken.

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- In Bereichen mit niedrigem Luftdruck führt die aufwärtsgerichtete Bewegung zu einem Transport von Luftmassen durch die GS, vom Boden bis in größere Höhen der Troposphäre. Hier ist es oft schwierig, die Oberkante der GS festzulegen.
- In diesen Fällen wird häufig die Wolkenbasis als (willkürliche) obere Grenze der GS angenommen.



**Abbildung**



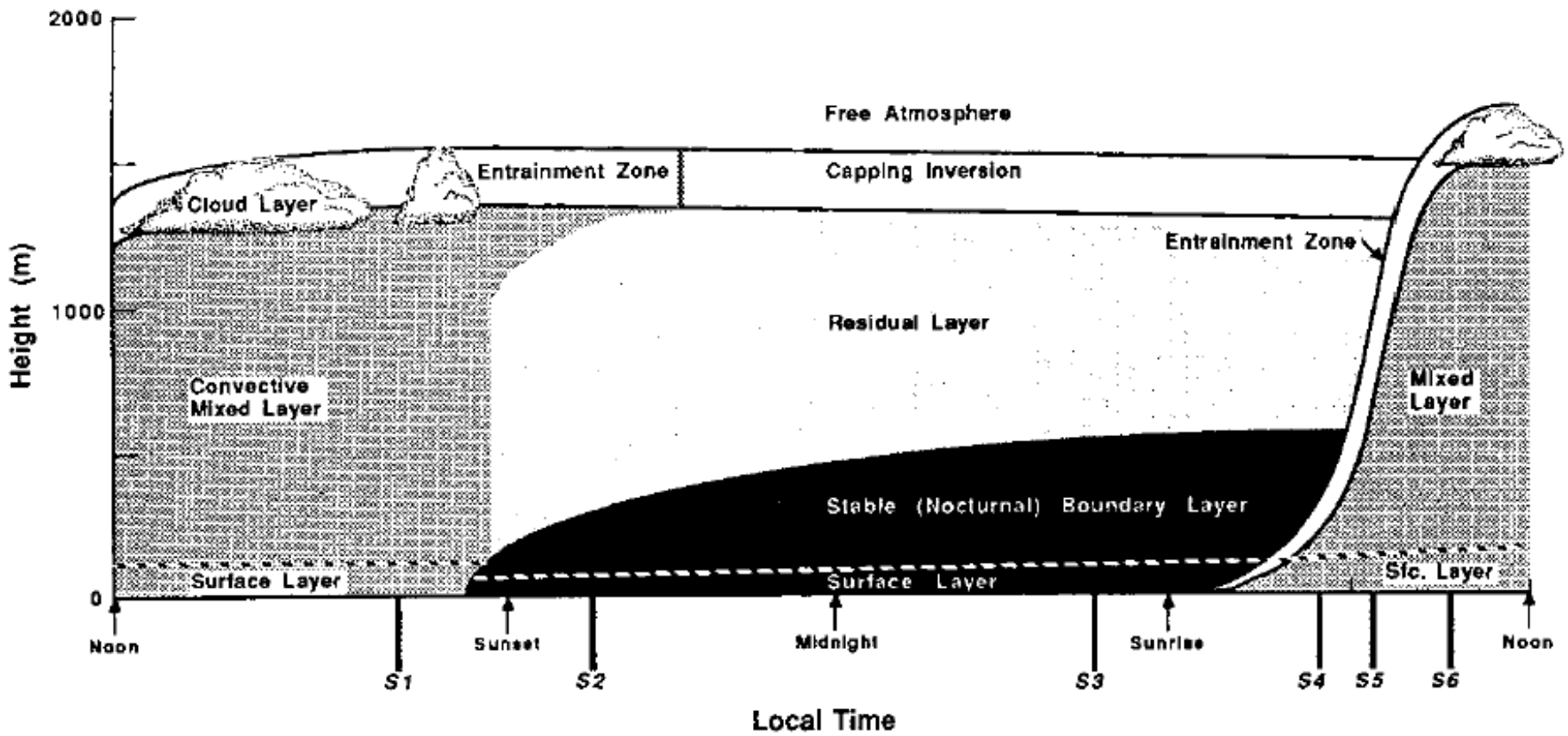
**Fig. 1.6** Schematic of synoptic - scale variation of boundary layer depth between centers of surface high (H) and low (L) pressure. The dotted line shows the maximum height reached by surface modified air during a one-hour period. The solid line encloses the shaded region, which is most studied by boundary-layer meteorologists.

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- Die GS oberhalb von Landoberflächen hat in Hochdruckregionen eine wohl definierte Struktur, die sich im Tagesverlauf entwickelt.
- Es gibt drei Hauptbereiche (-schichten) in der GS: Die Mischungsschicht (engl. **mixed layer, ML**), die Residualschicht (engl. **residual layer, RL**), und die stabile GS (engl. **stable boundary layer, SBL**).
- Wenn Wolken in der Mischungsschicht vorkommen, unterscheidet man weiter zwischen Wolkenschichten (engl. **cloud layer, CL**) und teilweise bedeckten Schichten (engl. **subcloud layer, SCL**).

# Struktur und Mächtigkeit der GS

- Die Bodenschicht (engl. **surface layer, SL**) ist der Bereich an der Unterkante der GS, wo turbulente Bewegungen und (mechanische) Spannung um weniger als 10% in ihrer Größe variieren. Die unteren 10% der GS werden Bodenschicht genannt, ungeachtet, ob es sie ein Teil der Mischungsschicht oder der stabilen Grenzschicht sind.
- Eine dünne Schicht, die Mikroschicht (engl. **microlayer**) oder Grenzflächenschicht (engl. **interfacial layer**), wird in den untersten Zentimetern der GS identifiziert, in der der molekulare Transport über den turbulenten Transport dominiert.



The boundary layer in high pressure regions over land consists of three major parts: a very turbulent **mixed layer**; a less turbulent **residual layer** containing former mixed-layer air; and a nocturnal **stable boundary layer** of sporadic turbulence. The mixed layer can be subdivided into a **cloud layer** and a **subcloud layer**.

## Die Mischungsschicht (ML)

- Turbulenz in der ML ist für gewöhnlich konvektiv angetrieben, obwohl sich eine nahezu gut durchmischte Schicht auch in Regionen mit starken Winden bilden kann.
- Konvektion schließt sowohl Wärmetransport von der warmen Erdoberfläche ein, also auch die strahlungsbedingte Abkühlung an der Oberkante einer Wolken-schicht sowie die Abkühlung, die mit dem Verdampfen von Wolken verbunden ist.
- In der ersten beschriebenen Situation bilden sich 'Thermals' warmer Luft, die vom Boden her aufsteigen, während sich in den beiden anderen Fällen 'Thermals' kalter Luft bilden, die von der Wolkenoberkante bzw. dem Bereich der Verdampfung von Wolkenteilchen absinken.
- Diese Mechanismen können simultan auftreten.

# Die Mischungsschicht (ML)

- Auch wenn Konvektion der dominierende Mechanismus in der ML ist, gibt es für gewöhnlich Windscherung an der oberen Grenze der ML, was auch zur Erzeugung von Turbulenz beiträgt.
- Diese Scherung ist ganz ähnlich der Situation, die eine 'Clear Air Turbulence' (CAT) produziert. Man geht davon aus, dass dies zur Bildung und dem Zerfall von Kelvin-Helmholtz Wellen führt. Diese entstehen in der Scherschicht zweier Fluide (hier: geschichtete Atmosphäre) mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten.



# Die Mischungsschicht (ML)

## Kelvin-Helmholtz Wellen



# Die Mischungsschicht (ML)

- An Tagen, die zu Beginn wolkenfrei sind, ist die Entwicklung der ML an die solare Heizung der Erdoberfläche gebunden. Etwa eine halbe Stunde nach Sonnenaufgang beginnt sich eine turbulent durchmischte ML zu bilden.
- Die ML ist durch intensive Durchmischung in einer statisch labilen Situation charakterisiert, in der sich 'Thermals' aus warmer Luft in Bodennähe bilden und aufsteigen.
- Die ML erreicht ihre maximale Schichtdicke am Nachmittag. Sie wächst unter anderem auch durch den Eintrag (engl. entrainment) oder Einmischung von weniger turbulenter Luft von oben.

## Die Mischungsschicht (ML)

- Die resultierende Turbulenz vermischt Wärme, Feuchte und Impuls gleichförmig in der Vertikalen.
- Schadstoffe, die aus Schornsteinen emittiert werden, zeigen oft ein charakteristisches Schleifenmuster (engl. looping), sobald die Schadstofffahne in einen warmen, aufsteigenden 'Thermal' advehiert (bzw. direkt emittiert) wird.

# Mount Isa Mines, Central Queensland, Australien



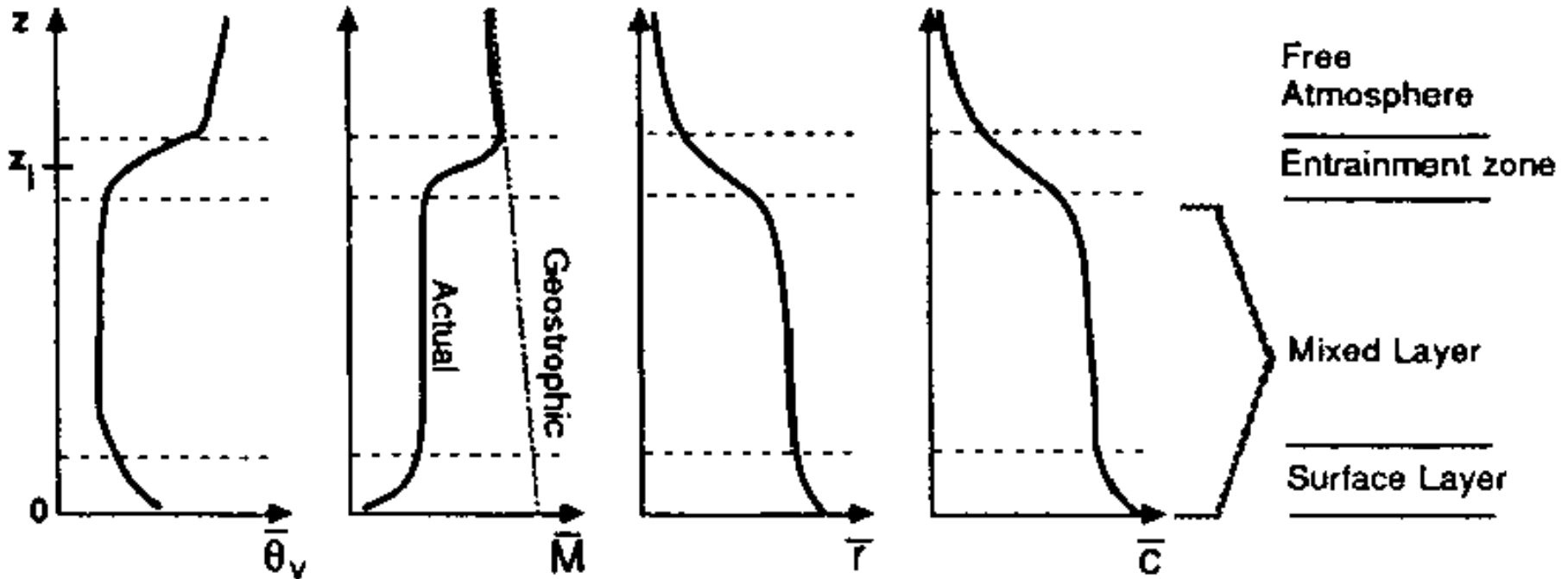
# Die Mischungsschicht (ML)

- Die im folgenden gezeigten Profile der virtuellen potentiellen Temperatur\*, Mischungsverhältnisse, Schadstoffkonzentrationen und der Windgeschwindigkeit beobachtet man in der ML typischerweise am Tage.

---

\* virtuelle potentielle Temperatur: Ist diejenige (höhere) Temperatur, die trockene Luft haben müsste, um die gleiche Dichte wie feuchte Luft bei gleichem Druck zu haben (= hypothetisches Temperaturmaß).

# Die Mischungsschicht (ML)



**Fig. 1.9** Typical daytime profiles of mean virtual potential temperature  $\theta_v$ , wind speed  $M$  (where  $M^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2$ ), water vapor mixing ratio  $\bar{r}$ , and pollutant concentration  $\bar{c}$ .

$\theta_v = \theta(1 + 0.61 r)$ , für ungesättigte Luft mit  $r$ : Wasserdampfmischungsverhältnis.

Die virtuelle Temperatur ist eine sehr gebräuchliche Variable, da sie die Temperatur angibt die trockene Luft haben müsste, um die gleiche Dichte wie feuchte Luft bei gleichem Druck zu haben.

## Die Mischungsschicht (ML)

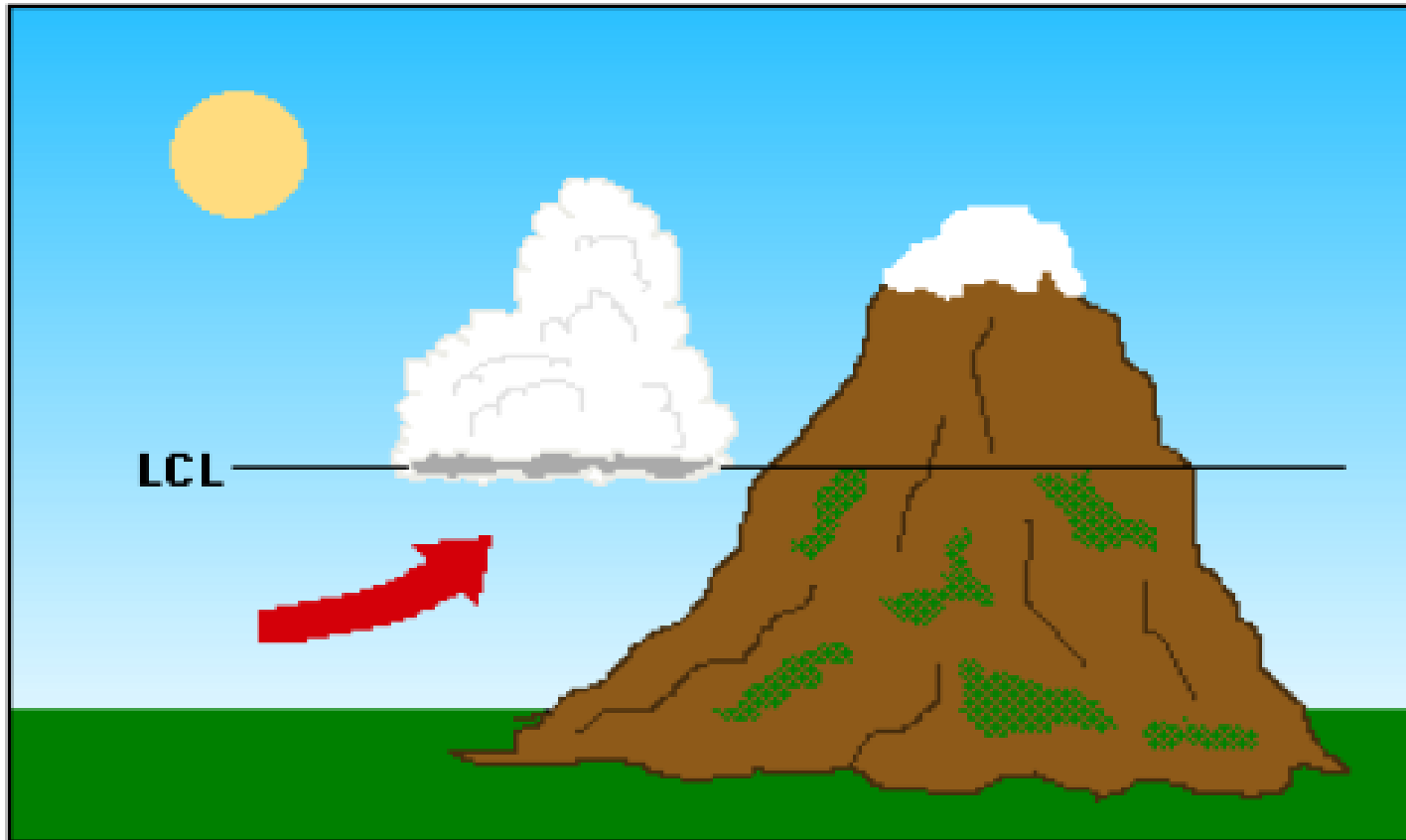
- Die meisten Quellen für Schadstoffe befinden sich nahe der Erdoberfläche.
- Dadurch können hohe Schadstoffkonzentrationen in der ML entstehen, während in der freien Atmosphäre (engl. free atmosphere, FA) die Konzentrationen relativ gering bleiben.
- Schadstoffe werden durch Eddies (wie z.B. 'Thermals') transportiert. Die Unfähigkeit von 'Thermals' sehr weit in die stabile Schicht (Entrainmentzone) oberhalb der ML einzudringen bedeutet, dass die stabile Schicht zusätzlich wie ein Deckel für die vertikale Schadstoffausbreitung wirkt.
- Im Bereich von Hochdruckgebieten ist dieses "Einfangen" von Schadstoffen unterhalb dieser Inversionsschicht häufig zu beobachten.



# Wolken in der Grenzschicht

- Weil die Spitzen der 'Thermals' während eines Tages immer größere Höhen erreichen, können die höchsten 'Thermals' die sogenannte Kondensationsschicht (engl. lifting condensation level, LCL) erreichen, vorausgesetzt, es ist genügend Feuchtigkeit vorhanden.
- Die daraus resultierenden Schönwetter Wolken sind oftmals das Ziel von Vögeln oder Segelfliegern, die den Aufwind in den 'Thermals' suchen.

# Wolken in der Grenzschicht



Lifting Condensation Level, **LCL**:

Kann berechnet werden aus der Bodentemperatur, dem Bodendruck und dem Taupunkt am Boden.

# Wolken in der Grenzschicht

- Hohe oder mittel hohe Bewölkung kann die Einstrahlung der Sonne am Erdboden reduzieren und dadurch die Intensität der 'Thermals' vermindern. An solchen Tagen wächst die ML langsamer. Falls die Wolken dick genug sind, kann die Turbulenz nahezu verschwinden und die ML neutral geschichtet sein.
- Wenn der Erdboden feucht ist, wird ein großer Teil der Sonneneinstrahlung zur Verdampfung von Wasser verbraucht, wodurch sich die Intensität der 'Thermals' ebenfalls reduziert.
- Daher sind dicke ML ein charakteristisches Merkmal von trockenen Wüstenregionen.

# Cumulus Wolken

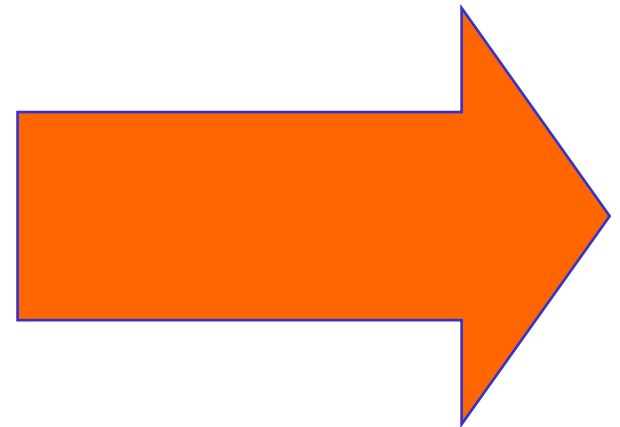


# Die Residualschicht (RL)

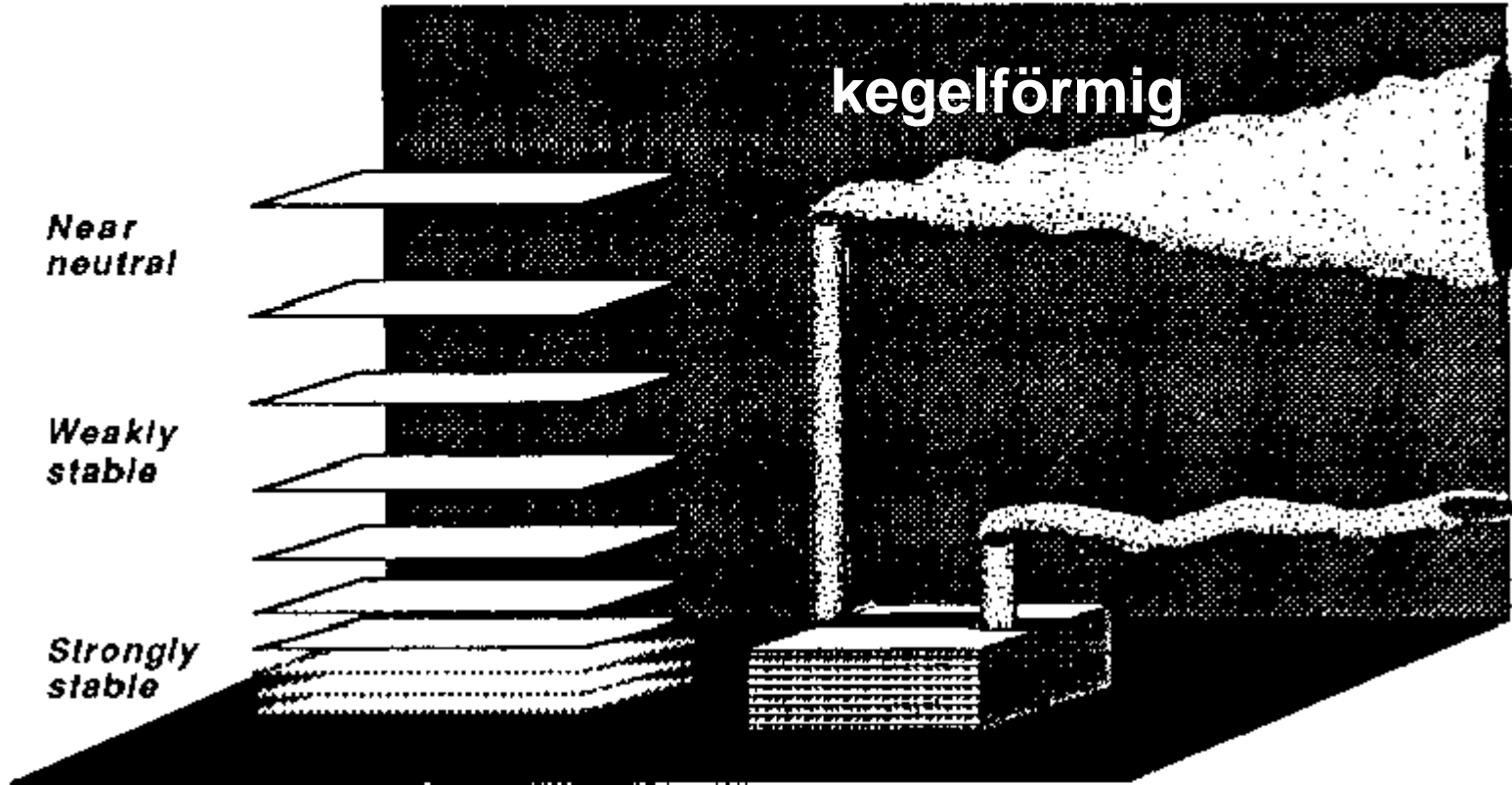
- Etwa eine halbe Stunde vor Sonnenuntergang endet die Bildung von 'Thermals' (in Abwesenheit von Advektion kalter Luftmassen). Dies führt zum Zerfall der Turbulenz in der vormals gut durchmischten ML.
- Die resultierende Schicht wird Residualschicht (RL) genannt, weil ihr anfänglicher Zustand, d.h. die Werte der mittleren Variablen und der Konzentrationen von Spurenstoffen, der Gleiche ist, wie der in der zuvor zerfallenen ML.
- Beispiel: In Abwesenheit von Advektion werden passive Spurenstoffe (-gase), die am Tag in der ML verteilt wurden, während der Nacht in der RL (d.h. in der Höhe) erhalten bleiben.

# Die Residualschicht (RL)

- Die RL ist neutral geschichtet was zur Folge hat, dass die Intensität der sich ergebenden Turbulenz in alle Richtungen gleich ist. Als ein Ergebnis tendieren z.B. Rauchfahnen, die in die RL emittiert werden, dazu, sich mit gleichen Raten in vertikaler und seitlicher Richtung auszubreiten, was zu kegelförmigen Abluftfahnen führt.



# Die Residualschicht (RL)



**Fig. 1.10** The static stability decreases with height in the nocturnal boundary layer, gradually blending into the neutrally-stratified residual layer aloft, as indicated by the isentropic surfaces sketched on the left. Smoke emissions into the stable air fan out in the horizontal with little vertical dispersion other than wavelike oscillations. Smoke emissions in the neutral residual-layer air spread with an almost equal rate in the vertical and horizontal, allowing the smoke plume to assume a cone-like shape.



# Die Residualschicht (RL)

- Während der Nacht können aktive Spurenstoffe (-gase) mit anderen Bestandteilen reagieren, die ursprünglich nicht aus bodennahen Schichten stammen.
- Manchmal reagieren gasförmige Chemikalien und bilden Aerosole und Partikel, die sich niederschlagen können.
- Die RL existiert zum Teil auch noch in den frühen Morgenstunden, bevor sie in die neue ML eingemischt wird.
- Während dieser Zeit kann die solare Strahlung photochemische Reaktionen in der RL auslösen.

## Die Residualschicht (RL)

- Feuchte verhält sich häufig wie ein passiver Spurenstoff. Dadurch kann unter Umständen jeden Tag mehr Feuchtigkeit in die ML verdunsten und sich in der RL ansammeln. Während der folgenden Tage kann es so zu einem Widereintrag von feuchter Luft in die ML kommen, so dass es zur Wolkenbildung kommt, die sonst nicht stattgefunden hätte.
- Die virtuelle potentielle Temperatur nimmt in der Nacht wegen der strahlungsbedingten Abkühlung gewöhnlich ab.

# Die Residualschicht (RL)

- Die Abkühlungsrate liegt bei etwa  $1^{\circ}\text{C}$  pro Tag und ist in der RL mehr oder weniger gleichförmig mit der Höhe; dadurch bleibt das Profil der potentiellen Temperatur nahezu adiabatisch.
- Wenn am nächsten Tag die Spitze der ML die Basis der RL erreicht, wächst die ML sehr schnell.
- Die RL hat keinen direkten Kontakt mit dem Erdboden. Während der Nacht nimmt die Dicke der nächtlichen stabilen Grenzschicht (engl. stable nocturnal boundary layer) zu, indem sie allmählich die Unterkante der RL verändert. Dadurch ist der Rest der RL nicht durch turbulenten Transport von Eigenschaften bodennaher Schichten beeinflusst und fällt somit eigentlich nicht in den Bereich der Definition der Grenzschicht.

# Die stabile Grenzschicht

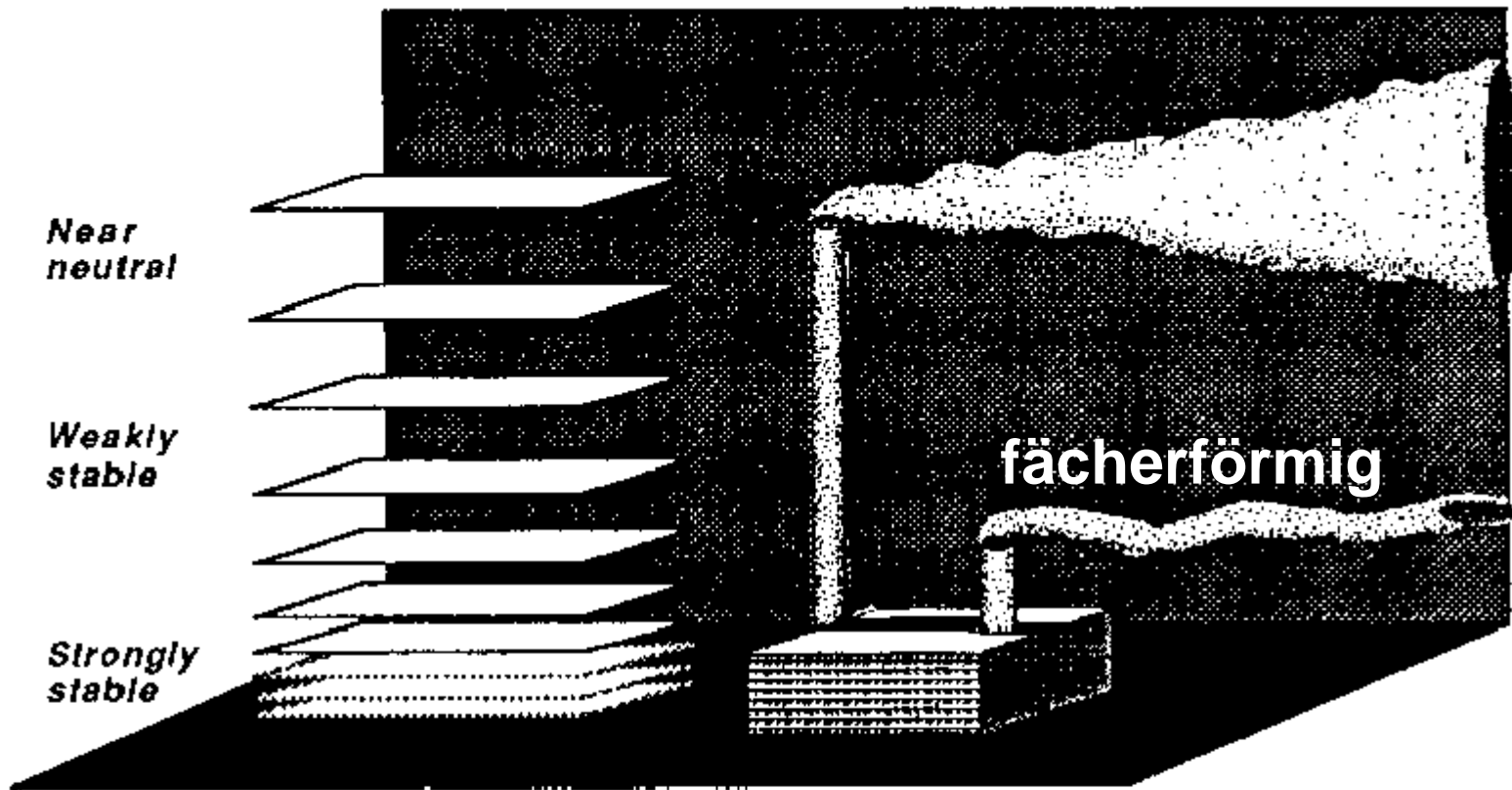
- Im Verlauf der Nacht verändert sich der untere Bereich der RL durch die Nähe mit dem Erdboden und bildet eine stabile GS.
- Diese ist charakterisiert durch eine statisch stabil geschichtete Atmosphäre mit schwacher, sporadischer Turbulenz.
- Obwohl sich der Wind während der Nacht in Bodennähe stark abschwächt und ruhig wird, können die Winde in der Höhe auf 'supergeostrophische' Geschwindigkeiten beschleunigt werden (d.h. höher als die geostrophische Windgeschwindigkeit); diese Phänomen ist als nächtlicher Strahlstrom (engl. low-level jet or nocturnal jet) bekannt.

# Die stabile Grenzschicht

- Die statisch stabile Atmosphäre unterdrückt Turbulenz, während die Entwicklung des nächtlichen Strahlstroms die vertikale Scherung erhöht. Dies wiederum kann Turbulenz erzeugen. Turbulenz tritt manchmal plötzlich auf und führt zu einer Vermischung in der stabilen GS.
- Während nicht-turbulenter Perioden entkoppelt die Bewegung (Strömung) in der GS wesentlich von der Erdoberfläche.
- Im Gegensatz zu der ML am Tage, die eine klar definierte obere Grenze hat, hat die stabile GS nur eine schlecht definierte obere Grenze zu der darüber befindlichen RL.

# Die stabile Grenzschicht (SBL)

- Die Oberkante der ML ist definiert als die Unterkante einer stabilen Schicht (Entrainmentzone), während die Oberkante der stabilen (nächtlichen) Grenzschicht (SBL) definiert ist als die Oberkante der stabilen Schicht (siehe Bilder unten).
- Schadstoffe, die in die stabile Schicht emittiert werden, verteilen sich relativ wenig in vertikaler Richtung. Sie fächern sich mehr aus in der Horizontalen (engl. fanning).  
In der Nacht, wenn die Winde nur schwach sind, windet sich die Abgasfahne nach links und rechts in Windrichtung.



**Fig. 1.10** The static stability decreases with height in the nocturnal boundary layer, gradually blending into the neutrally-stratified residual layer aloft, as indicated by the isentropic surfaces sketched on the left. Smoke emissions into the stable air fan out in the horizontal with little vertical dispersion other than wavelike oscillations. Smoke emissions in the neutral residual-layer air spread with an almost equal rate in the vertical and horizontal, allowing the smoke plume to assume a cone-like shape.

# Die stabile Grenzschicht (SBL)

- Das Windprofil zeigt nachts eine äußerst komplexe Struktur.
- Unmittelbar über dem Boden ist die Windgeschwindigkeit häufig schwach oder ruhig.
- In Höhen von etwa 200 m über Grund können die Windgeschwindigkeiten im nächtlichen Jet  $10\text{-}30\text{ m s}^{-1}$  erreichen.
- Einige hundert Meter höher sind die Windgeschwindigkeiten wieder geringer und näher an dem geostrophischen Wert.
- Die starke Scherung unterhalb des nächtlichen Jets ist teilweise begleitet von plötzlichen Änderungen der Windrichtung, wo die Winde in den tieferen Schichten quer zu den Isobaren, in Richtung zum niedrigeren Druck, verlaufen.

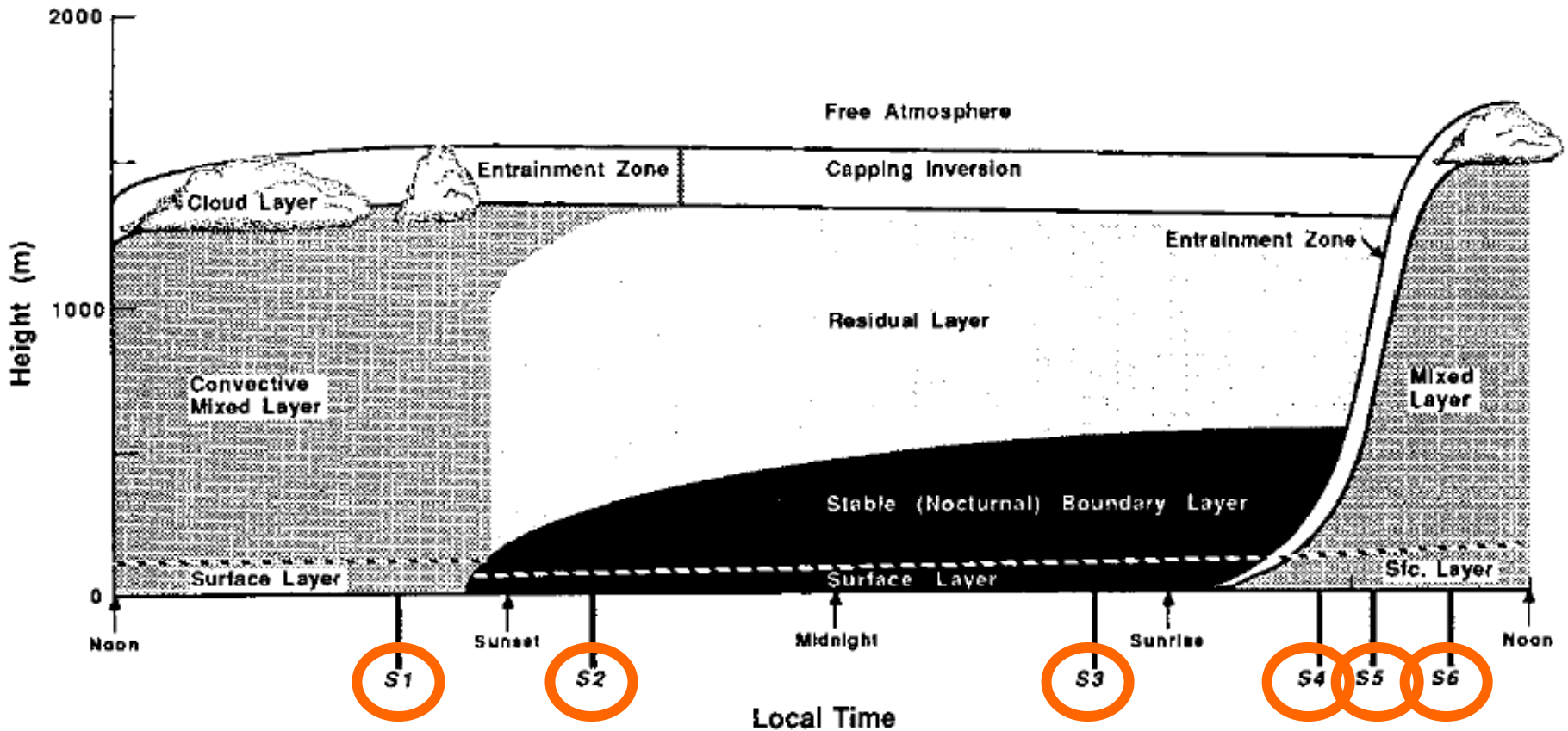


# Die stabile Grenzschicht (SBL)

- In einer dünnen, nur einige Meter dicken Schicht, die mit dem Boden direkten Kontakt hat, findet man (thermische) Hangabwinde (engl. katabatic winds). Diese werden durch kalte Luft in Bodennähe verursacht, die unter dem Einfluss der Schwerkraft hangabwärts strömen.
- Windgeschwindigkeiten von  $1 \text{ m s}^{-1}$  in Höhen von 1 m sind möglich.
- Diese kalten Luftmassen sammeln sich in Tälern und Senken.

# Die stabile Grenzschicht (SBL)

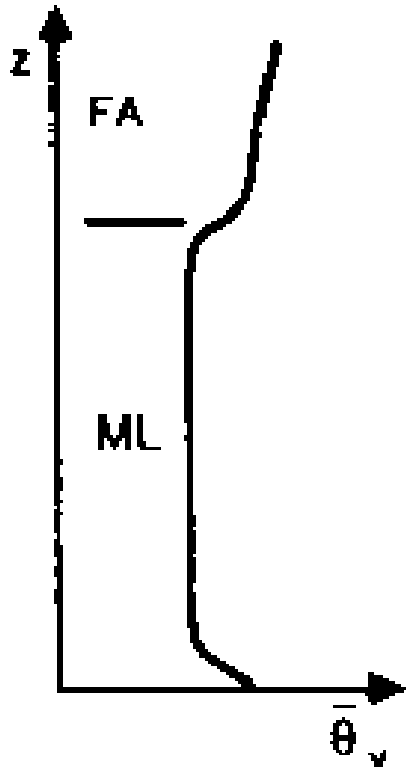
- Wellenbewegungen kommen in der stabilen Grenzschicht häufig vor.
- In der sehr stabilen nächtlichen Grenzschicht findet man nicht nur Schwerewellen, sie kann ferner viele höherfrequente (akustische) Wellen nahe dem Erdboden "einfangen".
- Eine stabile Grenzschicht kann sich auch am Tage bilden, solange die darunter liegende Oberfläche kälter ist als die darüber befindliche Luft. Diese Situation tritt auf, wenn warme Luft über eine kalte Oberfläche advehiert wird.



The boundary layer in high pressure regions over land consists of three major parts: a **very turbulent mixed layer**; a **less turbulent residual layer** containing former mixed-layer air; and a **nocturnal stable boundary layer** of **sporadic turbulence**. The mixed layer can be subdivided into a **cloud layer** and a **subcloud layer**.

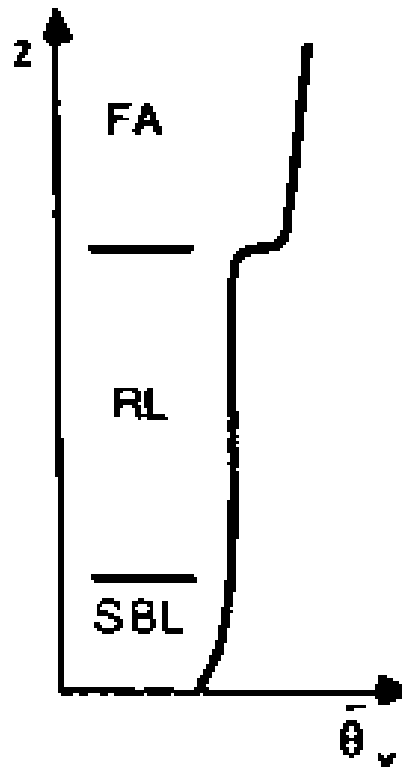
# Entwicklung der virtuellen potentiellen Temperatur

S1



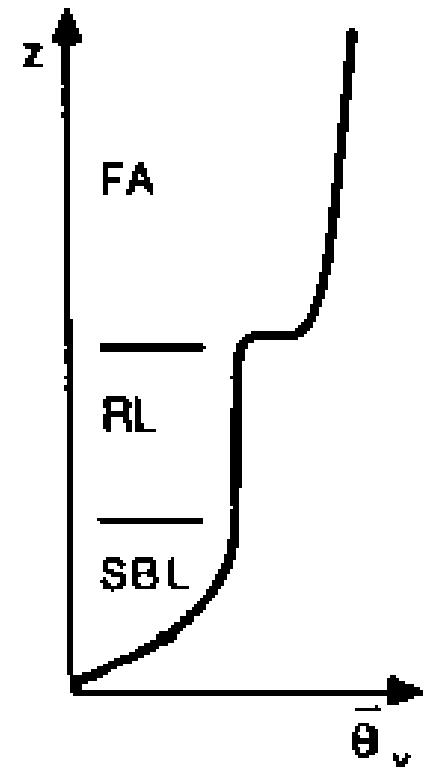
später Nachmittag

S2



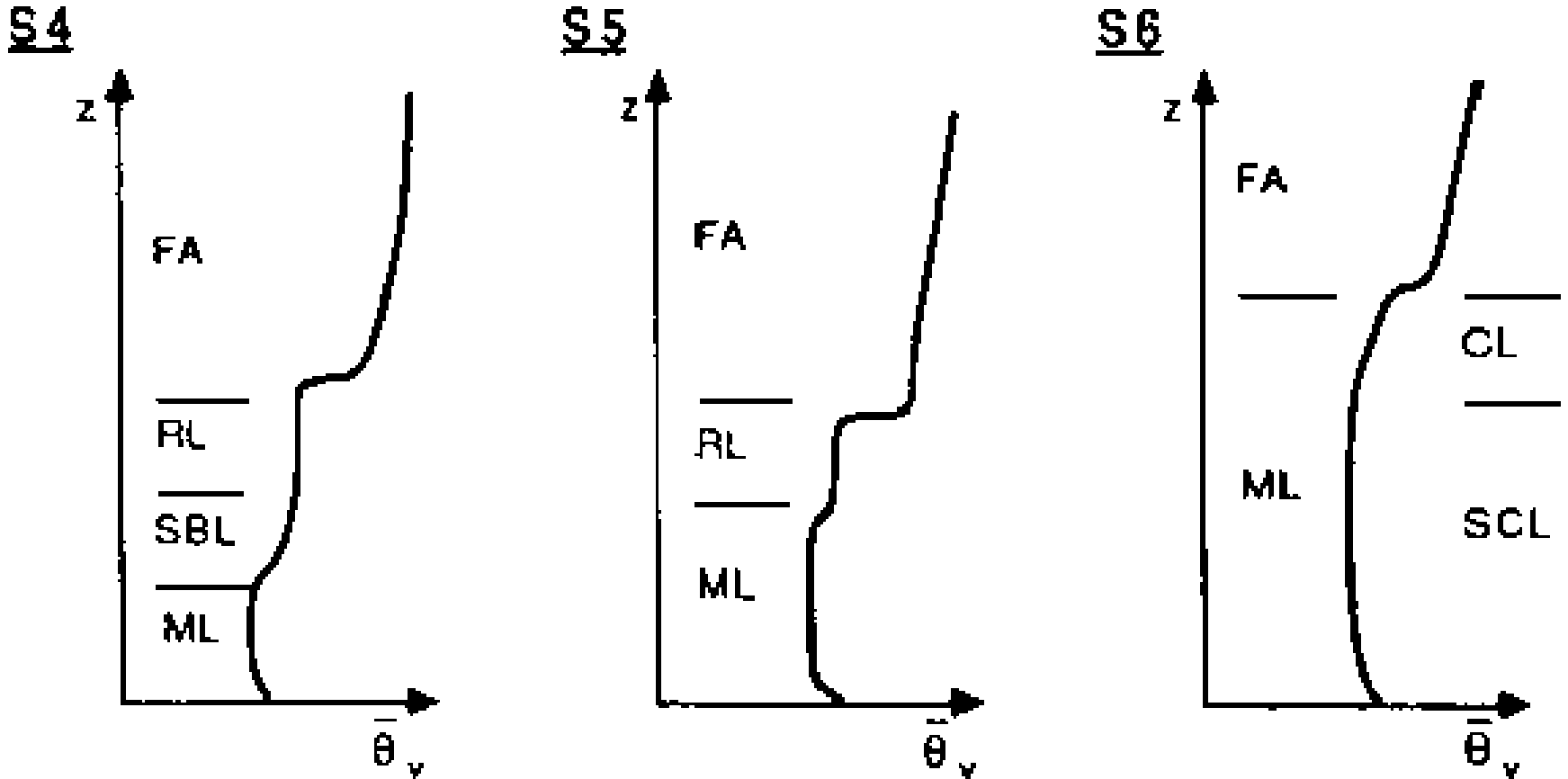
nach Sonnenuntergang

S3



vor Sonnenaufgang

# Entwicklung der virtuellen potentiellen Temperatur



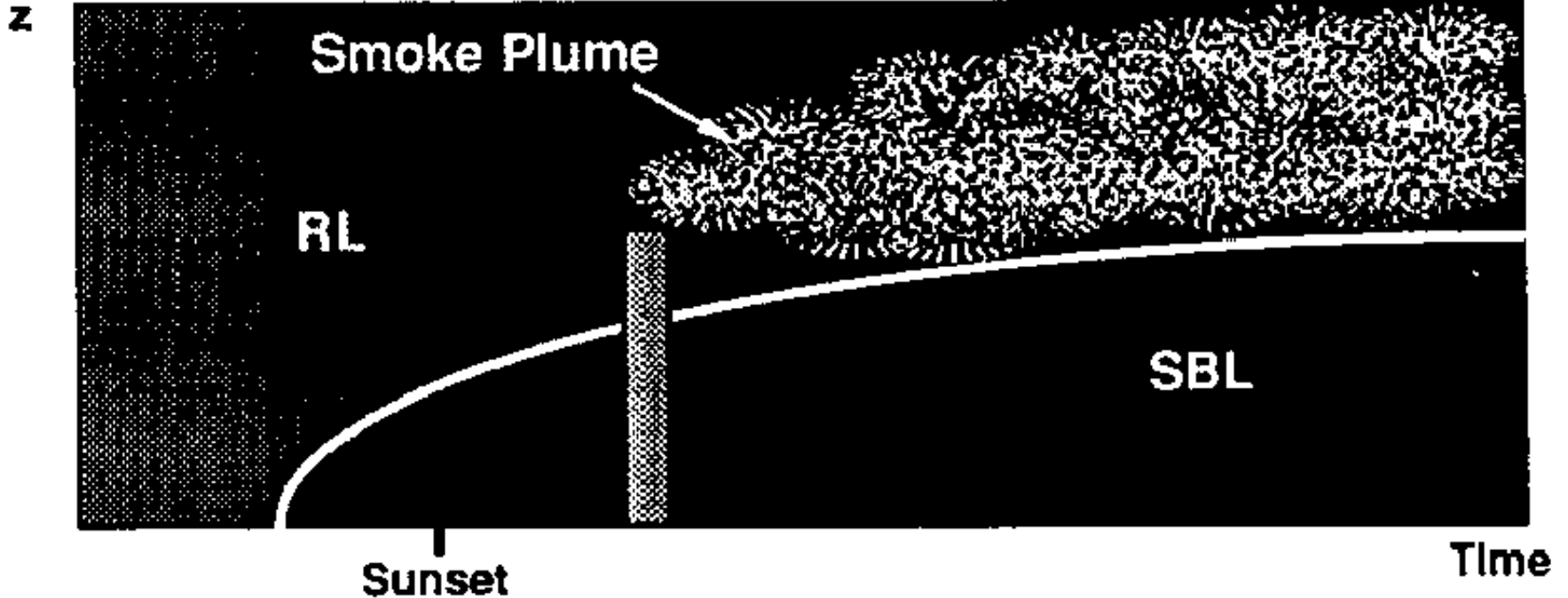
nach Sonnenaufgang

etwas später

vor Mittag

# Entwicklung von Rauchfahnen

- Entsprechend der zeitlichen Entwicklung der virtuellen potentiellen Temperaturprofile, entwickelt sich auch eine Rauchfahne.
- Zum Beispiel wird Rauch, der in den oberen Bereich der nächtlichen GS (SBL) emittiert wurde (oder in die RL), im Laufe der Nacht wegen der geringen Turbulenz kaum nach unten zum Erdboden verfrachtet. Diese Rauchfahnen können so in der Nacht über hunderte von Kilometern hinweg von ihrer Quelle mit dem Wind advehiert werden.
- Rauchfahnen in der RL verschwinden dort, wo sie die Oberkante der nächtlichen GS (SBL) berühren. Die ausgeprägte statische Stabilität und die Reduktion der Turbulenz vermindert die nach unten gerichtete Vermischung in die nächtliche GS. Die Oberkante der Rauchfahne kann weiter nach oben in die neutrale Luft steigen (engl. lofting).



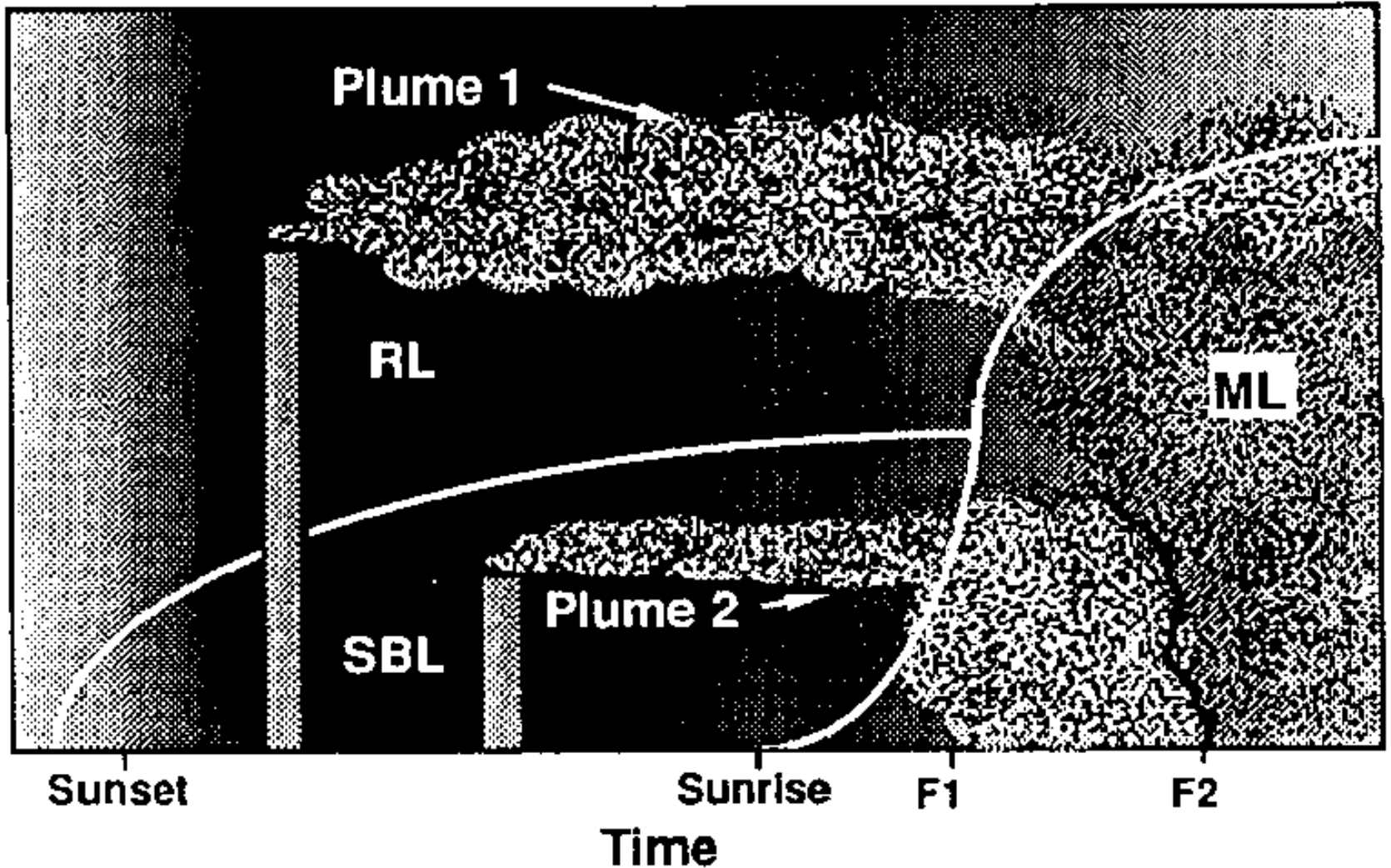
"Lofting" einer Rauchfahne passiert dann, wenn der oberste Bereich der Rauchfahne in die neutrale Schicht aufsteigt, während der untere Teil durch die stabile Schicht begrenzt wird.

# Entwicklung von Rauchfahnen

- Nach Sonnenaufgang entsteht eine neue ML, die irgendwann die Höhe einer in der Nacht emittierten Rauchfahne erreicht.
- Zu diesem Zeitpunkt werden die Schadstoffe bis nach unten zum Boden vermischt, durch Eintrag in die ML und anschließender turbulenter Vermischung. Dieser Prozess wird im englischen mit 'fumigation' (fumigate = ausräuchern) bezeichnet.

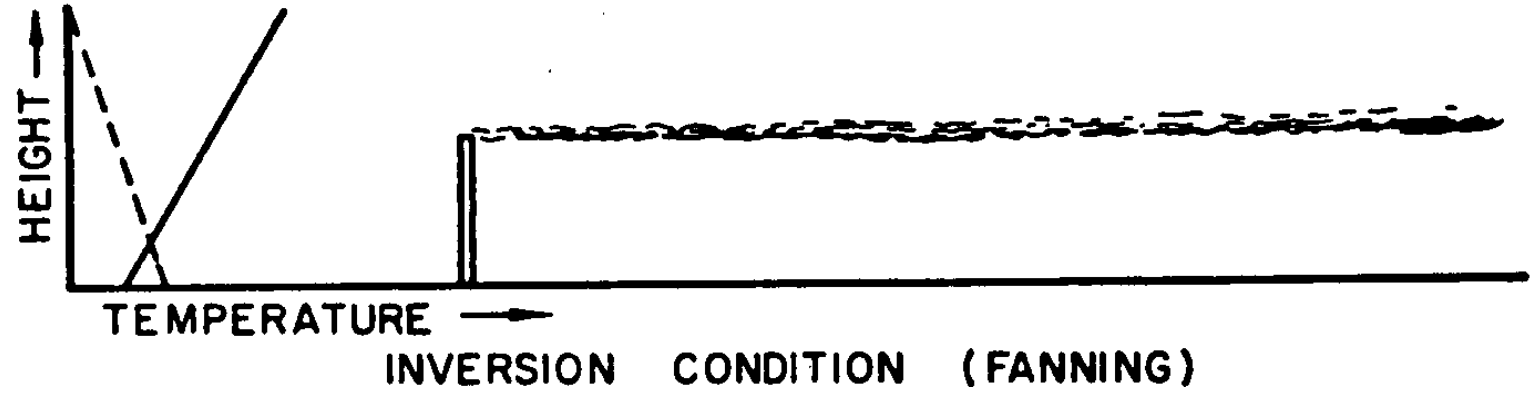
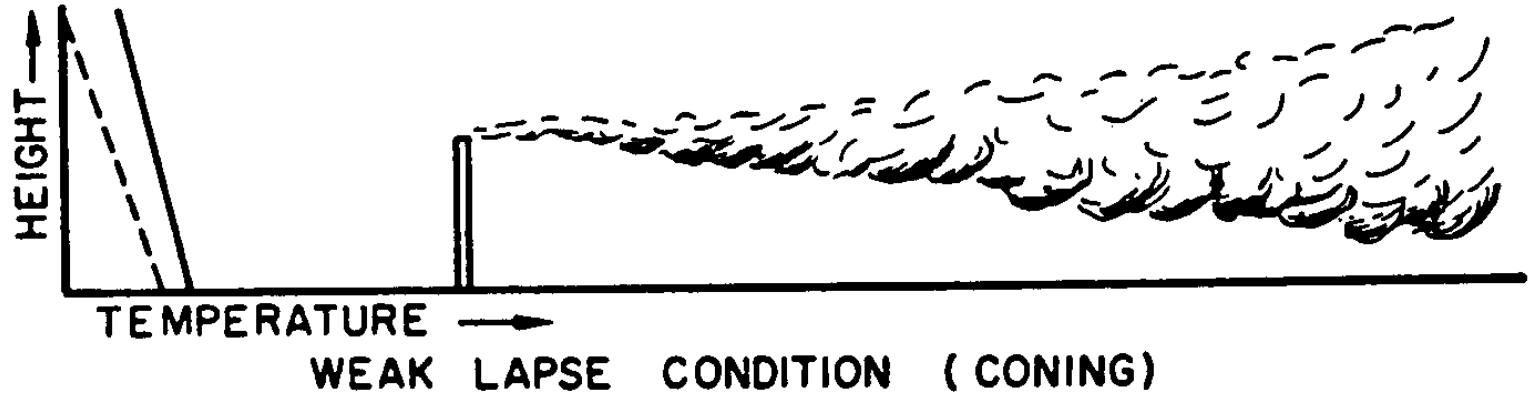
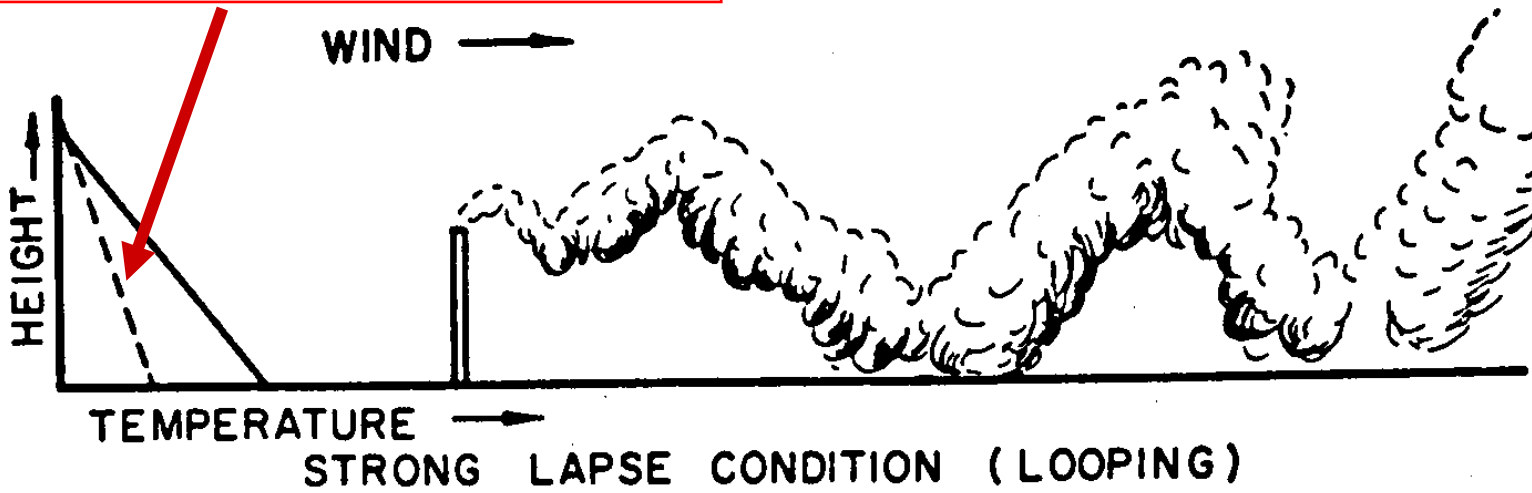


z



Sketch of the fumigation process, where a growing mixed layer mixes elevated smoke plumes down to the ground. Smoke plume 2 is fumigated at time F1, while plume 1 is fumigated at time F2.

adiabatischer Temperaturgradient  $\sim 6^\circ/\text{km}$





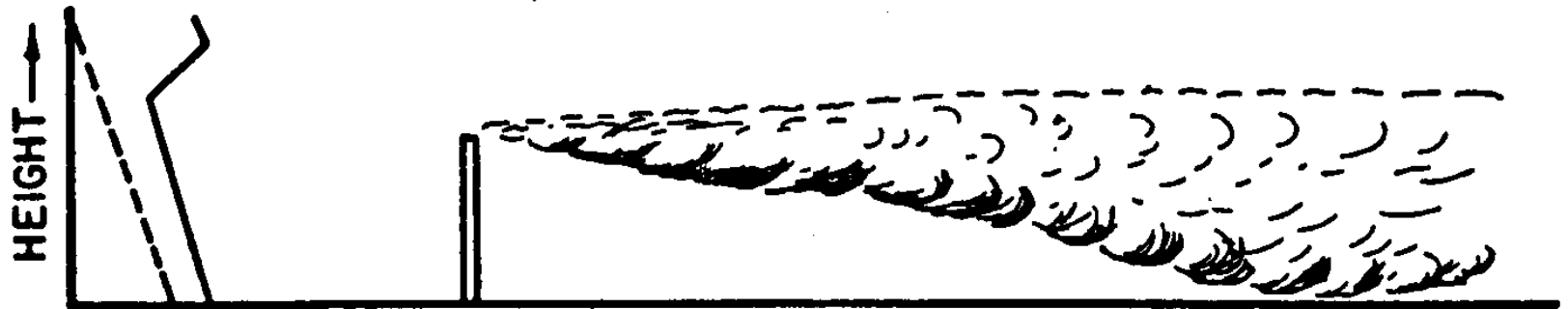
adiabatischer Temperaturgradient  $\sim 6^\circ/\text{km}$



TEMPERATURE  
INVERSION BELOW, LAPSE ALOFT (LOFTING)



TEMPERATURE  
LAPSE BELOW, INVERSION ALOFT (FUMIGATION)



TEMPERATURE  
WEAK LAPSE BELOW, INVERSION ALOFT (TRAPPING)

# Größenordnung für Mikro- und Mesoskala

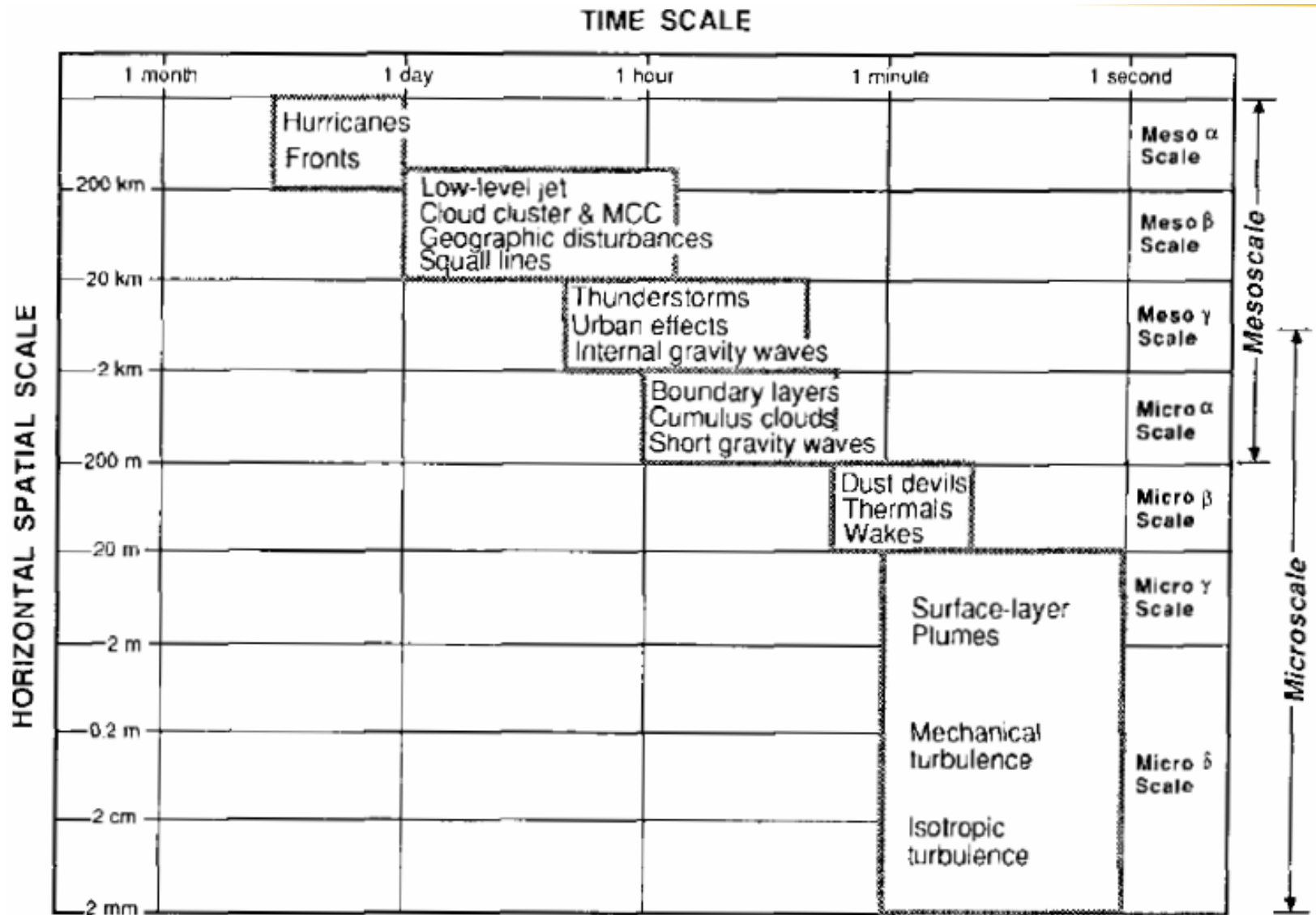


Fig. 1.15 Typical time and space orders-of-magnitude for micro and mesoscales. (After Orlandi, 1975.)

# Mikroskala und Mikrometeorologie

- Betrachtet man das Spektrum meteorologischer Bewegungen, so steht die Turbulenz an unteren Ende der Skala.
- Phänomene wie Turbulenz mit räumlichen Skalen von weniger als 3 km und Zeitskalen von weniger als 1 Stunde werden als Mikroskala klassifiziert.
- Mit Mikrometeorologie bezeichnet man Untersuchungen dieser kleinskaligen Phänomene.
- Untersuchungen der GS bedeuten also Studien mikroskaliger Phänomene und Vorgänge; Grenzschicht Meteorologie und Mikrometeorologie bezeichnen daher das gleiche Forschungsgebiet.

# Methoden der Mikrometeorologie

- Da die GS meist turbulent ist, ist eine deterministische Behandlung nicht möglich.
- Es werden drei verschiedene Ansätze gewählt, um sich der Problembehandlung und -lösung zu nähern:
  - Stochastische Methoden,
  - Ähnlichkeitstheorien,
  - Klassifikation nach Phänomenen.
- Stochastische Methoden machen sich die mittlere statistische Wirkung von Turbulenz zu eigen.
- Ähnlichkeitstheorien nutzen offensichtliche Gemeinsamkeiten (z.B. ähnliches Verhalten), die sich bei vielfachen Beobachtungen gezeigt haben.

# Methoden der Mikrometeorologie

- Bei phänomenologischen Methoden werden die größten Strukturen (z.B. 'Thermals') klassifiziert und in einer teilweise deterministischen Weise angenähert.



# Experimente in der Grenzschicht

- Die Mikrometeorologie basiert größtenteils auf Feldexperimenten, um mehr über die GS zu lernen.
- Problematisch ist, dass verschiedene Skalen betrachtet werden müssen. Ferner erfordert die große Variabilität in der Vertikalen eine große Anzahl von verschiedenen Messsensoren; sowohl in-situ- (am Boden, auf Ballonen und Flugzeugen) als auch Fernerkundungsmethoden (engl. remote sensing) kommen zum Einsatz.
- Es gibt eine Reihe berühmter GS Experimente (siehe Stull, Kapitel 10.5).

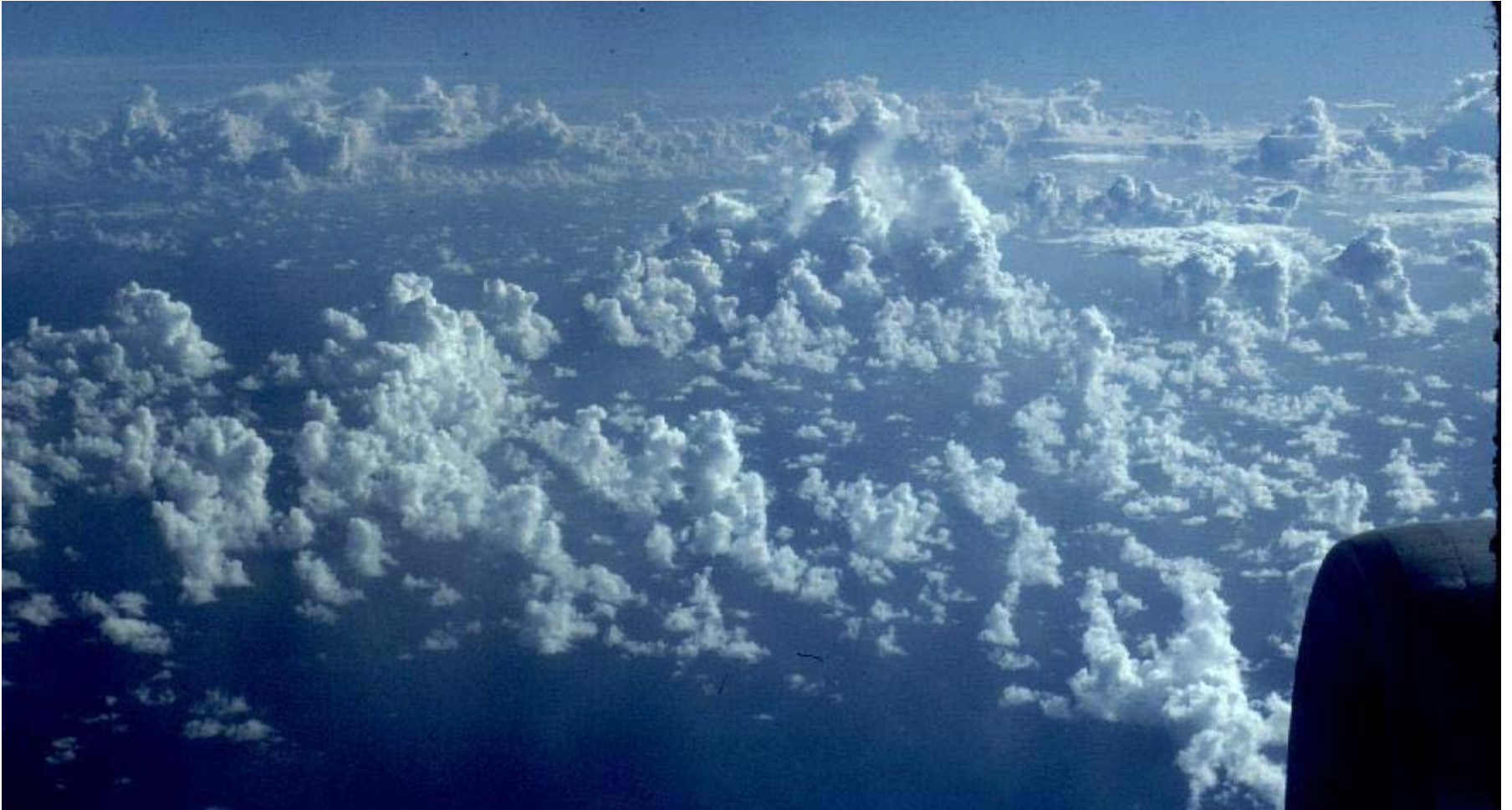
# Experimente in der Grenzschicht

- Alternativ kann man Laborstudien oder numerische Simulationen durchführen.
- Eine Vielzahl von Laborstudien wurde mit Hilfe großer Tanks (Becken) durchgeführt, die mit Flüssigkeiten gefüllt sind.
- Es gibt eine Reihe erfolgreicher Laboruntersuchungen kleinskaliger Turbulenz, aber nur sehr wenige Simulationen größerer Phänomene, wie z.B. 'Thermals'.
- Windkanäle werden zum Beispiel eingesetzt, um Strömungen in der neutralen GS über komplexen Oberflächen oder an Gebäuden zu untersuchen.



**Ende Kapitel 1**

# Kapitel 2: Mathematische und konzeptionelle Hilfsmittel



## Kapitel 2:

# Mathematische und konzeptionelle Hilfsmittel

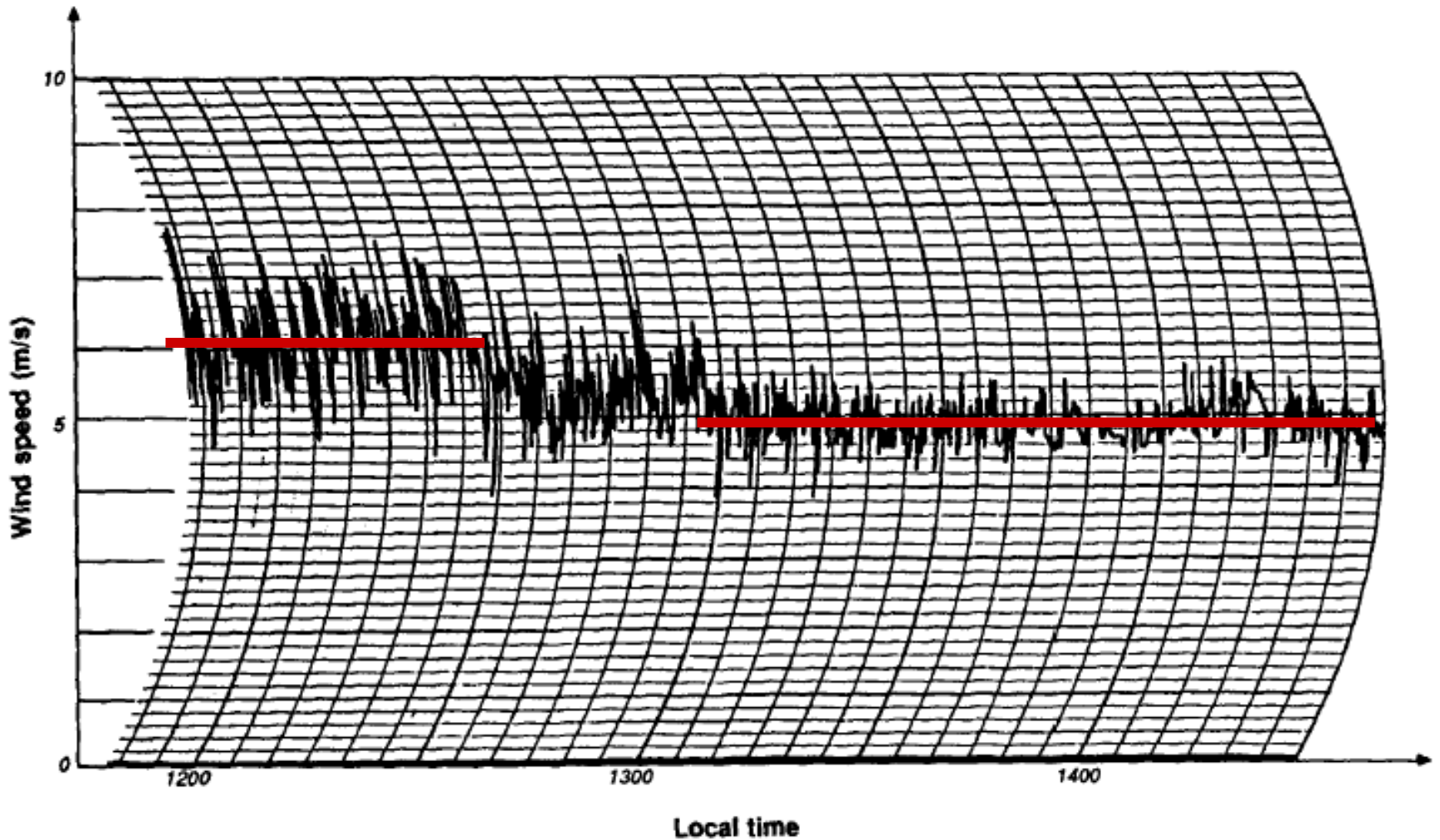
- Einige mathematische Hilfsmittel: Statistik
- Das Turbulenzspektrum
- Energiekaskade; die spektrale Lücke
- Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung
- Einige grundlegende statistische Methoden
- Arten der Mittelung (Bildung von Mittelwerten)
- Regeln der Mittelung
- Varianz, Kovarianz und Korrelation
- Turbulenz Intensität, turbulenter Transport
- Reynolds Spannung, viskose Spannung, Reibungsgeschwindigkeit



# Einige mathematische Hilfsmittel: Statistik

- Turbulenz ist ein wesentliches Merkmal der atmosphärischen GS, die quantifiziert werden muss, um sie zu studieren.
- Die Zufälligkeit von Turbulenz schließt aus, dass man mit einem deterministischen Ansatz herangehen kann. Wir sind gezwungen statistische Verfahren zu nutzen, wobei wir aber auf mittlere oder erwartete Werte als Maß der Turbulenz beschränkt sind.
- Diese Prozedur setzt die Separierung von turbulenten und nicht-turbulenten Anteilen einer Strömung voraus.

# Beobachtung der Windgeschwindigkeit am frühen Nachmittag



**Die Möglichkeit, einen statistisch stabilen Wert zu finden legt nahe, dass Turbulenz nicht vollständig zufällig ist!**

## Größe von Wirbeln (Eddies)

- Es gibt offensichtlich in den Windvariationen einen großen Bereich von verschiedenen Zeitskalen, die jeweils den anderen Variationen überlagert sind.
- Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die Zeit zwischen zwei kleinen Windspitzen etwa 1 Minute ist.
- Größere Spitzen scheinen etwa alle 5 Minuten aufzutreten und andere Variationen deuten auf Perioden von 10 Minuten hin.
- Die kleinsten beobachtbaren Perioden sind etwa 10 Sekunden.



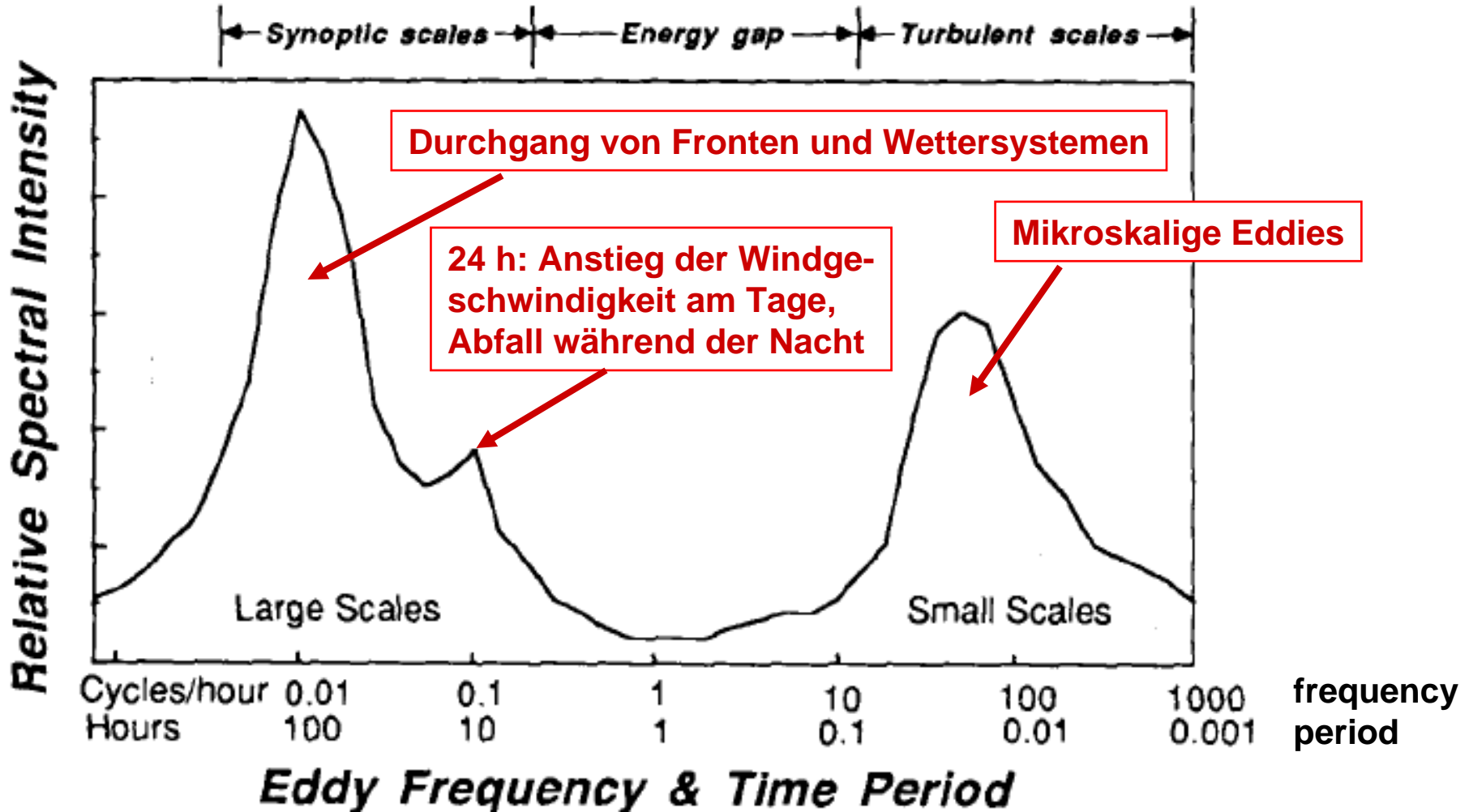
## Größe von Wirbeln (Eddies)

- Wenn wir jede Zeitskala mit verschiedenen großen turbulenten Wirbeln (engl. turbulent eddies) in Verbindung bringen, können wir unter Anwendung der Hypothese von Taylor (siehe Kapitel 1) schließen, dass wir Eddies sehen, die Größen von etwa 50 m bis zu 3000 m haben.
- Dies ist ein klarer Hinweis auf ein Spektrum der Turbulenz.

# Das Turbulenzspektrum

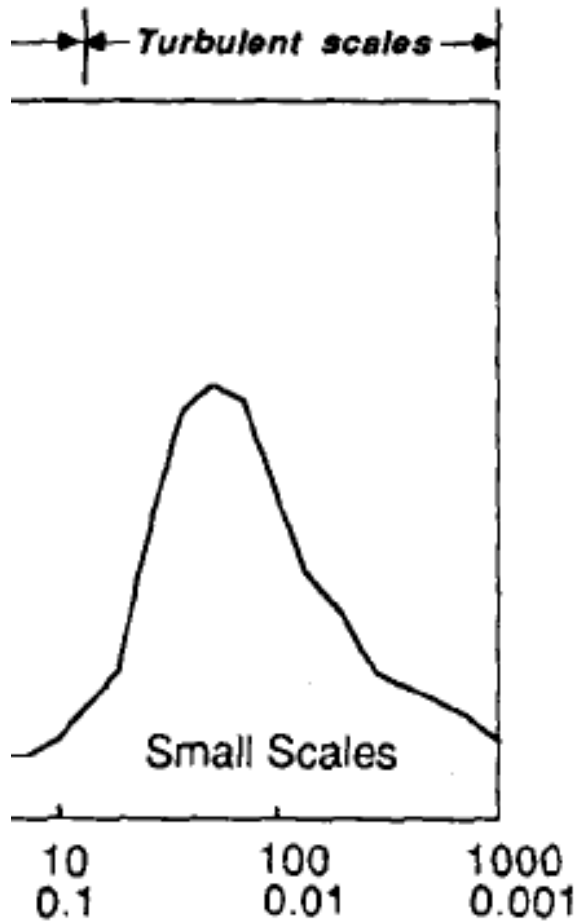
- Das Turbulenzspektrum ist analog zum Farbenspektrum eines Regenbogens.
- Weißes Licht enthält viele Farben (d.h. viele verschiedene Wellenlängen oder Frequenzen), die einander überlagert sind.
- Regentropfen wirken wie ein Prisma, das die Farben separiert.
- Wir könnten die Intensität jeder Farbe messen und so den jeweiligen Beitrag zum originalen Lichtstrahl bestimmen.
- Ähnliche Analysen können mit dem Signal der Turbulenz durchgeführt werden (allerdings mit mathematischen und nicht mit physikalischen Techniken wie oben), um etwas über den Beitrag eines jeden Eddies zur gesamten turbulenten kinetischen Energie zu erfahren.

# Schematisches Spektrum der Windgeschwindigkeit nahe dem Erdboden



Van der Hoven Spektrum der Windgeschwindigkeit

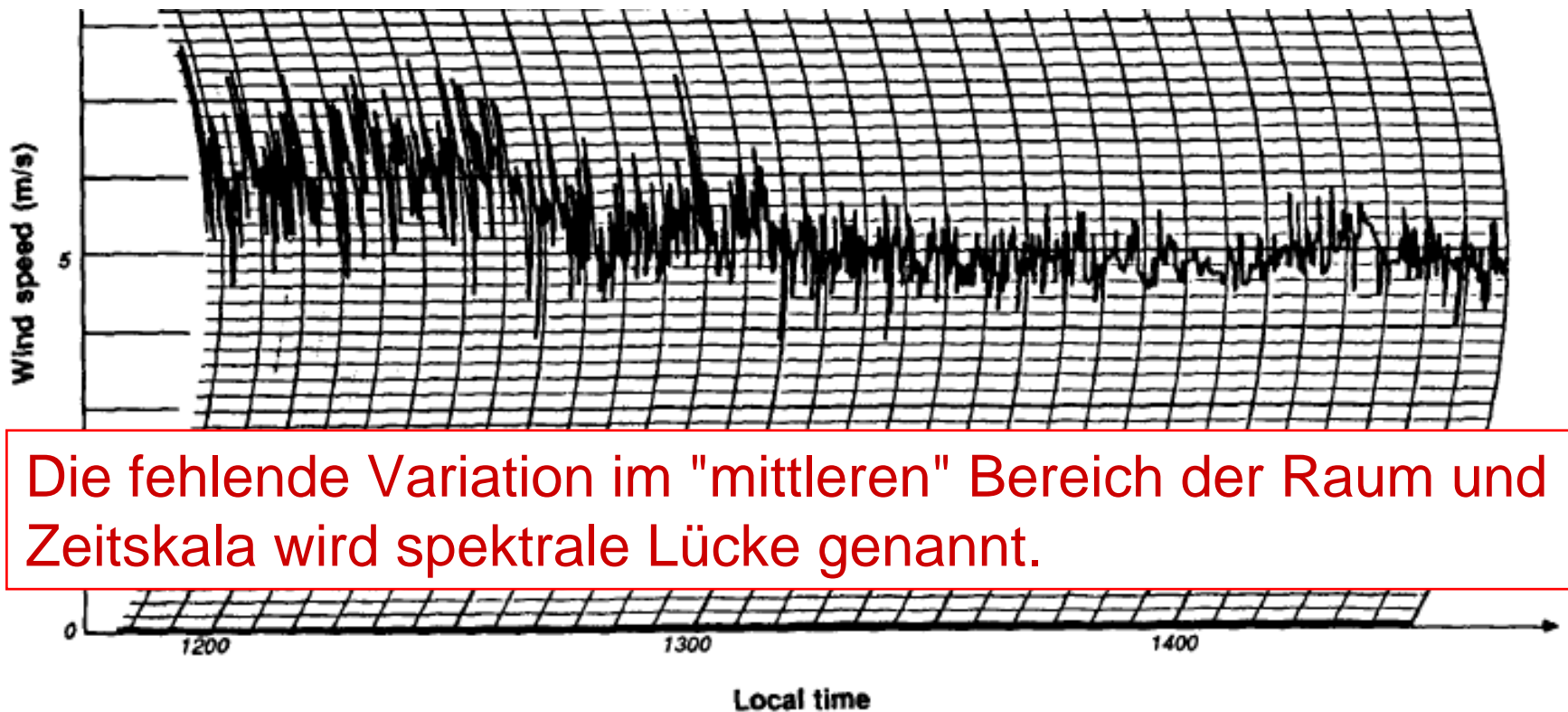
# Energiekaskade

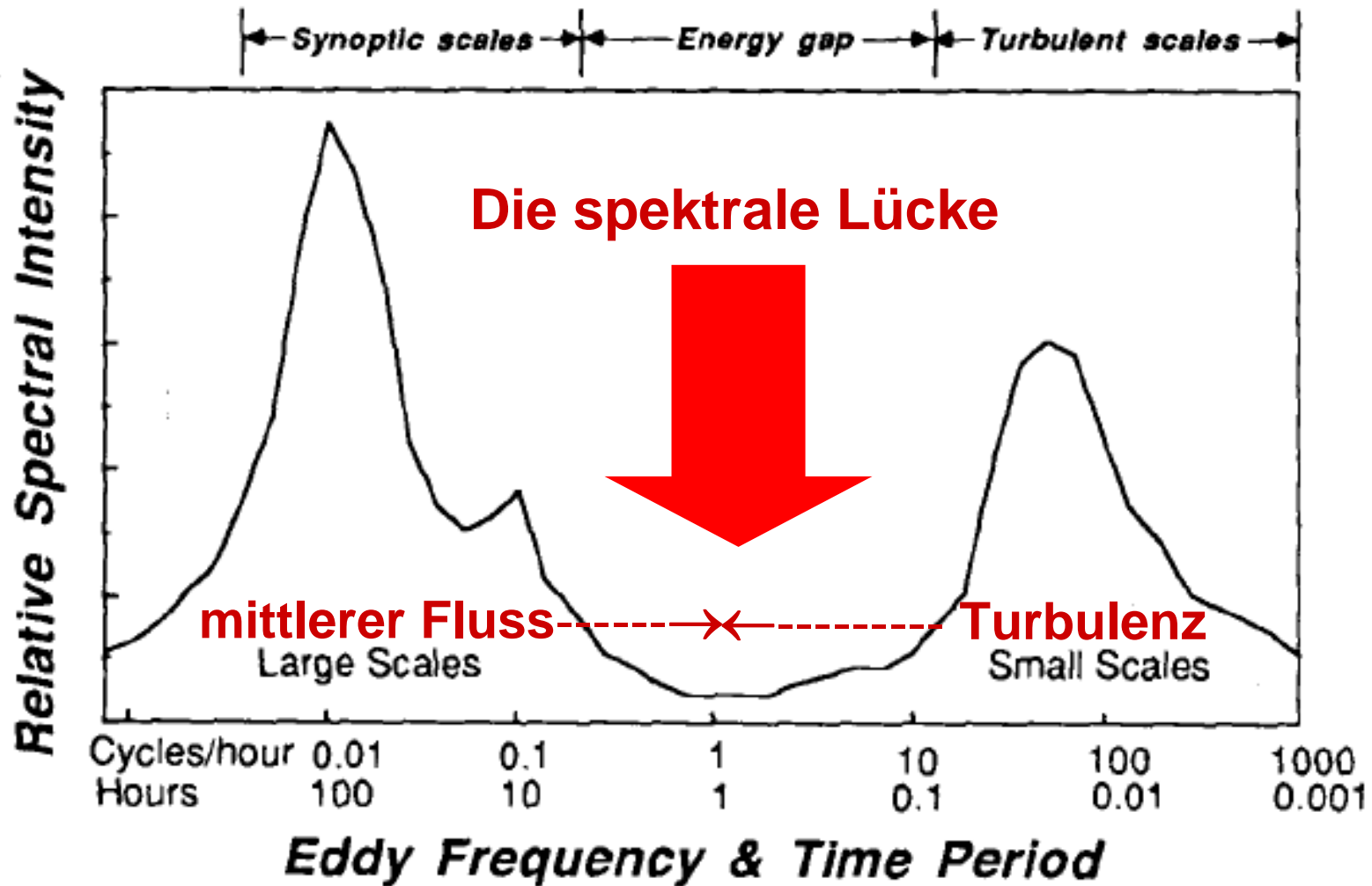


- Die größten Eddies sind meistens am intensivsten.
  - Die kleineren, hochfrequenten Eddies sind schwach.
  - Bewegungen durch große Eddies können Windscherungen verursachen, die wiederum kleinere Eddies erzeugen.
  - Solch ein Übertragen von turbulenter Energie von größeren zu kleineren Skalen ist bekannt als die Energiekaskade.
- Die Energie der kleinsten Eddies wird durch molekulare Viskosität in Wärme umgewandelt.

# Die spektrale Lücke

- Offensichtlich existiert eine ausgeprägte Lücke in der Variation der Windgeschwindigkeit im Periodenbereich von 30 Minuten bis 1 Stunde.





Die spektrale Lücke tritt auf in dem Bereich zwischen den synoptischen Skalen und der Mikroskalen!

# Die spektrale Lücke

- Für einige Strömungen (Bewegungen) scheint keine spektrale Lücke zu existieren.
- Zum Beispiel: Größere Cumulus Wolken wirken wie große Eddies mit Zeitskalen in der Größenordnung von 1 Stunde. Folglich kann das Spektrum der Windgeschwindigkeit in einer Wolkenschicht keine klare Separation der Skalen zeigen.
- Die meisten Analysen der Turbulenz bauen auf der Separation der Skalen auf, um das Problem zu vereinfachen. Deshalb ist die Beschreibung einer Strömung in einer wolkenbedeckten Situation sehr schwierig.

# Die spektrale Lücke

- Viele Wettervorhersagemodelle (engl. numerical weather prediction models, NWP models) benutzen eine Maschenweite (bzw. Wellenlängenbereich), die gerade in den Bereich der spektralen Lücke fällt. Dies bedeutet, dass nur größerskalige Bewegungen explizit aufgelöst werden und somit deterministisch vorhergesagt werden können.
- Bewegungen auf kleineren Skalen, vor allem Turbulenz, kann nicht direkt modelliert werden. Diese Prozesse (Bewegungen) müssen parametrisiert werden.



# Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung

- Es gibt eine sehr einfache Weise die großskaligen von den turbulenten Bewegungen zu trennen: Durch die Mittelung der Windgeschwindigkeitsmessungen über eine Periode von 30 Minuten bis zu 1 Stunde kann man die positiven und negativen Abweichungen der turbulenten Geschwindigkeiten eliminieren (heraus mitteln).

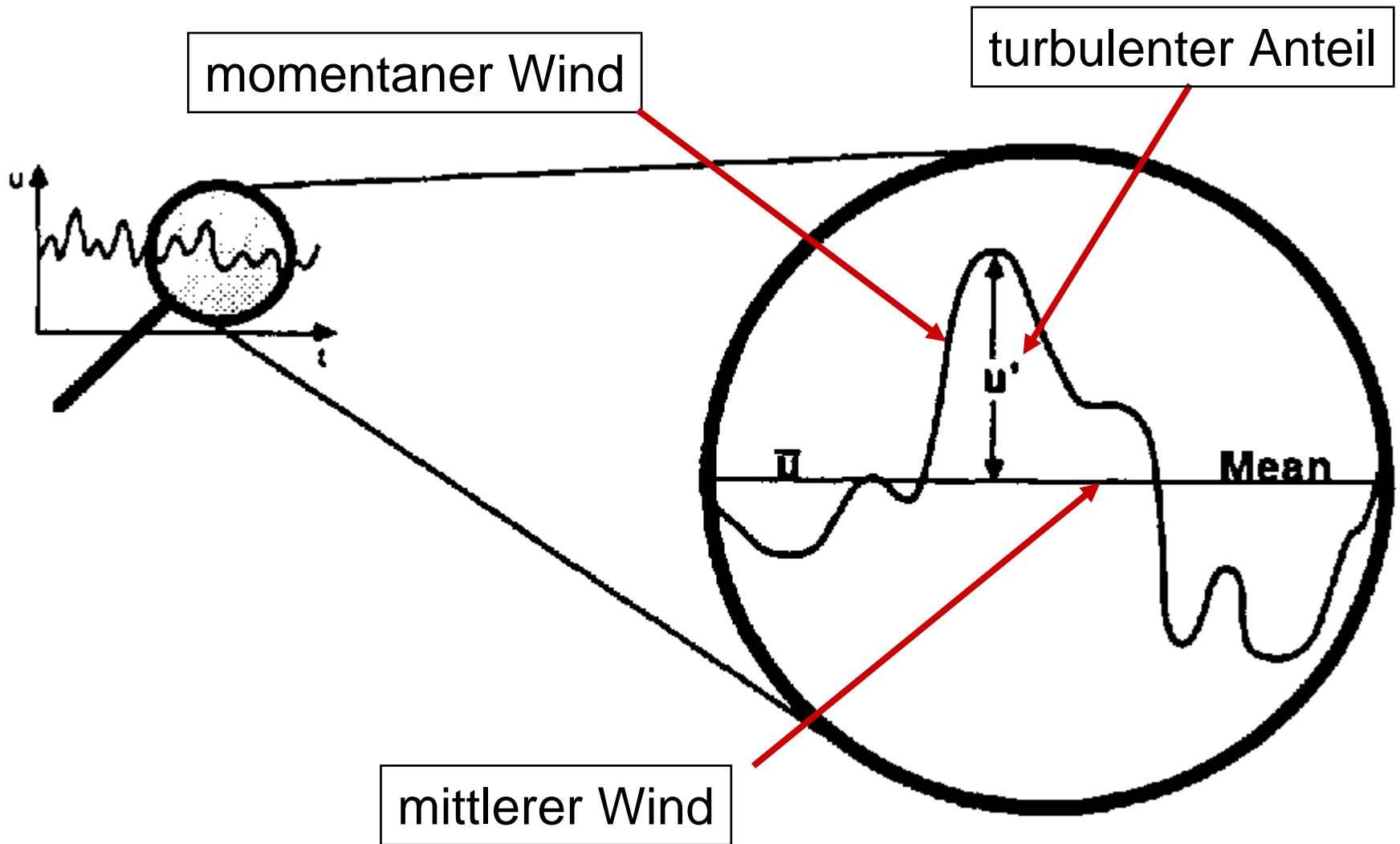
➤ Sei

$$u = \bar{U} + u'$$

momentaner Wind    mittlerer Wind    turbulenter Anteil

- $u'$  enthält die Variationen von  $\leq 1$  Stunde.
- Die Existenz der spektralen Lücke erlaubt die Unterteilung einer Bewegung in dieser Weise.

# Mittlere und turbulente Anteile der Bewegung




- Diese Art der Zerlegung kann man für alle meteorologischen Größen und Spurenstoffkonzentrationen durchführen.

# Einige grundlegende statistische Methoden

- Es gibt drei Arten der Mittelwertbildung: Zeitmittelung, Raum- (Orts-)mittelung, Ensemblemittelung.
- Die Zeitmittelung wird angewendet an einem bestimmten Punkt im Raum und besteht aus der Summe oder dem Integral über eine Zeitperiode T.

Sei  $A = A(t,s)$ , t die Zeit, s der Ort. Dann folgt:

$${}^t\overline{A(s)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A(t,s) \quad \text{oder} \quad {}^t\overline{A(s)} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t,s) dt$$


mit  $t = i\Delta t$ , für den diskreten Fall.

$\Delta t = T/N$ , wobei N die Anzahl der Datenpunkte ist.

# Einige grundlegende statistische Methoden

- Die Raummittelung wird angewendet zu einem bestimmten Zeitpunkt und besteht aus der Summe oder dem Integral über einen räumlichen Bereich S.

$$\overline{s A(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} A(t, s) \quad \text{oder} \quad \overline{s A(t)} = \frac{1}{S} \int_0^S A(t, s) ds$$

wobei für den diskreten Fall  $s = j\Delta s$  und  $\Delta s = S/N$ .

- Ein Ensemblemittel besteht aus der Summe von N identischen Experimente oder Realisierungen (in Labor).

$$\overline{e A(t, s)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} A_j(t, s)$$

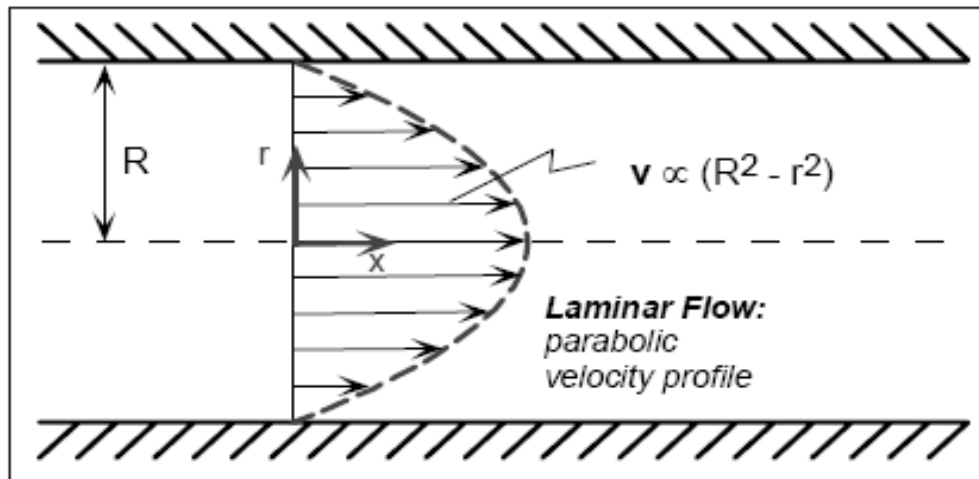
# Einige grundlegende statistische Methoden

- Für Laborexperimente ist ein Ensemblemittel erstrebenswert. Es erlaubt die Reduzierung von experimentellen Fehlern durch Wiederholung des Experimentes.
- Anders als im Labor haben wir über atmosphärische Abläufe keine Kontrolle; wir sind nur selten in der Lage reproduzierbare Wetterereignisse zu beobachten (z.B. 'Hektor'). Deshalb können wir in der Regel kein Ensemblemittel bilden.
- Räumliche Mittelung ist möglich, wenn wir eine Vielzahl meteorologischer Sensoren entlang einer Linie, in einer Region oder einem Volumen haben.

# Einige grundlegende statistische Methoden

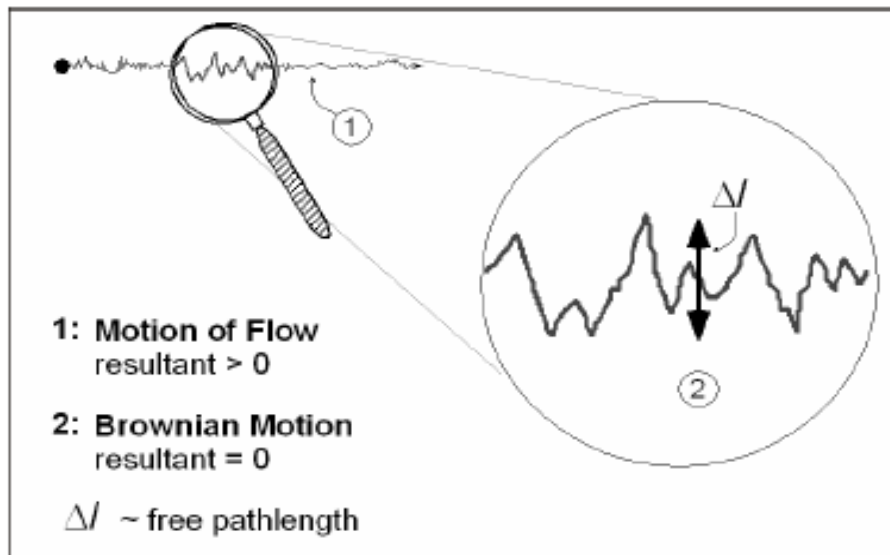
- Wenn Turbulenz homogen ist, d.h. statistisch gleich an jedem Ort, dann misst jeder Sensor das gleiche Phänomen, was die räumliche Mittelung sinnvoll macht.
- Die reale Atmosphäre ist nur in begrenzten Regionen in horizontaler Richtung homogen. Dies bedeutet, dass die meisten räumlichen Mittel eine Mittelung einer Vielzahl von verschiedenen Phänomenen darstellen.
- Durch geeignete Wahl der Größe des Messgebietes und der Sensoranordnung kann man durchaus für bestimmte Untersuchungen Skalen bestimmter Phänomene isolieren, während andere Skalen herausgemittelt werden.

# Non-Turbulent Flow: **Laminar Flow**



## Laminar Channel Flow

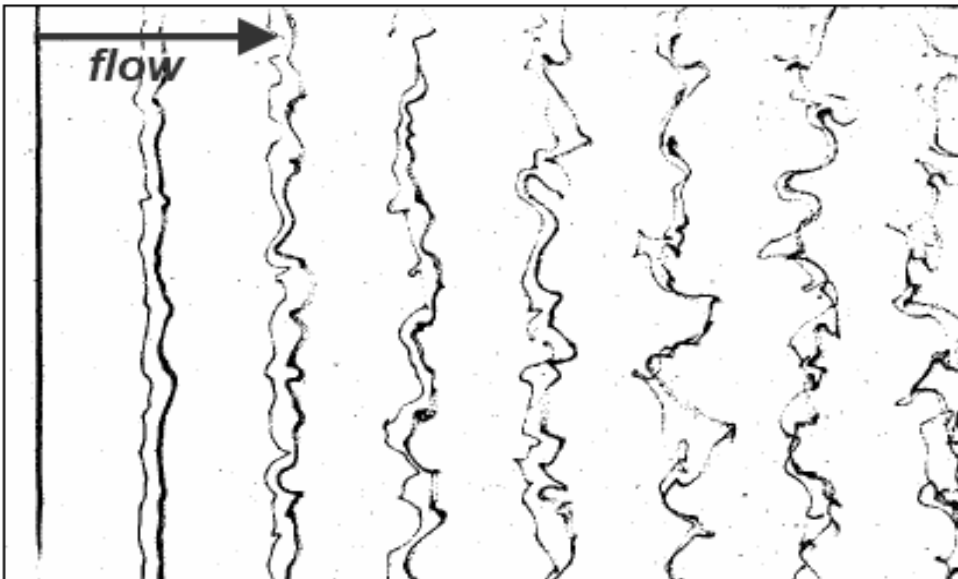
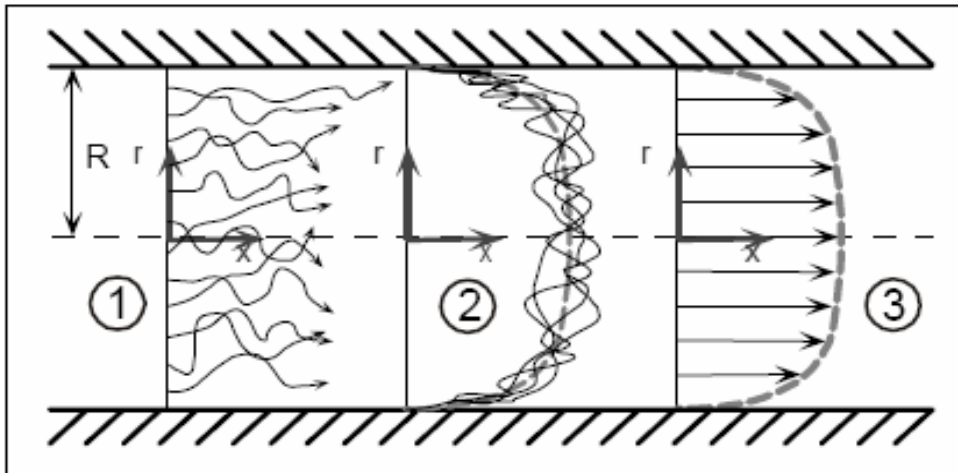
- trajectories do not cross
- trajectories = streamlines
- trajectories are parallel
- well defined velocity profile: parabolic
- no-slip condition at wall
- momentum transport towards wall by molecular diffusion



## Momentum Transfer in Laminar Flow

1. macroscopic motion is directed: *flow*
2. microscopic motion has cross-flow component: random *Brownian motion* (from molecular interaction)
  - carries momentum in cross-flow direction
  - scale of Brownian motion:  
 $\sim$  free path length  
(in air at normal conditions  $\approx 10^{-7}$  m)

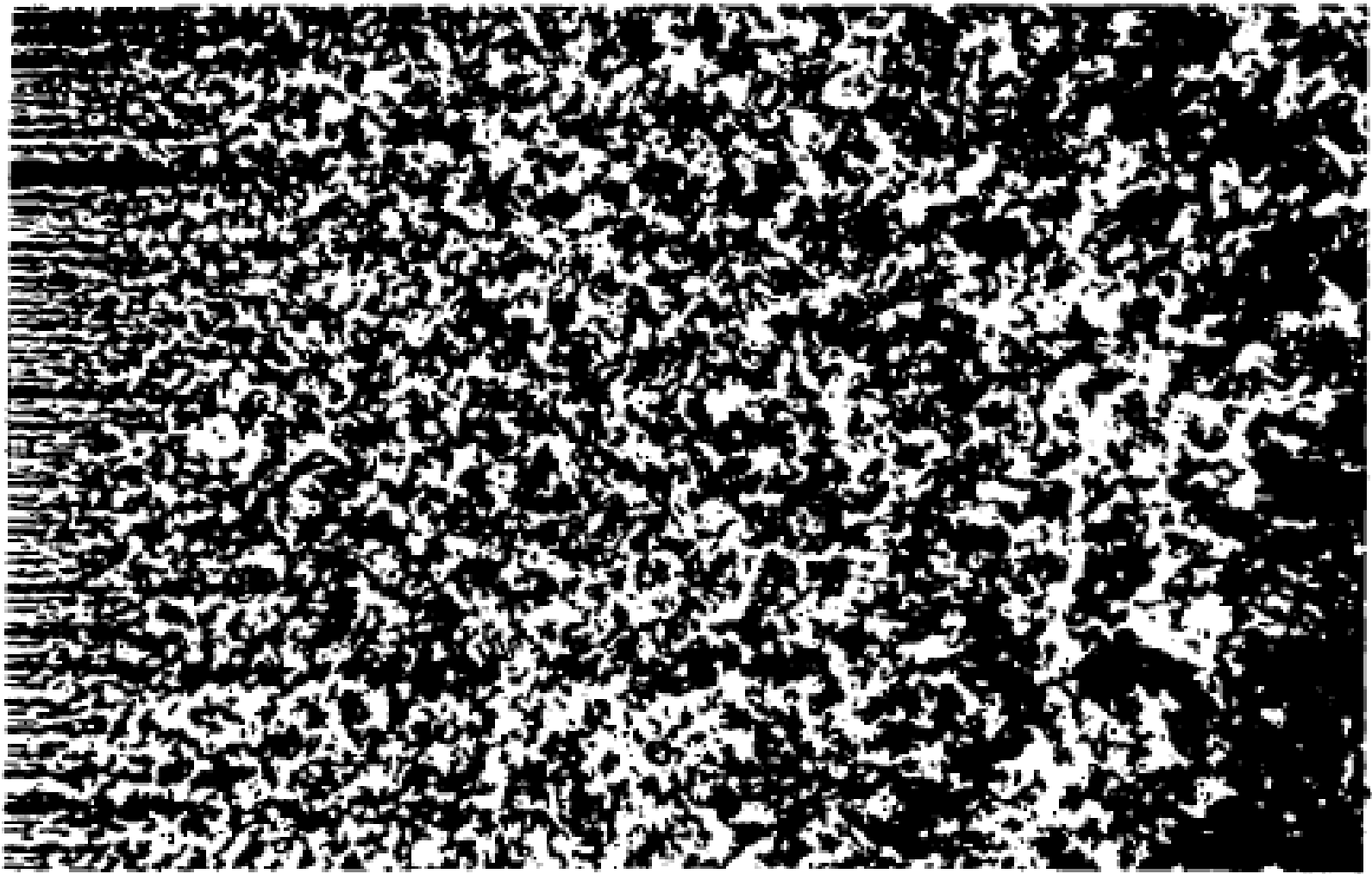
# In Contrast: Turbulent Flow



## Turbulent Channel Flow

1. trajectories cross often
  2. trajectories  $\neq$  streamlines
    - trajectories are not parallel
    - instantaneous profiles  $\neq$  mean profile
  3. mean velocity profile is not parabolic (flatter in center, steeper near wall)
    - no-slip condition at wall
    - momentum transport towards wall by cross-flow components of trajectories
    - scale of cross-flow component  $\approx$  scale of channel
    - momentum transfer depends on flow configuration, not on the fluid
- ← lines of bubbles (formed by electrode) travel downstream and become progressively deformed





Laborexperiment: Erzeugung von homogener Turbulenz hinter einem Gitter. Durch das "Vermischen" von instabilen Wirbeln bildet sich schnell ein homogenes Feld aus. So wie es in Richtung stromabwärts zerfällt, liefert es eine hilfreiche Approximation für homogene Turbulenz (d.h. statistisch gleich an jedem Punkt im Raum).

# Arten der Mittelwertbildung

- Wenn man in-situ Sensoren (z.B. Thermometer) verwendet, ist die Bildung von Volumenmitteln so gut wie unmöglich, da es schwierig ist, diese Sensoren an "allen" Standorten und in allen Höhen in der GS einzusetzen.
- Fernerkundungssensoren (z.B. Radars, Lidars und Sodars) können Volumen in der Atmosphäre abtasten, was die Bildung eines Volumenmittelwertes einer einzelnen Größe (Variable) möglich macht.
- Flächenmitteln werden in der Bodenschicht für kleinere Bereiche häufig gebildet. Dazu stellt man ein Messnetz von Instrumenten (am Boden, auf Masten) auf.
- Mittel entlang einer Strecke (z.B. entlang einer Strasse) werden durch entsprechend lineare Anordnung der Messinstrumente durchgeführt.

# Arten der Mittelwertbildung

- Mittels Sensoren auf fahrbaren Plattformen (LkW, Flugzeuge) kann man quasi-linienförmige Mittelwerte erhalten.
- Eigentlich gibt es keine "wahren" Mittelwerte entlang einer Strecke oder in einem Volumen, da sich aufgrund turbulenter Vorgänge während der Messung die Bedingungen entlang einer Messstrecke ändern.
- Die meisten Messstrecken sind als Kompromiss gewählt zwischen langen Strecken (um die statistische Signifikanz durch eine Vielzahl von Messpunkten zu erhöhen) und kurzen Zeitintervallen (um den Einfluss des Tagesgang zu minimieren, der in der GS ausgeprägt ist).

# Bildung von zeitlichen Mittelwerten

- Zeitliche Mittelwerte werden häufig verwendet. Berechnet werden diese meist von Messsensoren einer einzelnen Station.
- Da diese Art von Beobachtungen an einem festen Ort relativ einfach durchgeführt werden können, ist die zeitliche Mittelwertbildung in der unteren GS sehr beliebt.
- Einige in der Vertikalen messende Fernerkundungssensoren benutzen die Methode der zeitlichen Mittelung, um die mittlere und obere GS zu beobachten.

# Bildung von zeitlichen Mittelwerten

- Für Untersuchungen der Turbulenz, die sowohl homogen als auch stationär (statistisch gesehen konstant mit der Zeit) ist, sollten die Zeit-, Raum- und Ensemblemittelwerte gleich sein.
- Dies wird als Ergodenbedingung\* (engl. ergodic condition) bezeichnet, die oft angenommen wird, um das Problem der Turbulenz handhabbar zu machen.

---

\* Ergodenhypothese (kommt aus der statistischen Mechanik): Sie besagt, dass ein zeitlicher Mittelwert gleich dem Raum- (Orts-) bzw. Ensemblemittelwert (Scharmittelwert) ist.

# Regeln der Bildung von Mittelwerten

1.  $\bar{c} = c$        $c$ : allgemeine Konstante

2.  $\overline{cA} = c\bar{A}$

3.  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$

4.  $\overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}\bar{B}$

5.  $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$

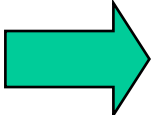
6.  $\overline{\frac{dA}{dt}} = \frac{d\bar{A}}{dt}$

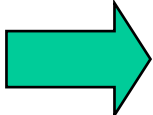


## Mittelwert eines Mittelwertes

3.  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$  Ein gemittelter Wert wirkt wie eine Konstante, wenn er das zweite Mal über den gleichen Zeitraum gemittelt wird.  $\Rightarrow$

Definition: 
$$\overline{A}(T, s) = \frac{1}{T} \int_0^T A(t, s) dt$$

 
$$\frac{1}{T} \int_0^T \overline{A}(T, s) dt = \overline{A}(T, s) \frac{1}{T} \int_0^T dt = \overline{A}(T, s)$$

 
$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

genauso

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{A}\overline{B}$$

# Differentiation

Leibnitz' Theorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} A(t, s) ds = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \frac{\partial A(t, s)}{\partial t} ds + A(t, s_2) \frac{ds_2}{dt} - A(t, s_1) \frac{ds_1}{dt}$$

Wenn  $S_1$  und  $S_2$  unabhängig von der Zeit sind, folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} A(t, s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial A(t, s)}{\partial t} ds$$



# Differentiation

Für den Spezialfall, dass  $S_1$  und  $S_2$  (=Grenzen der Integration) konstant sind mit der Zeit, kann man einfach schreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_s A ds = \int_s \frac{\partial A}{\partial t} ds$$

d.h., die Reihenfolge von Integration und Differentiation kann einfach vertauscht werden.

Multiplikation beider Seiten mit  $1/S$  und  $S = S_2 - S_1$  ergibt:

$$\frac{d({}^s \bar{A})}{dt} = \overline{{}^s \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)}$$

Dieser Spezialfall ist für eine in ihrer Mächtigkeit variablen GS nicht immer gültig!

## Beispiel

Angenommen wir möchten die Änderungsrate eines mittleren Mischungsverhältnisses  $\bar{r}$  mit der Zeit finden, wobei das GS-Mittel definiert ist durch die Integration über die Höhe der GS, mit anderen Worten von  $z = 0$  bis  $z = z_i$ .

Da  $z_i$  mit der Zeit variiert, können wir das Leibnitz Theorem benutzen und erhalten:

$$\frac{d}{dt} [z_i \int_0^{z_i} \bar{r}] = z_i \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right] + \bar{r}(t, z_i^+) \frac{dz_i}{dt}$$

wobei  $z_i^+$  die Höhe gerade oberhalb der GS bestimmt ( $z_i$  ist die Oberkante der GS). Die Gleichung beschreibt die Änderung der Höhe der Grenzschicht und des Mischungsverhältnis.

# Die spektrale Lücke

Betrachten wir nochmals die spektrale Lücke.

Bei einer Mittelung über 30 Minuten bis 1 Stunde werden turbulente Fluktuationen eliminiert und längere Perioden in der Zeit erhalten.

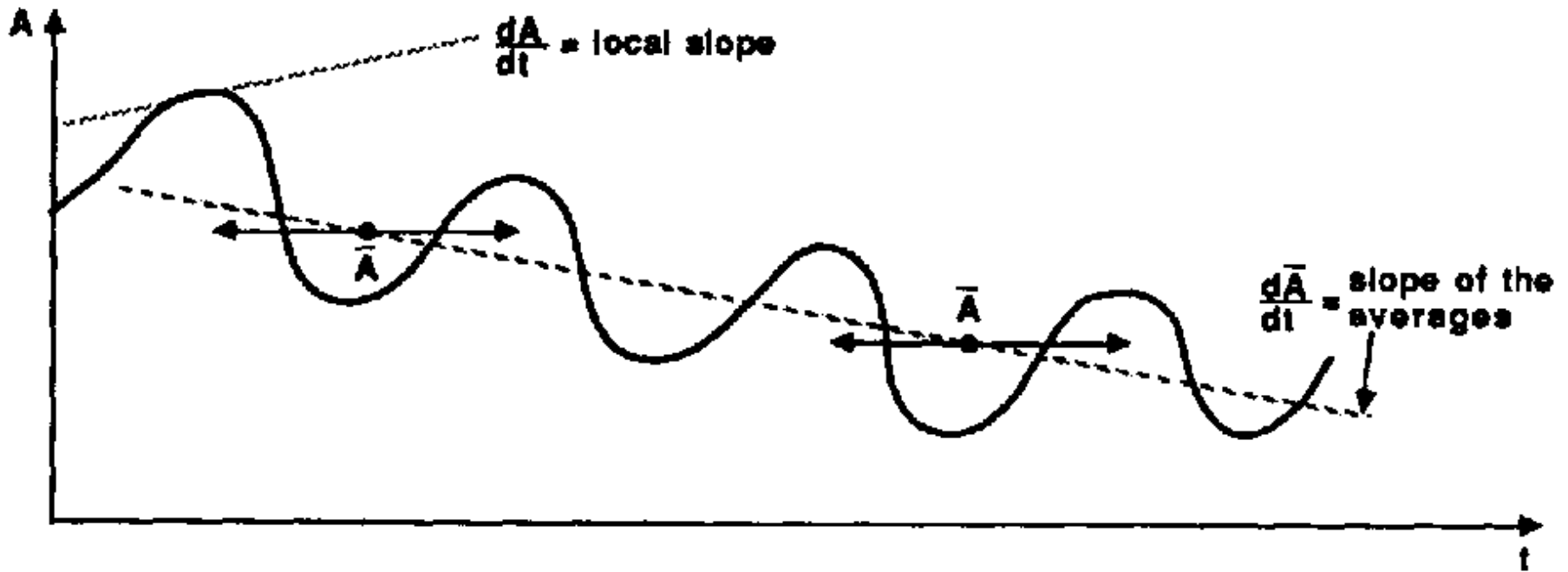
Wir haben vorher gesehen, dass eine über 30 Minuten gemittelte Windgeschwindigkeit mit Perioden von Stunden variieren kann. Damit kann man den 30-Minuten-Mittelwert der zeitlichen Ableitung der variablen  $A$  benutzen, um herauszufinden, wie  $\bar{A}$  über längere Perioden variiert:

$$\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^t} = \frac{d^t \bar{A}}{dt}$$

Mit anderen Worten, der zeitliche Mittelwert einer lokalen Änderung ist gleich der zeitlichen Änderung des Mittelwertes.



**siehe Abb.**



Schematischer Vergleich der Änderungsrate zeitlich gemittelter Werte (=slope of the average) mit dem Mittel lokaler zeitlicher Veränderungen (=local slope). Die Mittelungsperiode  $T$  ist durch die Breite der horizontalen Pfeile angezeigt.

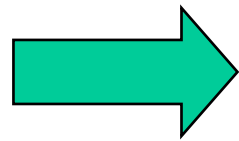
# Reynolds Mittelung

Anwendung der Regeln auf Mittelwerte und Fluktuationen:

Regeln  
3 und 5:

$$A = \bar{A} + a' \quad B = \bar{B} + b'$$

$$\bar{A} = \overline{\bar{A} + a'} = \overline{\bar{A}} + \overline{a'} = \bar{A} + \bar{a}'$$



$$\bar{a}' = 0 ; \bar{b}' = 0$$

$$\overline{AB} = \overline{(\bar{A} + a')(\bar{B} + b')}$$

$$= \overline{(\bar{A}\bar{B} + a'\bar{B})(\bar{A}b' + a'b')}$$

$$= \overline{\bar{A}\bar{B} + 0 + 0 + a'b'} = \bar{A}\bar{B} + \underline{\overline{a'b'}}$$

**≠ 0 ! ; dieser nicht-lineare Term ist sehr wichtig in der Turbulenztheorie !**

# Varianz

Eine statistische Maßzahl für die Streuung von Messwerten um einen Mittelwert ist die Varianz  $\sigma^2$ , definiert durch

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})^2$$

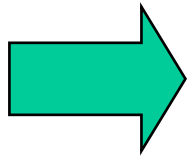
(im engl. 'biased' (befangene) Varianz genannt). Sie ist ein gutes Maß für die Streuung einer bestimmten Probe von beobachteten Variablen in der GS, aber nicht das beste Maß der Streuung einer Gesamtpopulation von möglichen Beobachtungen. Eine bessere Abschätzung der Streuung einer Gesamtpopulation liefert hier ('unbiased' Varianz)

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})^2$$

Für  $N \gg 1$  ist der Unterschied zwischen den beiden Abschätzungen gering.

# Standardabweichung

Der turbulente Anteil einer Variablen ist:  $a' = A - \bar{A}$ .



$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i'^2 = \overline{a'^2}$$

Dadurch können turbulente Größen wie

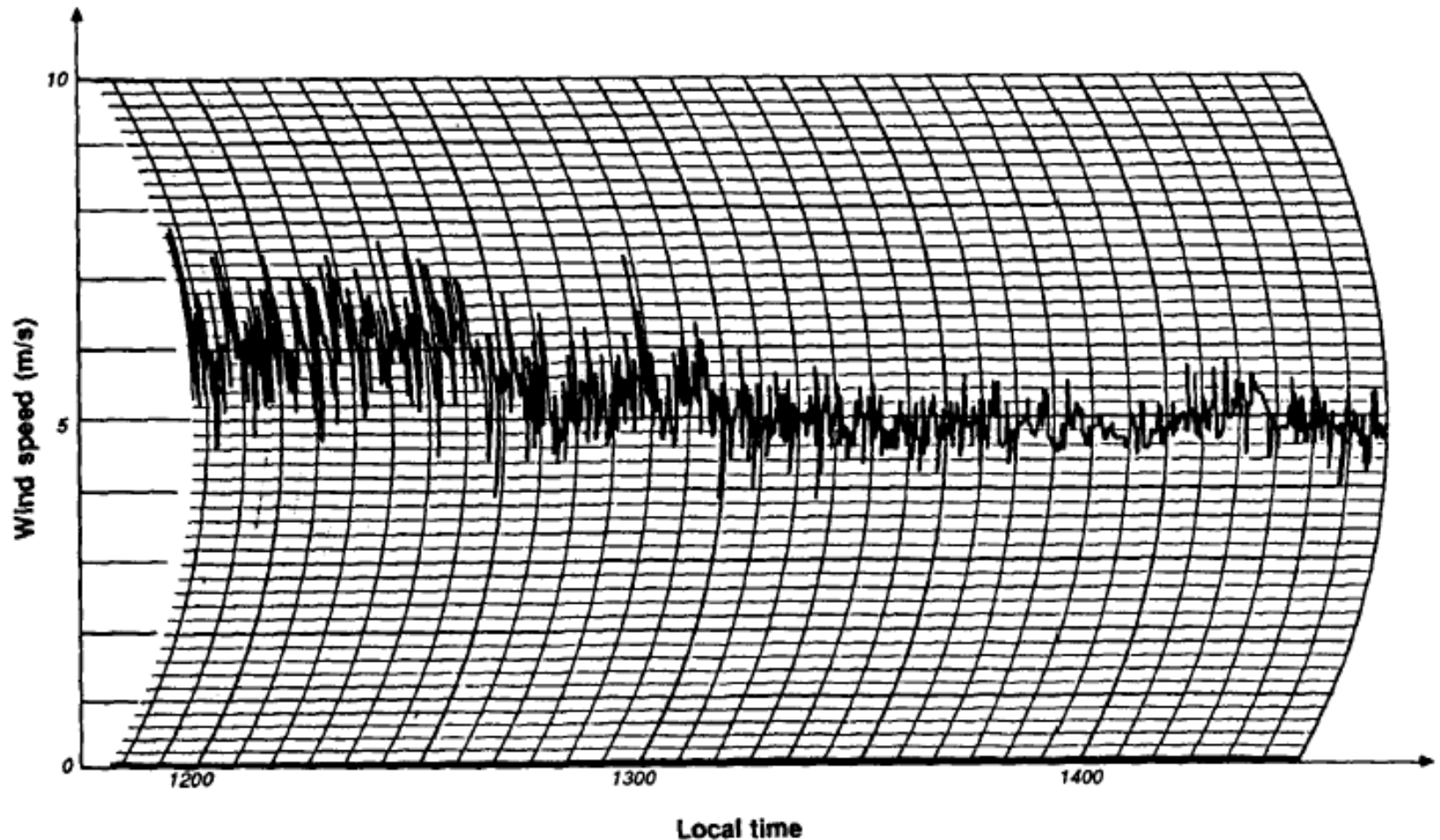
$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{\theta'^2}, \overline{r'^2}, \overline{q'^2}$$

interpretiert werden als Varianz.

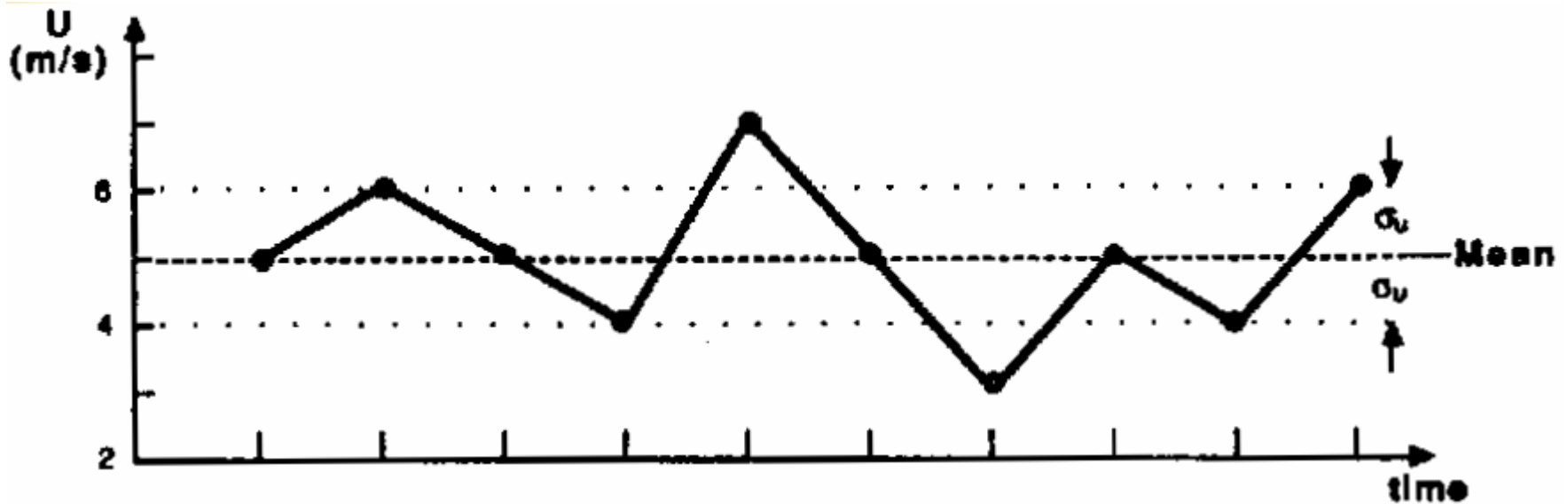
Die Standardabweichung ist definiert als Quadratwurzel der Varianz:

$$\sigma_A = \sqrt{\overline{a'^2}}$$

Die Standardabweichung hat immer die gleiche Dimension wie die ursprüngliche Variable. In der Abbildung erkennt man, dass die Standardabweichung zur Mittagszeit 0.5-0.6  $\text{m s}^{-1}$  beträgt, nach 14:00 Uhr nur noch etwa 0.3  $\text{m s}^{-1}$ .







Zusammenhang zwischen der Standardabweichung und Turbulenzvariationen:

- Durchgezogene Linie verbindet die Datenpunkte,
- dickere gestrichelte Line gibt den Mittelwert an,
- gepunktete Linien zeigen die einfache Standardabweichung oberhalb und unterhalb des Mittelwertes.

# Intensität der Turbulenz

Man erwartet, dass die Intensität der Turbulenz nahe dem Erdboden anwächst, wenn die mittlere Geschwindigkeit  $U$  zunimmt.

Deshalb wird oft eine dimensionslose Maßzahl der Intensität der Turbulenz  $I$  wie folgt definiert:

$$I = \sigma_U / \bar{U}$$

Für eine mechanisch angetriebene Turbulenz erwartet man, dass  $\sigma_U$  eine einfache Funktion von  $U$  ist.

Zur Erinnerung sei gesagt, dass  $I < 0.5$  sein muss, damit die Hypothese von Taylor Gültigkeit hat.

# Kovarianz und Korrelation

In der Statistik ist Kovarianz zwischen zwei Variablen wie folgt definiert:

$$\text{covar}(A, B) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (A_i - \bar{A})(B_i - \bar{B})$$

Anwendung der Reynolds Mittelungsmethode:

$$\text{covar}(A, B) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a'_i b'_i = \overline{a' b'}$$

Somit hat das schon zuvor eingeführte nicht-lineare Turbulenzprodukt die gleiche Bedeutung wie die Kovarianz.

# Interpretation der Kovarianz

- Die Kovarianz bezeichnet den Grad der gemeinsamen Beziehung zwischen zwei Variablen A und B.
- Beispiel: A = Lufttemperatur T, B = vertikale Geschwindigkeit w.
- An einem warmen Sommertag über Land erwartet man aufsteigende warme Luft ( $T'$  und  $w'$  beide  $> 0$ ) und kühlere Luft (kühler als das Mittel) sinkt ab ( $T'$  und  $w'$  beide  $< 0$ ).
- $\Rightarrow \overline{w'T'} > 0$  im Mittel, d.h. w und T ändern sich gleichförmig.
- Die Kovarianz  $\overline{w'T'}$  (vertikaler Wärmefluss) ist auch tatsächlich positiv in den unteren 80% der konvektiv durchmischten ML.

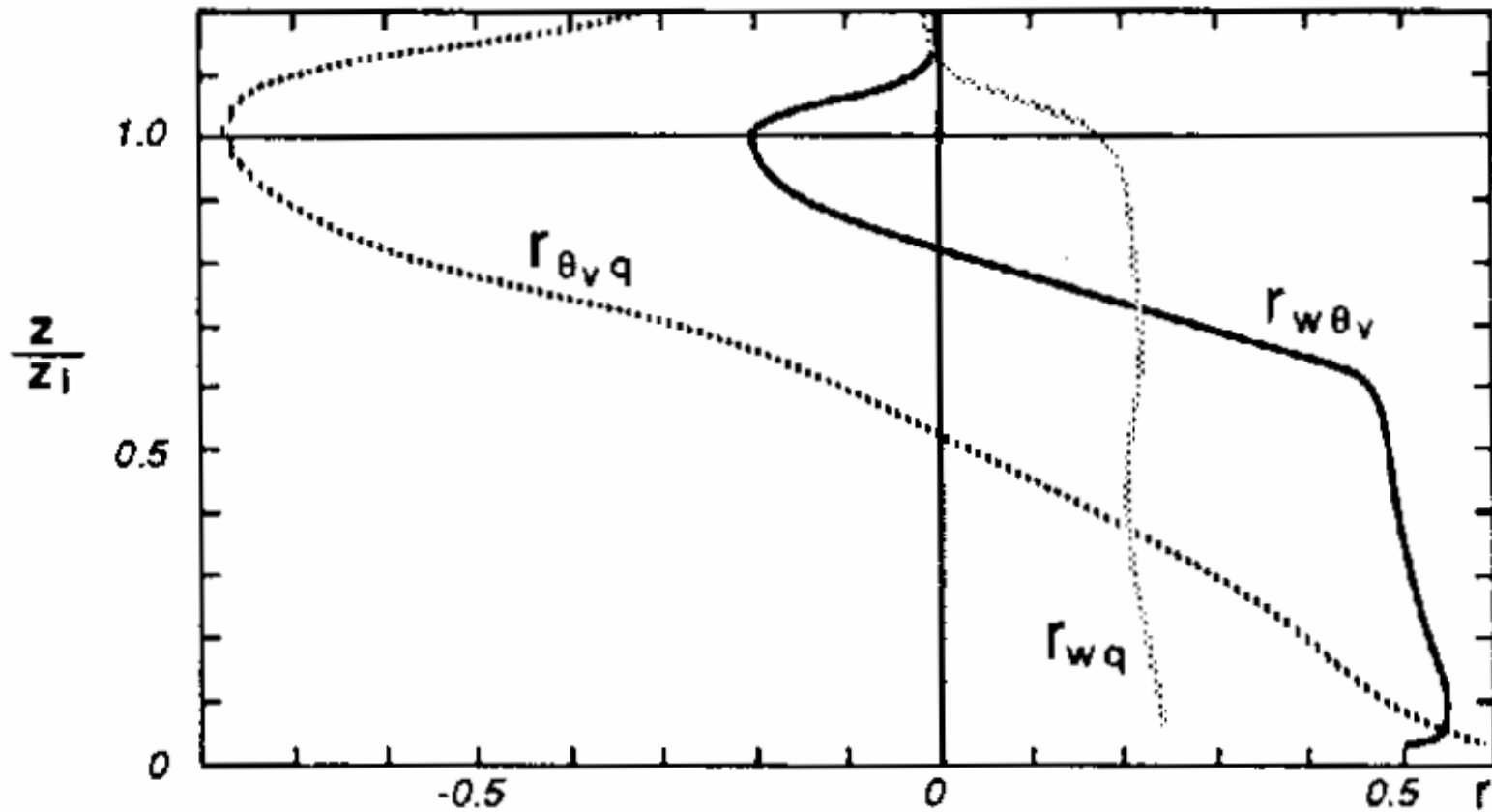
# Normalisierte Kovarianz

- In machen Fällen ist die sogenannte normalisierte Kovarianz hilfreich.
- Eine solche Beziehung ist definiert als der lineare Korrelationskoeffizient:

$$r_{AB} = \frac{\overline{a'b'}}{\sigma_A \sigma_B}$$

- Per Definition variiert diese Variable zwischen  $-1$  und  $+1$ .
- Bei zwei Variablen, die perfekt korreliert sind (miteinander variieren), ergibt sich  $r = 1$ . Bei zwei Variablen, die perfekt negativ korreliert sind (gegensätzlich variieren), ergibt sich  $r = -1$ .
- Bei Variablen, die nicht miteinander variieren, ergibt sich  $r = 0$ .

# Beispiel



Typische Profile in der konvektiv durchmischten Grenzschicht.

# Turbulente kinetische Energie

- Die gebräuchliche Definition der kinetischen Energie (KE) ist  $0.5m\mathbf{U}^2$ . ( $\mathbf{U} = u + v + w$ )
- Für ein Fluid benutzt man häufig  $\text{KE}/\text{Einheitsmasse} = 0.5\mathbf{U}^2$ .
- Man unterscheidet zwischen mittlerer KE (MKE) und turbulenter KE (engl. turbulence kinetic energy, TKE):

$$\text{MKE} / m = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$$

$$\text{TKE} / m = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

Verfügbare KE/Einheitsmasse

# Turbulente kinetische Energie

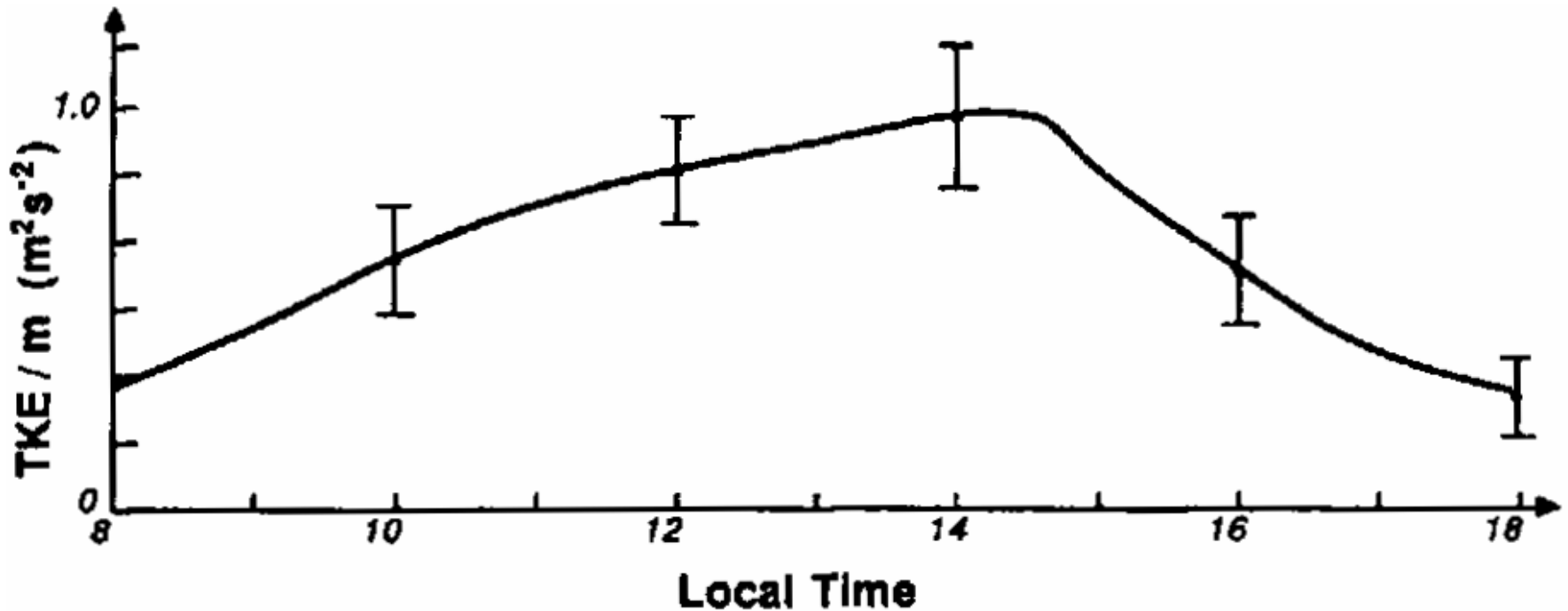
- Man kann erwarten, dass die TKE stark variiert ⇒  
Definition einer mittleren TKE/Einheitsmasse:

$$\text{TKE} / m = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

- Beachte das Auftreten der Varianz! Man kann direkt erkennen, dass es eine direkte Beziehung zwischen der mittleren kinetischen Energie der Turbulenz und der Varianz gibt.
- Kinetische Energie der Turbulenz ist eine der wichtigsten Größen, um die turbulente Grenzschicht zu untersuchen!

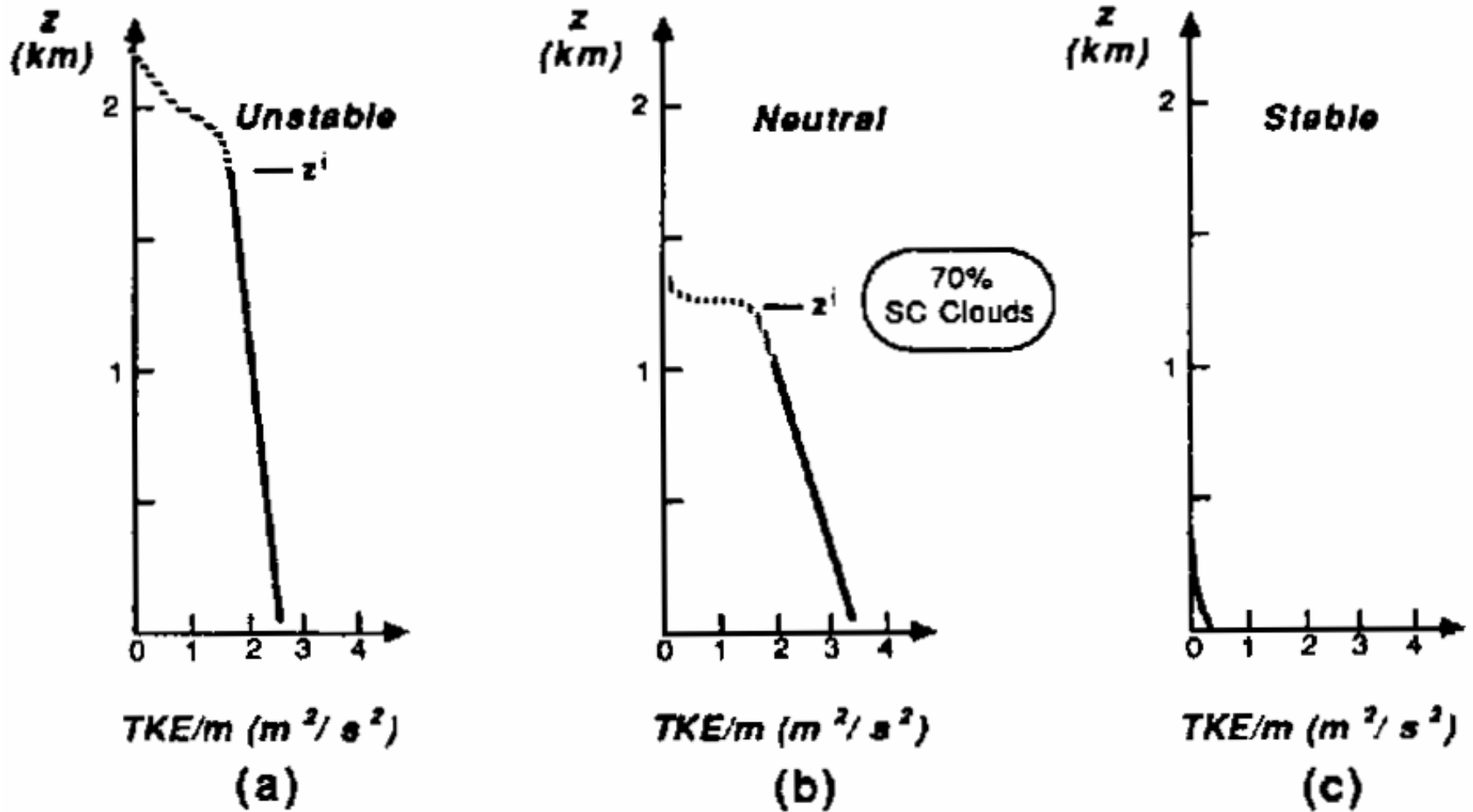


## Typische Variation der TKE am Tage unter konvektiven Bedingungen



$$\text{TKE} / \text{m} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

Flugzeugmessung des Tagesganges in 300 m Höhe über Grund, Tennessee, August 1978.



Beispiele der TKE/m für verschiedene GS. (a) Konvektiv durchmischte GS am Tage, wolkenlos und schwache Winde. (b) Nahezu neutral geschichteter Atmosphäre mit starken Winden ( $10\text{-}15 \text{ m s}^{-1}$  nahe der Erdoberfläche) und durchbrochener Bewölkung. (c) Nächtliche stabile GS um 22:00 Uhr Lokalzeit.

# Kinematischer Fluss

Ein "Fluss" beschreibt den Transfer (Transport) einer Größe (Variablen) pro Einheitsfläche und Einheitszeit.

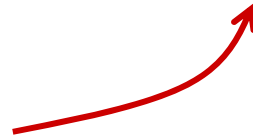
Beispiele:

<u>Flux</u>	<u>Symbol</u>	<u>Units</u>
mass	$\tilde{M}$	$\left[ \frac{\text{kg}_{\text{air}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$
heat	$\tilde{Q}_H$	$\left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$
moisture	$\tilde{R}$	$\left[ \frac{\text{kg}_{\text{water}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$
momentum	$\tilde{F}$	$\left[ \frac{\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$
pollutant	$\tilde{\chi}$	$\left[ \frac{\text{kg}_{\text{pollutant}}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$ or $\left[ \frac{\text{kg}_{\text{pollutant}}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

- Der Fluss der Feuchte wird manchmal umgeschrieben als Fluss latenter Wärme:

$$\tilde{Q}_E = L_v \tilde{R}$$

Latente Wärme  
der Verdampfung



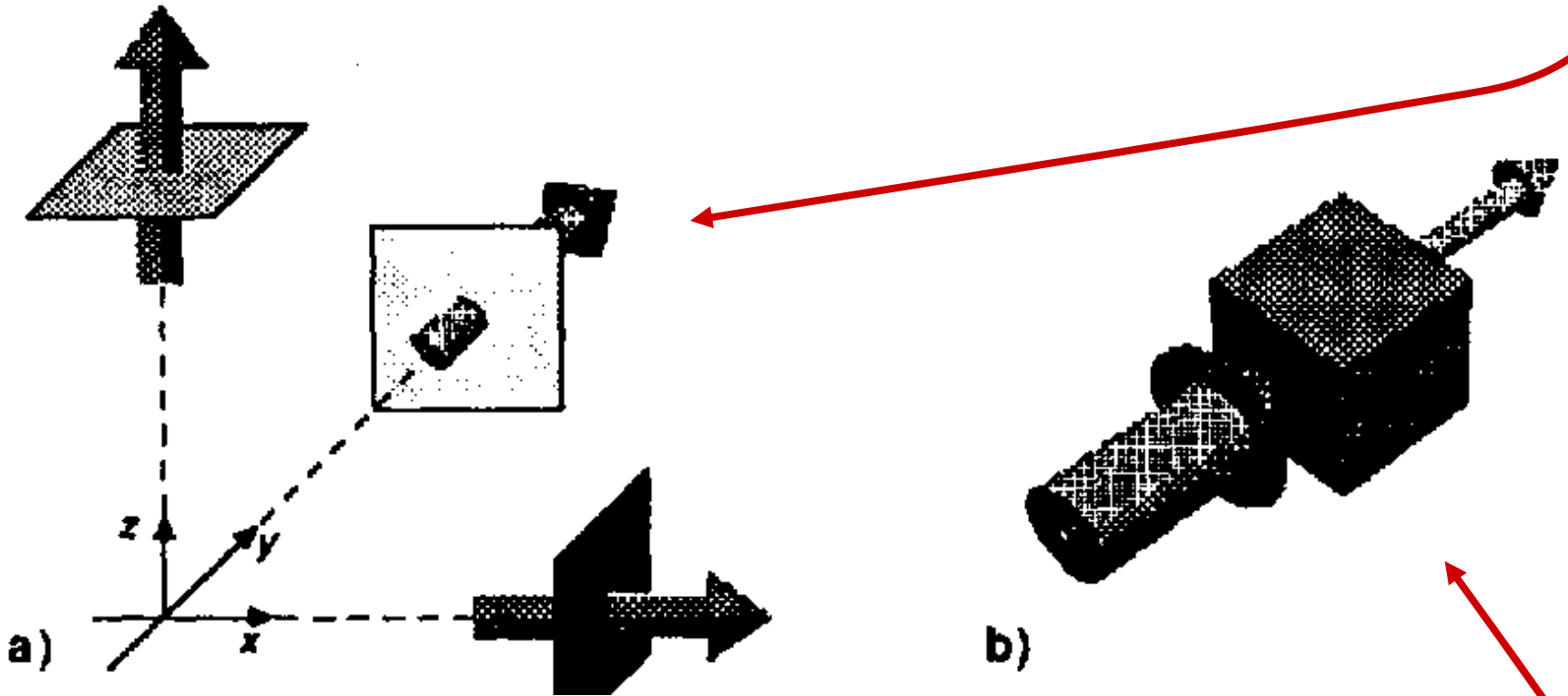
$L_v \cong 2.45 \times 10^6 \text{ J/kg}$   
in der GS im Sommer  
mit 20°C

- Selten wird eine Größe wie 'Impuls' direkt gemessen. Gemessen werden Größen wie Temperatur und Windgeschwindigkeit.

⇒ Der "kinematische Fluss" wird definiert durch die Division eines Flusses (s.o.) durch die Dichte von feuchter Luft  $\rho_{\text{air}}$ . Im Falle des sensiblen Wärmeflusses muss zusätzlich durch die spezifische Wärme bei konstanten Druck  $c_p$  dividiert werden.

$\rho c_p = 1.216 \times 10^3 \text{ W m}^{-3} / (\text{K m s}^{-1})$  erlaubt die Umwandlung von normalen Wärmeflüssen in kinematische Wärmeflüsse.

- Meistens können Flüsse in drei Komponenten zerlegt werden: eine vertikale und zwei horizontale Komponenten.

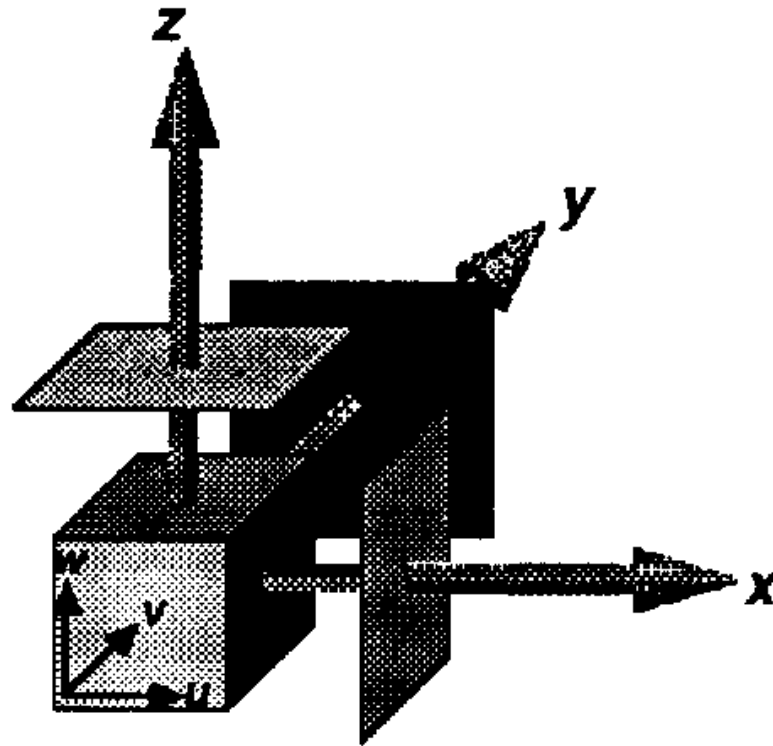


- Wenn ein größerer Fluss in ein Volumen hinein fließt als heraus kommt, muss die Konzentration der Größe in dem Volumen zunehmen.

Flüsse können als Vektoren dargestellt werden.

- Im Falle des Impulses kann der Fluss in einer Richtung der Impulsfluss von  $u$ ,  $v$  oder  $w$  sein  $\Rightarrow$  es gibt neun Komponenten von diesem Fluss. Jeder dieser drei Impulskomponenten kann durch eine senkrechte Fläche hindurch gehen, in jeder der drei kartesischen Richtungen.

Momentum can be split into the three cartesian directions, based on the  $u$ ,  $v$ , and  $w$  components of wind. Momentum flux can consist of the transfer of any of these three components in any of three directions:  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , yielding a total of nine momentum flux components.



- Der Impulsfluss ist ein Tensor 2-ter Ordnung. (Ein Skalar ist ein Tensor 0-ter Ordnung; ein Vektor ist ein Tensor 1-ter Ordnung.)
- Beispiel:  $uw$  ist der kinematische vertikale ( $w$ ) Impulsfluss in  $x$ -Richtung;  $wu$  ist der kinematische horizontale ( $u$ ) Impulsfluss in  $z$ -Richtung.
- Die Flüsse können in mittlere und turbulente Anteile zerlegt werden (siehe oben).

➤ Einige der Flüsse, die in direktem Zusammenhang mit dem mittleren Wind (d.h. der Advektion) stehen, sind:

- vertikaler kinematischer advektiver Wärmefluss  $\bar{w}\bar{\theta}$
- vertikaler kinematischer advektiver Feuchtefluss  $\bar{w}\bar{q}$
- kinematischer advektiver Wärmefluss in x-Richtung  $\bar{u}\bar{\theta}$
- kinematischer advektiver horizontaler Impulsfluss (u)  $\bar{w}\bar{u}$   
in z-Richtung (vertikal)  
= kinematischer advektiver vertikaler Impulsfluss (w) in  
x-Richtung (horizontal)

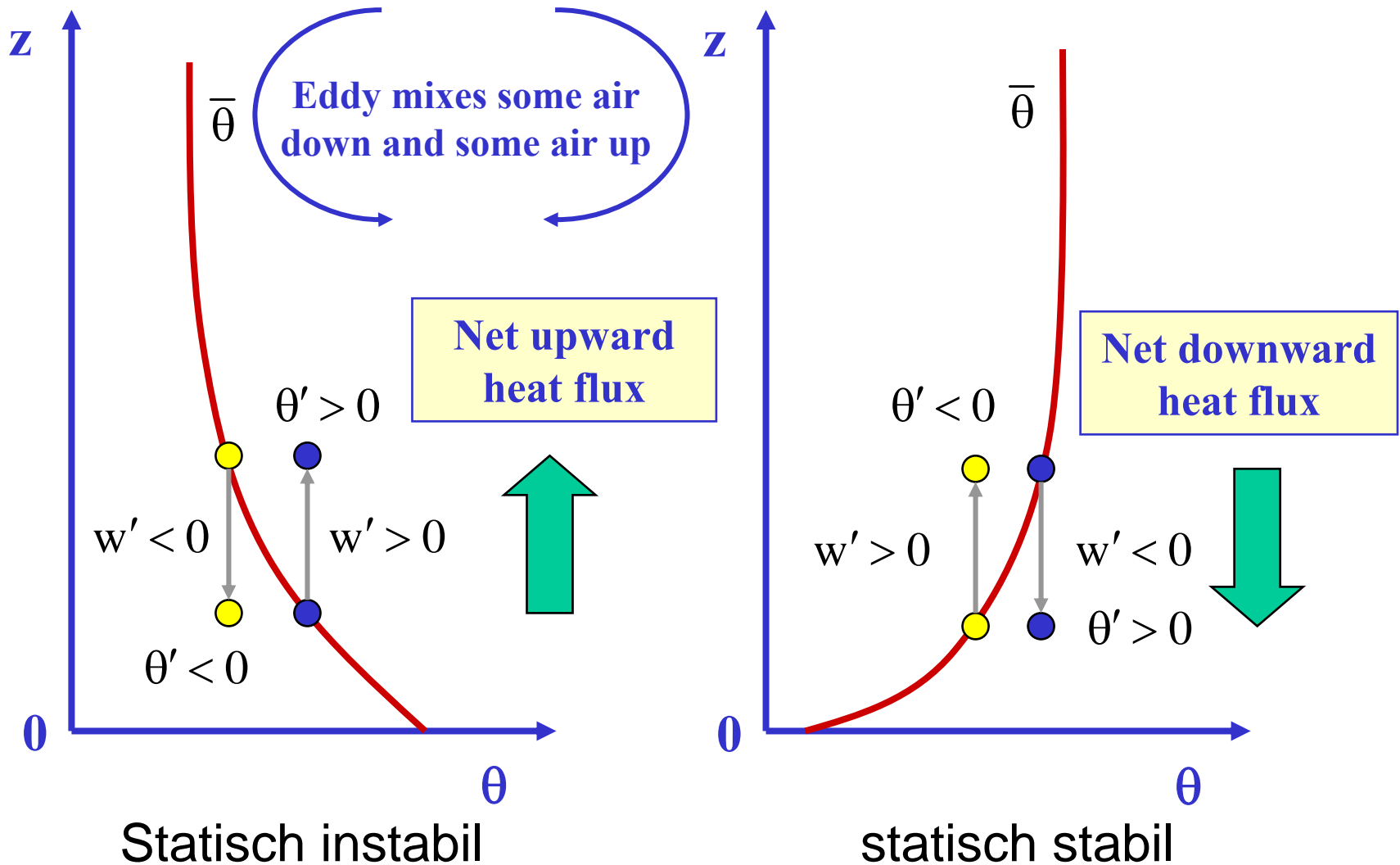
➤ Flüsse in anderen Richtungen können entsprechend ermittelt werden.



# Turbulenter Transport


- Bewegungen in Fluiden können (Zustands-) Größen (Variable) "transportieren", woraus sich Flüsse ergeben.
- Turbulenz ist ein Bestandteil der Bewegung.
- Daraus ergibt sich, dass auch Turbulenz Größen transportiert.
- Ein Term wie  $\overline{w'\theta'}$  sieht einem kinematischen Term basierend auf mittleren Werten (siehe oben) ähnlich, außer dass die Störterme anstelle der mittleren Werte von  $w$  und  $\theta$  verwendet werden.
- Wenn Turbulenz vollständig zufällig ist, kann ein positives  $w'\theta'$  in einem Augenblick ein negatives  $w'\theta'$  zu einem späteren Moment auslöschen und für den mittleren turbulenten Wärmefluss zu einem Wert nahe Null führen.

- Es gibt Situationen, wo der mittlere turbulente Fluss  $\overline{w'\theta'}$  möglicherweise signifikant von Null verschieden ist.



# Turbulenter Transport

- Beachte, dass Turbulenz Wärme transportieren kann, d.h.  $\overline{w'\theta'} \neq 0$ , obwohl es keinen Massentransport gibt, d.h.  $\overline{w'} = 0$ !
- Diese Form der Flüsse markiert die statistische Form der Turbulenz: Ein Fluss wie  $\overline{w'\theta'} \neq 0$  ist lediglich eine statistische Kovarianz.

- vertikaler kinematischer turbulenter Wärmefluss  $\overline{w'\theta'}$
- vertikaler kinematischer turbulenter Feuchtefluss  $\overline{w'q'}$
- kinematischer turbulenter Wärmefluss in x-Richtung  $\overline{u'\theta'}$
- kinematischer turbulenter horizontaler Impulsfluss (u)  $\overline{w'u'}$   
in z-Richtung (vertikal)   
= kinematischer turbulenter vertikaler Impulsfluss (w)  
in x-Richtung (horizontal).

# Turbulenter Transport

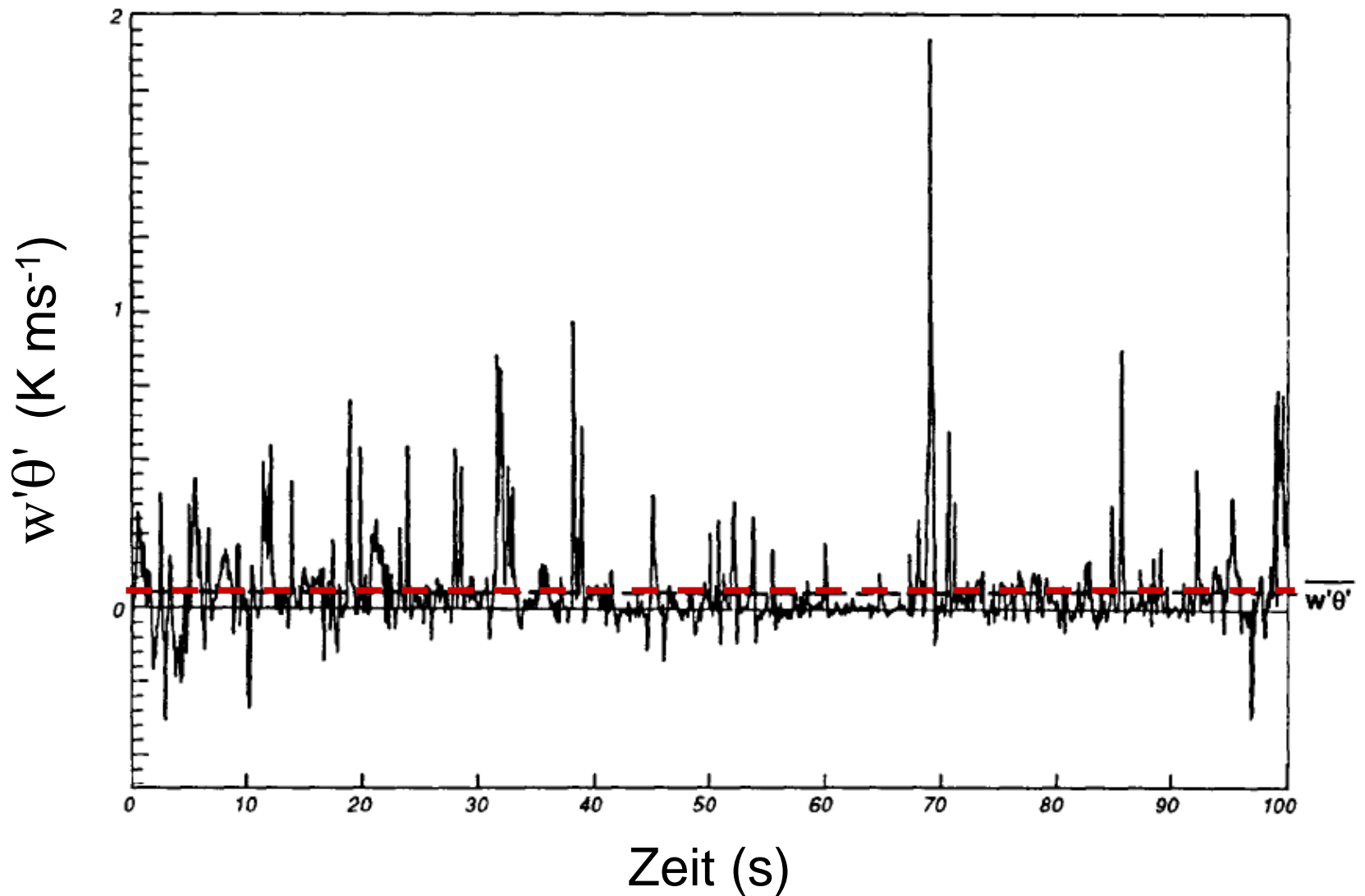
- Wichtig: In der GS gilt größtenteils  $\overline{w} \cong 0$ !
- Dadurch sind die vertikalen advektiven Flüsse im Vergleich mit den vertikalen turbulenten Flüssen in der Regel vernachlässigbar.
- Eine vergleichbare Aussage kann für die horizontalen Flüsse nicht getroffen werden. Starke mittlere horizontale Winde und starke Turbulenz können jeweils Flüsse in der gleichen Größenordnung verursachen.

# Turbulenter Transport

- Turbulenz in der realen Atmosphäre besteht normalerweise aus vielen großen positiven und negativen Werten der momentanen Flüsse, wie z.B. der Wärmefluss  $w'\theta'$ .
- Erst nach entsprechender Mittelung wird ein kleiner aber signifikanter Nettowärmefluss  $\overline{w'\theta'}$  offensichtlich.



Beispiel



Vom Flugzeug aus gemessener kinematischer Wärmefluss  $w'\theta'$  am Erdboden. Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet den mittleren Wärmefluss  $\overline{w'\theta'}$ .

# Spannung

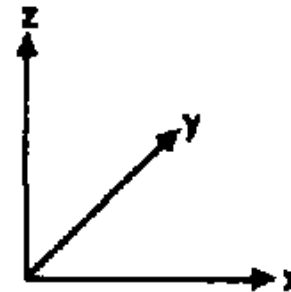
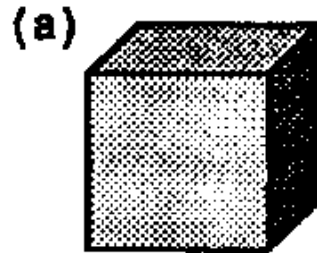
- Es wurde soeben gezeigt, dass die Kovarianz einen turbulenten Fluss beschreibt. Aber ein Impulsfluss ist auch analog zu einer Spannung (Belastung).
- Spannung ist eine Kraft, die versucht einen Körper zu verformen.
- Sie wird gemessen als Kraft pro Einheitsfläche.
- Drei Typen von Spannung müssen berücksichtigt werden:
  - Druck,
  - Reynolds Spannung und
  - viskose Scherspannung.



# Druck

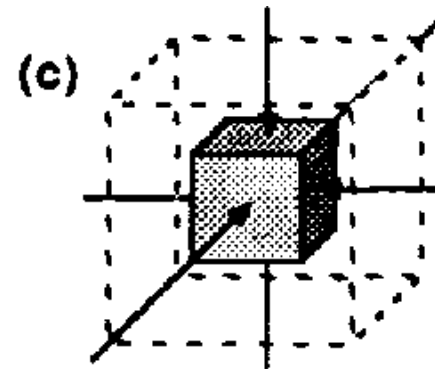
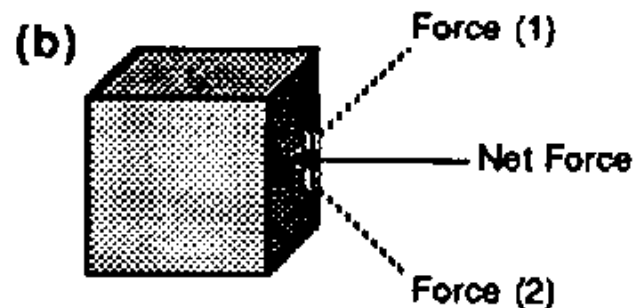
- Druck ist isotrop (von der Richtung unabhängig) und deshalb eine skalare Größe.

Anfangszustand



Druck

Wirkung auf einen Würfel



Die Kraft wirkt senkrecht auf die Flächen  $\Rightarrow$  Kompression oder Expansion



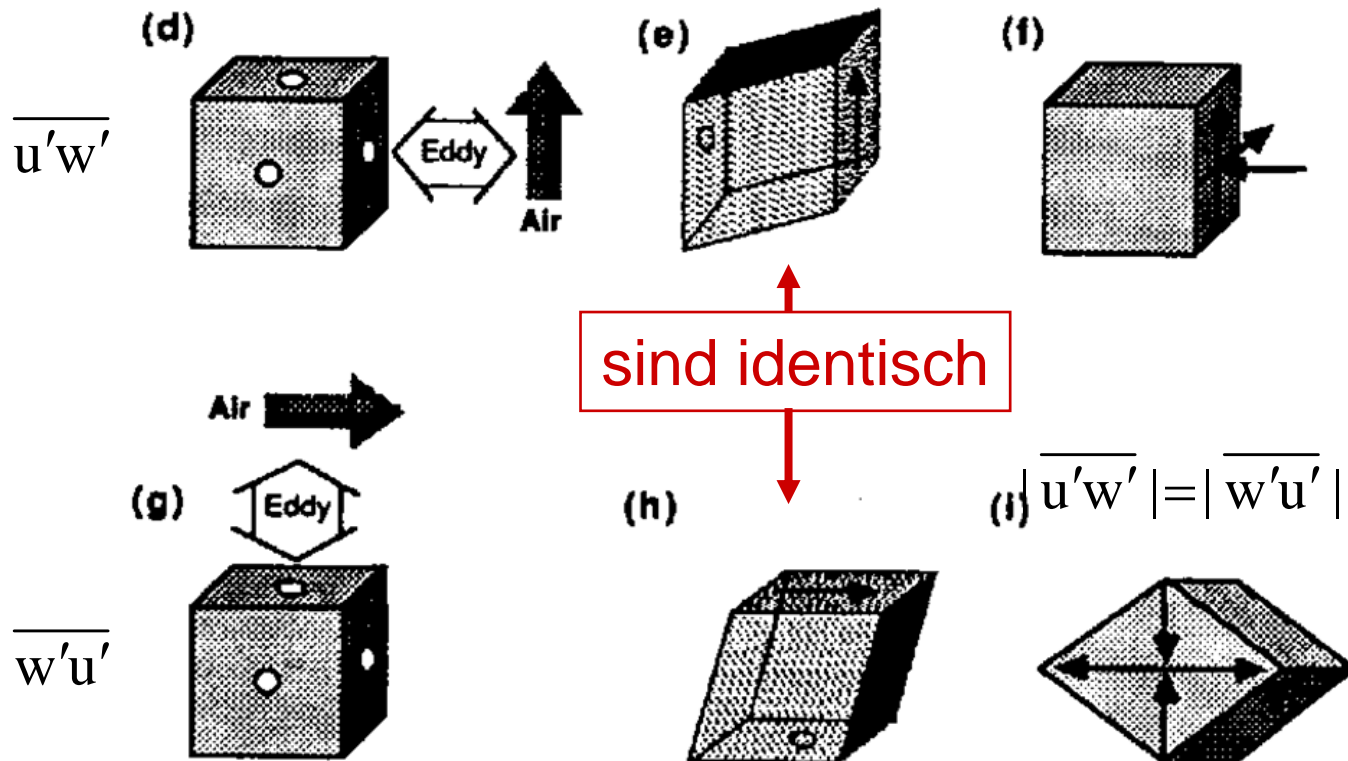
# Reynolds Spannung

- Turbulenter Impulsfluss wirkt wie eine Spannung (Belastung) und wird Reynolds Spannung  $\tau_{\text{Reynolds}}$  genannt.
- Es ist keine "richtige" Spannung mit Einheiten Kraft pro Einheitsmasse.

# Reynolds Spannung

- Reynolds Spannung existiert nur, wenn sich die Flüssigkeit oder das Gas in turbulenter oder wellenförmiger Bewegung befindet! Der Reynolds Spannungstensor ist symmetrisch.

Reynolds Spannung: Einfluss auf einen Würfel

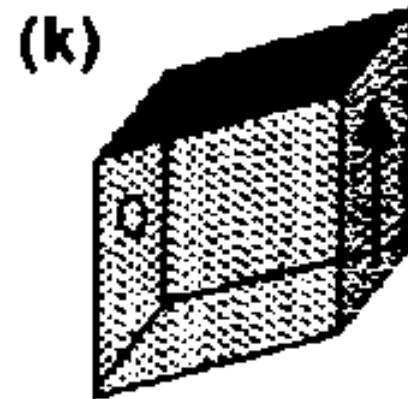
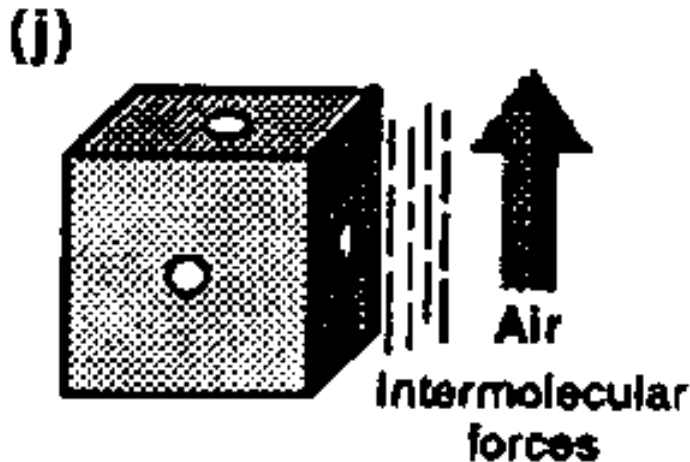


# Viskose Scherspannung

- Viskose Scherspannung existiert, wenn es in einem Fluid eine Scherbewegung gibt. Diese Bewegung kann laminar oder turbulent sein.

Viskose Scherspannung

Wirkung auf einen Würfel



- In diesem Fall sind molekulare Bewegungen für den Transport von Impuls verantwortlich und nicht turbulente Eddies. Dies ist der wesentliche Unterschied zur Reynolds Spannung.

# Viskose Scherspannung

- Ein Fluid, für das die viskose Scherspannung linear abhängig ist von der Scherung (Deformation), wird ein 'Newton'sches Fluid' genannt. Die Spannung  $\tau_{ij}$  ist gegeben durch:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left( \mu_B - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ für } i=j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \end{array}$$

Dynamischer  
Viskositätskoeffizient

'Bulk' (Volumen)  
Viskositätskoeffizient

$\mu_B$  ist nahe Null für die meisten Gase

- $\tau_{ij}$  wird interpretiert als Kraft pro Einheitsmasse in der  $x_i$ -Richtung, die auf eine Fläche wirkt, die senkrecht zur  $x_j$ -Richtung ist.

# Viskose Scherspannung

- Die viskose Scherspannung kann in die kinematische Form gebracht werden (Division durch  $\rho$ ): Die kinematische Viskosität ist gegeben durch  $\nu = \mu/\rho$ .
- Der Standardwert für Luft (auf Meeresebene) ist  $\nu = 1.4607 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .
- Für eine mittlere Windscherung von  $du/dz = 0.5 \text{ s}^{-1}$  (typischer Wert für atmosphärische Bodenschichten) ist die resultierende viskose Scherspannung  $\mu/\rho = 7.304 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ .

# Viskose Scherspannung

- Dieser Wert ( $\mu/\rho = 7.304 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ) ist in der GS um soviel kleiner als die Reynolds Spannung, dass die viskose Scherspannung in der Regel zur Vorhersage des mittleren Windes vernachlässigt werden kann. Dennoch können turbulente Eddies lokal (d.h. in Regionen, die von der Größe eines Eddies sind) große Scherungswerte aufweisen. Deshalb kann man die Viskosität nicht vernachlässigen, wenn man Turbulenz vorhersagen will.

# Reibungsgeschwindigkeit

- In Situationen, wo Turbulenz in Bodennähe durch Windscherung angeregt oder moduliert wird, erweist sich die Größe der bodennahen Reynolds Spannung als wichtige Skalierungsvariable.
- Nahe der Erdoberfläche ist der gesamte vertikale Fluss von horizontalem Impuls gegeben durch:

$$\tau_{xz} = -\bar{\rho}_s \overline{u'w'}|_s \quad \text{und} \quad \tau_{yz} = -\bar{\rho}_s \overline{v'w'}|_s$$

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad ( = |\tau_{\text{Reynolds}}|_s )$$

Definiere eine Reibungsgeschwindigkeit  $u_*$  (am Boden) durch:

$$u_*^2 = |\boldsymbol{\tau}_s| / \bar{\rho}_s = \sqrt{(\overline{u'w'})_s^2 + (\overline{v'w'})_s^2}$$

# Reibungsgeschwindigkeit und andere Größen an der Erdoberfläche

- Für den Spezialfall, indem das Koordinatensystem so ausgerichtet ist, dass die x-Achse in Richtung der Spannung am Erdboden zeigt, kann man die Reibungsgeschwindigkeit wie folgt schreiben:

$$u_*^2 = \left| \overline{u'w'} \right|_s = \left| \boldsymbol{\tau}_s \right| / \bar{\rho}$$

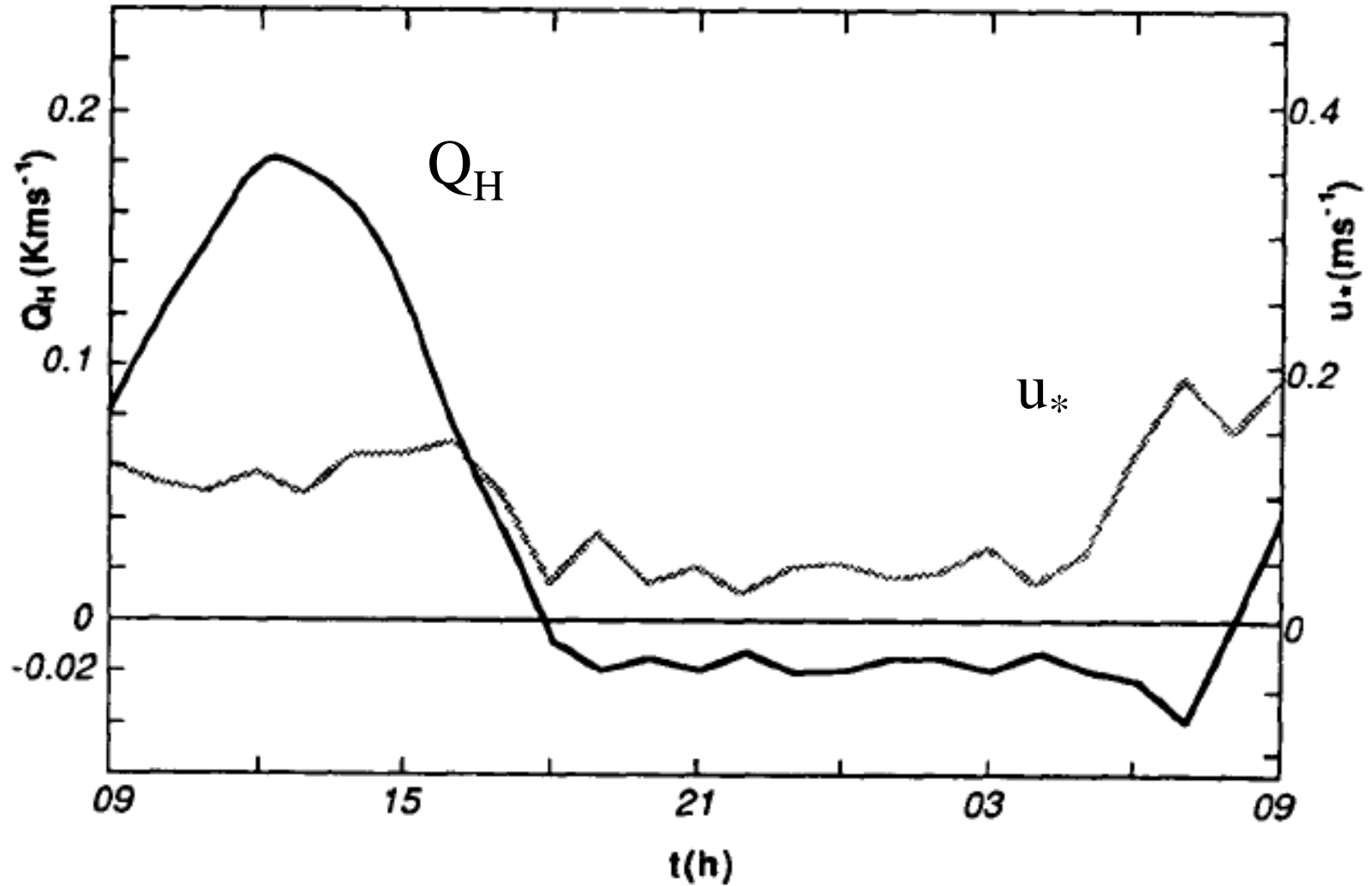
- Ganz ähnlich kann man die Temperatur  $\theta_*^{SL}$  und die spezifische Feuchte  $q_*^{SL}$  der Bodenschicht (SL) definieren durch:

$$\theta_*^{SL} = \frac{\overline{-w'\theta'}|_s}{u_*}$$

$$q_*^{SL} = \frac{\overline{-w'q'}|_s}{u_*}$$



# Tagesgang der Reibungsgeschwindigkeit und des kinematischen Wärmeflusses





**Ende Kapitel 2**

# Kapitel 3:

## Anwendung der grundlegenden Gleichungen auf turbulente Flüsse



# Inhalt

- Gleichungen für turbulente Flüsse, spezielle Probleme
- Grundlegende Gleichungen, Interpretation der Terme
- Bearbeitung der Zustandsgleichung
- Approximation flacher Konvektion
- Flussform der Advektionsterme
- Horizontale Homogenität
- Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen
- Beispiele
- Stationäre, horizontal homogene Flüsse

# Gleichungen für turbulente Flüsse

- Um den Zustand der Grenzschicht quantitativ zu beschreiben und vorherzusagen, muss man die Grundgleichungen der Strömungsdynamik betrachten.
  - Diese sind:
    - die Kontinuitätsgleichung,
    - die Bewegungs- (Impuls-) Gleichung (2. Newton'sches Gesetz),
    - die Thermodynamische Gleichung,
    - die Gleichung für Feuchte,
    - die Zustandsgleichung.
- ⇒ Fünf Gleichungen bilden die Grundlage der Grenzschichttheorie!



# Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

- Im Prinzip könnten diese Gleichungen direkt auf turbulente Flüsse angewendet werden, aber dies ist generell zu kompliziert.
- Um die Anfangsbedingungen zu bestimmen kann man nicht alle turbulenten Skalen herunter bis zu den kleinsten Störungen (Eddies) auflösen.
- Anstelle dessen "schneidet" man zur Vereinfachung bei einer bestimmten Eddy-Größe (Skala) ab, unterhalb derer man nur den statistischen Effekt der Turbulenz betrachtet.
- In einigen mesoskaligen und synoptisch-skaligen Modellen findet dieses "Abschneiden" bei etwa 10 bis 100 km statt, während für einige GS-Modelle (bekannt als 'Large Eddy Simulation Models', LES models) bei etwa 100 m abgeschnitten wird.

# Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

- Der komplette Satz von Gleichungen in der Grenzschichttheorie ist so komplex, dass keine analytische Lösung bekannt ist. Man muss deshalb nach Annäherungen und Approximationen suchen.
- Wir suchen daher
  - exakte analytische Lösungen von vereinfachenden Untermengen der Gleichungen oder
  - numerische Annäherungen eines vollständigeren Satzes der Gleichungen.
- Man beginnt mit der Formulierung von Gleichungen, die statistisch gemittelte Bedingungen für kleine Störungen (Eddies) darstellen.
- Im folgenden werden keine numerischen Methoden zur Lösung dieser Gleichungen behandelt!

# Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

## (Wiederholung von Kapitel 2)

- Es gibt eine sehr einfache Weise die großskaligen von den turbulenten Bewegungen zu trennen: Durch die Mittelung der Windgeschwindigkeitsmessungen über eine Periode von 30 Minuten bis zu 1 Stunde kann man die positiven und negativen Abweichungen der turbulenten Geschwindigkeiten eliminieren (heraus mitteln).

➤ Sei

$$u = \bar{U} + u'$$

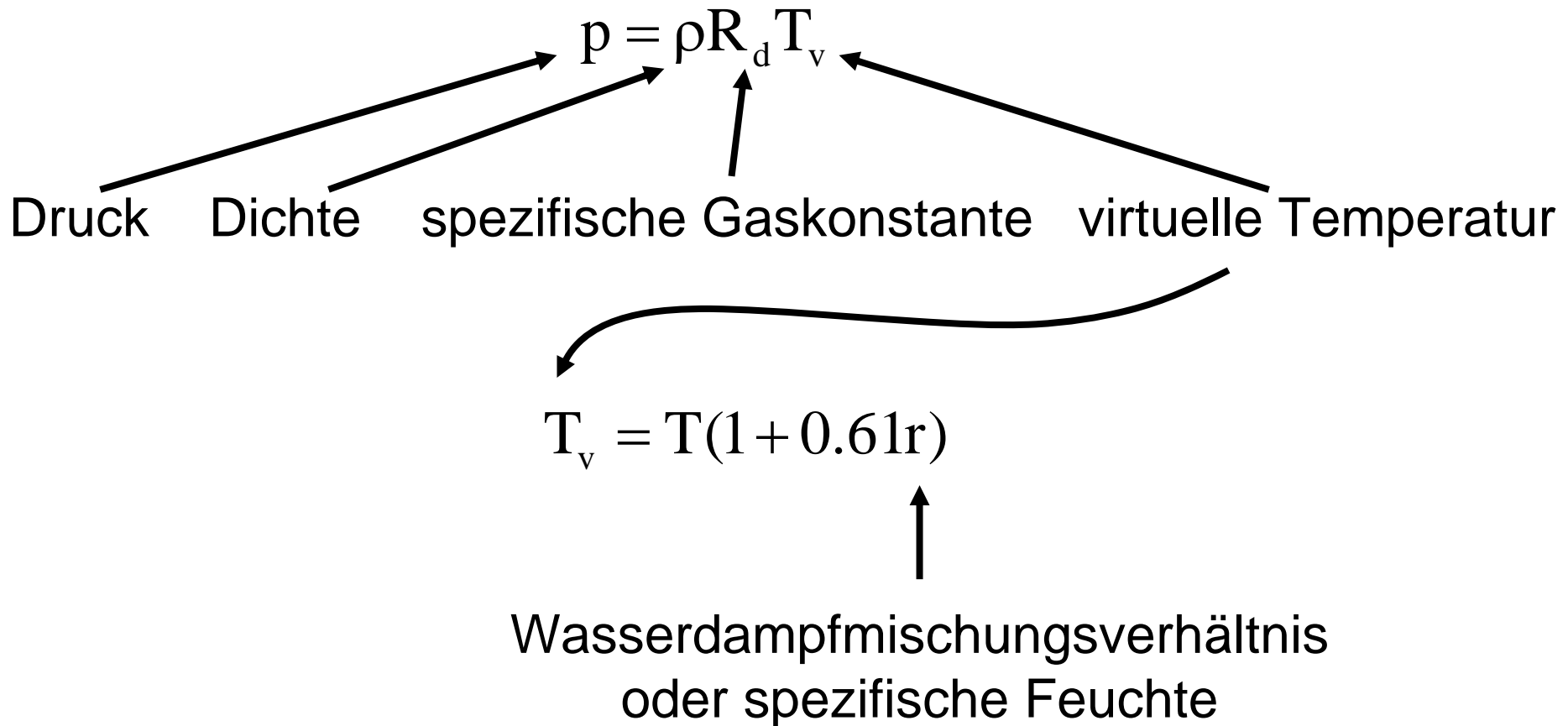
momentaner Wind    mittlerer Wind    turbulenter Anteil

- $u'$  enthält die Variationen von  $\leq 1$  Stunde.
- Die Existenz der spektralen Lücke erlaubt die Unterteilung einer Bewegung in dieser Weise.



# Bestimmungsgleichungen (1)

- Zustandsgleichung (ideales Gasgesetz für feuchte Luft)




## Bestimmungsgleichungen (2)


- Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse)

Flussform 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

gewöhnliche Form 
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$


Boussinesq Form\* 
$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} = 0$$


\* Approximation für inkompressible Medien: Diese Bedingung ist in der Regel für alle turbulenten Bewegungen erfüllt, die kleiner als die Mesoskale (d.h. kleiner 1-10 km) sind.

## Bestimmungsgleichungen (3)

- Impulserhaltung (2. Newton'sches Gesetz)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

I

II

III

IV

V

VI

- Term I**      Änderungsrate des Impulses (Trägheit)  
**Term II**      Advektion des Impulses  
**Term III**     Druckgradientkraft  
**Term IV**     Schwerkraft (nur in z-Richtung)  
**Term V**      Corioliskraft  
**Term VI**     viskoser Spannungsterm

## Bestimmungsgleichungen (4)

Term VI  $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \right\}$$

Angenommen  $\mu$  ist keine Funktion des Ortes, dann folgt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \right\}$$

Für inkompressible Fluide gilt (siehe oben Boussinesq Form):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

$\mu$ : Viskositätskoeffizient  
 $\nu$ : kinematische Viskosität

## Bestimmungsgleichungen (5)

- Impulserhaltung: Aus vorheriger Formel  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3} g - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

- Dies ist gerade die Navier-Stokes Gleichung!
- Sie ist der Startpunkt für alle Herleitungen zur Beschreibung von Turbulenz!

# Bestimmungsgleichungen (6)

## ➤ Erhaltung der Feuchte (Wassergehalt)

$$\frac{\partial q_T}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_T}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\rho}$$

I                      II                      III                      IV

Netto Wasserquelle

Molekulare Diffusivität von Wasserdampf in der Luft

$q_T$  ist die gesamte spezifische Feuchte von Luft  
= Gesamtmasse von Wasser (alle Phasen).

- Term I**      lokale Änderungsrate des Wassergehalts
- Term II**      Advektion des Wassergehalts
- Term III**     Diffusion von Wasserdampf (spezifische Feuchte  $q$ )
- Term IV**      Netto Quelle des Wassergehalts

## Bestimmungsgleichungen (7)

Wähle  $q_T = q + q_L$  und  $S_{q_T} = S_q + S_{q_L}$

T: Total

L : Liquid (flüssig)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_j \frac{\partial q}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} + \frac{S_q}{\rho} + \frac{E}{\rho}$$

E = Verdampfungsrate von Flüssigwasser (negativer Wert = Kondensation; positiver Wert = Verdampfung)

$$\frac{\partial q_L}{\partial t} + u_j \frac{\partial q_L}{\partial x_j} = \frac{S_{q_L}}{\rho} - \frac{E}{\rho}$$

I

II

III

IV

V

**Term IV** Konvergenz von Wasser (Niederschlag), der nicht mit dem Wind advehiert (Term III) wird.

**Term V** Umwandlung von Wasser/Eis in Gasphase

Molekulare Diffusion hat einen vernachlässigbaren Effekt auf den Niederschlag von Wasser (flüssig, fest) bzw. Wolkenteilchen.

# Bestimmungsgleichungen (8)

- Erhaltung von Wärme (1. Gesetz der Thermodynamik)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = v_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial Q_j^*}{\partial x_j} - \frac{LE}{\rho c_p}$$

I            II            III            IV            V

L = latente Wärme im Zusammenhang mit der Phasenänderung E.  
v<sub>θ</sub> = therm. Diffusivität

Q<sub>j</sub><sup>\*</sup> ist die Komponente der Netto-Strahlung in j-Richtung.

- Term I**    Änderungsrate der potentiellen Temperatur
- Term II**    Advektion der potentiellen Temperatur
- Term III**    Effekt der molekularen Diffusion von Wärme
- Term IV**    Effekt der Strahlungsflussdivergenz
- Term V**    Effekt des Verbrauchs latenter Wärme beim Verdampfen



# Bestimmungsgleichungen (9)

- Erhaltung einer skalaren Größe

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = v_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j^2} + S_c$$

I                  II                  III                  IV

c ist eine skalare Konzentration (pro Einheitsmasse Luft).

**Term I**    Änderungsrate der skalaren Größe

**Term II**    Advektion der skalaren Größe

**Term III**    Effekt der molekularen Diffusion des Skalars

**Term IV**    Quelle der skalaren Größe

# Bearbeitung der Zustandsgleichung

Wähle  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ ,  $T_v = \bar{T}_v + T'_v$ ,  $p = \bar{p} + p'$

$$p = \rho R T_v \quad \longrightarrow \quad \bar{p} + p' = R (\bar{\rho} + \rho') (\bar{T}_v + T'_v)$$

$$\bar{p} + p' = R (\bar{\rho} \bar{T}_v + \rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho' T'_v)$$

Anwendung der  
Reynolds-Mittelung

$$\bar{p} = R (\bar{\rho} \bar{T}_v + \overline{\rho' T'_v})$$

klein!

$$\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T}_v$$

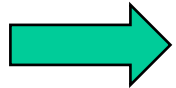
Ähnlich Annahmen können auch für die anderen Grundgleichungen gemacht werden!

# Bearbeitung der Zustandsgleichung

$$\bar{p} + p' = R \left( \bar{\rho} \bar{T}_v + \rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho'_v T'_v \right) \quad (1)$$

$$\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T}_v \quad (2)$$

(2) - (1)



$$p' = R \left( \rho' \bar{T}_v + \bar{\rho} T'_v + \rho'_v T'_v \right)$$

: (2)



$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} + \frac{\rho'_v T'_v}{\bar{\rho} \bar{T}_v}$$

ist klein unter der Annahme, dass Störterme  $x'$  klein sind im Vgl. mit den Mittelwerten.



$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

Ideales Gasgesetz für linearisierte Störungen

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

- Stationäre Druckänderungen (H-, T-Druck) sind verbunden mit Variationen der Luftmasse (von Säule zu Säule).
- Für die größeren Wirbel (Eddies, Thermals) in der GS betragen diese Fluktuationen etwa 0.1 hPa, während für die kleineren Störungen die Effekte kleiner sind.
- Fluktuationen der Windgeschwindigkeit von  $\approx 10 \text{ m s}^{-1}$  verursachen ebenso dynamische Druckänderungen von etwa 0.1 hPa.
- Demnach gilt in der GS meistens

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{10 \text{ Pa}}{10^5 \text{ Pa}} = 10^{-4} \quad \text{verglichen mit} \quad \frac{T'_v}{\bar{T}_v} = \frac{1 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 3.3 \times 10^{-3}$$

$\Leftrightarrow p' \ll \bar{p}$

# Approximation der flachen Konvektion

$$\frac{\cancel{p'}}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

$$\quad \longrightarrow \quad \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}$$

- Luft die wärmer ist als das Mittel, ist weniger dicht als das Mittel.
- Diese Gleichungen erlauben es uns, Temperaturfluktuationen, die leicht zu messen sind, anstelle von Dichtefluktuationen zu verwenden, die schwierig zu messen sind.

# Flussform des Advektionsterms

$$\text{Advektionsterm} = u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$$

$\xi$ : jede abhängige Variable  
(z.B. Wind, Feuchte, etc.)

$$= u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \xi \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Produktregel 

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Kontinuitätsgl.


$$\text{Flussform des Advektionsterms} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \xi)$$

Dies ist ein kinematischer Fluss (s. Kap. 2)

# Impulserhaltung

Nur vertikale Komponente vom Impuls (nehme  $x_3 = z$ ,  $u_3 = w$ ):

$$\frac{Dw}{Dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \quad \text{behandle } \nu, \mu \text{ als konstant}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$


$$(\bar{\rho} + \rho') \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g(\bar{\rho} + \rho') - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

Division durch  $\bar{\rho}$  und umsordieren ergibt:

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} \right)$$

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} \right)$$

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T'_v}{T_v} \approx 3.3 \times 10^{-3} \quad (\text{siehe oben})$$

Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichts im mittleren Zustand:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \bar{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \text{letzter Term in obiger Gleichung entfällt}$$

$$\frac{D(\bar{w} + w')}{Dt} = -g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

Dieser Term kann nicht vernachlässigt werden.  $\Rightarrow$

Boussinesq Approximation:

$$-g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx g \frac{\theta'_v}{\theta_v}$$



$$-g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx g \frac{\theta'_v}{\theta_v}$$

Praktische Anwendung der Boussinesq Approximation  
(wichtig für später):

Eine Voraussetzung für ihre Gültigkeit ist, dass die  
Bedingungen für die flache Konvektion erfüllt sind.

Dann kann man in den originalen Bestimmungsgleichungen

$\rho$  durch  $\bar{\rho}$  und  $g$  durch  $(g - g \frac{\theta'_v}{\theta_v})$  ersetzen.

- Obwohl das Absinken ( $\bar{w}$ ) von Luft sowohl für die Massenerhaltung als auch für die Advektion von oben wichtig ist, ist es in der Impulsgleichung von geringerer Bedeutung.
- Bei Schönwetterbedingungen in der GS kann der Wert zwischen 0 to 0.1 m s<sup>-1</sup> variieren. Dies ist klein gegenüber dem Wert  $w'$ , der in der Regel zwischen 0 und 5 m s<sup>-1</sup> variiert. Nur für die Impulsgleichung kann man daher schreiben:

$$\bar{w} \equiv 0$$

$$\frac{Dw'}{Dt} = g \frac{\theta'_v}{\theta_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}$$

vertikale Komponente der Impulsgleichung

$$\bar{w} \equiv 0$$

$$\underline{\frac{Dw'}{Dt}} = g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}$$

Physikalische Interpretation:

- Luft, die wärmer ist als das Mittel, wird nach oben beschleunigt (rot unterstrichener Teil der Gleichung).
- Die beiden letzten Terme repräsentieren den Effekt des vertikalen Druckgradienten und der viskosen Spannung auf die Bewegung.
- Diese Gleichung ist bedeutend für die Beschreibung von konvektiven Vorgängen, z.B. Thermals.

# Impulserhaltung

Horizontale Komponente (nehme  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ). Obwohl die Winde in der GS selten geostrophisch sind, kann man die Definition des geostrophischen Windes benutzen, um die horizontalen Druckgradientterme zu substituieren.

Definition des geostrophischen Windes:  $f(u_g, v_g) = \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$

Somit

$$\frac{Du}{Dt} = -f(v_g - v) + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \underline{f(u_g - u)} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

Ageostrophischer Wind

# Kombinierte Impulsgleichung

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(u_{gj} - u_j) - \delta_{i3} \left[ g \frac{\theta'_v}{\theta_v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} \right] + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Hier wurden folgende Annahmen getroffen: flache Konvektion, Inkompressibilität, hydrostatische und Boussinesq Approximation; ferner wurde angenommen:

$$\mathbf{u}_{gj} = (u_g, v_g, 0) .$$

# Horizontale Homogenität

Entwicklung der totalen Ableitung einer beliebigen mittleren Variable:

$$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t} + u \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} + w \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial z}$$

- In Kap. 1 und 2 wurde gezeigt, dass gemittelte Variable wie  $\theta$  oder turbulente KE in der vertikalen starke Variationen über 1-2 km der GS zeigen, aber eine deutlich geringere Variabilität in der Horizontalen über Skalen von ebenfalls 1-2 km.
- Dem steht entgegen, dass  $|w| \ll |(u,v)|$  ist.
- $\Rightarrow$  alle vier Terme auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind für viele Fälle nahezu gleich groß.



# Horizontale Homogenität

- Die Grundvoraussetzung bei vielen Betrachtungen ist, dass man üblicherweise die horizontalen Advektionsterme nicht vernachlässigen kann, da sie die Bewegung (zeitliche Veränderungen) von Erhaltungsgrößen stark beeinflussen.
- Manchmal jedoch wird in der Mikrometeorologie mehr Wert auf Turbulenzeffekte als auf Advektion gelegt, d.h. Effekte durch die mittlere Advektion werden auf Kosten von Turbulenzeffekten vernachlässigt.

# Horizontale Homogenität

- Unter der Annahme horizontaler Homogenität kann man annehmen:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} = 0$$

- Vernachlässigung des Absinkens von Luft ergibt  $\bar{w} = 0$ .
- Obwohl diese Annahmen häufig gemacht werden, um die Ableitungen zu vereinfachen, sind sie in der Atmosphäre nur selten gültig.
- Wenn die Annahmen gemacht werden, verschwinden die mittleren Größen in den Advektionstermen und die wichtigen turbulenten Flussterme bleiben übrig.



# Neuausrichtung und Rotation des Koordinatensystems

- Meistens wird ein kartesisches Koordinatensystem benutzt, in dem die  $(x,y,z)$  Achsen in Richtung (Ost, Nord, nach oben) zeigen.
- Manchmal ist es angebracht, die Achsen um die vertikale ( $z$ -) Achse zu drehen, so dass die  $x$ - und die  $y$ -Achse in andere Richtungen zeigen. Die  $x$ -Achse wird unter anderem ausgerichtet nach
  - der mittleren Windrichtung,
  - der Richtung des geostrophischen Windes,
  - der Richtung der Spannung am Erdboden oder
  - senkrecht zu Küstenlinien und Bergrücken.
- Grund dafür ist die Vereinfachung einiger Terme in den Bestimmungsgleichungen.

# Gleichungen für mittlere Variable in einem turbulenten Fluss

Es wird angenommen, dass die Zustandsgleichung auch für mittlere Zustände gilt:

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

Kontinuitätsgleichung für turbulente Bewegungen:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \xrightarrow{\text{zeitl. Mittel}} \quad \overline{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}_{= 0 \text{ (Reynolds Regeln der Mittelbildung)}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

Man kann den turbulenten Teil des Advektionsterm in Flussform schreiben genau wie oben den allgemeinen Advektionsterm.

# Impulserhaltung

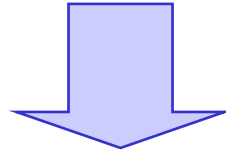
Impulserhaltung (Gleichung siehe oben) verbunden mit der Boussinesq Approximation ergibt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f u_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} - \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Zerlegung der abhängigen Variablen in mittlere und turbulente Anteile, außer wo schon geschehen ( $p; \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ij3} f (\bar{u}_j + u'_j) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} \\ &- \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

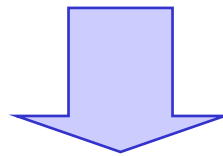
$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f(\bar{u}_j + u'_j) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + v \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2}$$



$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} \bar{f} u_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\theta_v} \right] + v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}$$



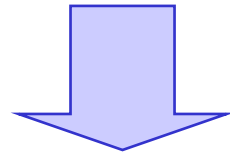
Reynolds Mittelung  
der Gleichung

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}} + \cancel{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial t}}} + \bar{u}_j \overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \bar{u}_j \cancel{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}} + \cancel{\overline{u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \overline{\varepsilon_{ij3} \bar{f} u_j} + \cancel{\overline{\varepsilon_{ij3} f u'_j}}$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \cancel{\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}}} - \delta_{i3} \bar{g} - \cancel{\delta_{i3} \bar{g} \frac{\theta'_v}{\theta_v}} + v \overline{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} + v \cancel{\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Abschließend Multiplikation der Kontinuitätsgleichung für turbulente Bewegungen mit  $u'_i$ ; Mittelung derselben, um den turbulenten Advektionsterm in Flussform zu erhalten; diesen Term auf die rechte Seite der Gleichung:



$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \underline{\underline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}}}$$

Beachte, dass die Bestimmungsgleichung für den mittleren Wind sehr ähnlich ist zu der ursprünglichen Erhaltungsgleichung, außer dem letzten Term! Dieser macht den Unterschied bei der Betrachtung turbulenter Flüsse.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

**Term I** Änderungsrate des mittleren Impulses

**Term II** Advektion des mittleren Impulses durch den mittleren Wind

**Term III** Corioliskraft

**Term IV** mittlere Druckgradientkraft

**Term V** Schwerkraft

**Term VI** Einfluss der viskosen Scherspannung auf die mittlere Bewegung

**Term VII** repräsentiert den Einfluss der Reynolds Spannung auf die mittlere Bewegung. Dieser Term kann interpretiert als Divergenz des turbulenten Impulsflusses.

# Turbulenter Impulsfluss

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\overline{\partial(u'_i u'_j)}}{\partial x_j}$$

Man kann diesen Term wie folgt umschreiben  
(oft wird er auch mit F (für 'friction')  
abgekürzt):

$$-\frac{\overline{\partial(u'_i u'_j)}}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{wobei} \quad \tau_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j}$$

Folgerung: Turbulenz muss bei der Bestimmung der turbulenten GS berücksichtigt werden, auch wenn man nur mittlere Größen berechnen will. Dieser Term kann im Vergleich mit den anderen Termen von der gleichen Größenordnung sein oder sogar größer.



## Erhaltung der Feuchte

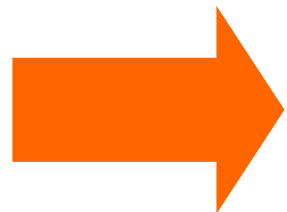
Auch hier Aufspaltung in mittlere und turbulente Anteile,  
Annahme der Inkompressibilität:

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \frac{\partial q'_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} =$$

$$v_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + v_q \frac{\partial^2 q'_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}}$$

Wieder Mittelung der Gleichung  
(nach Reynolds), Gebrauch der  
turbulenten Kontinuitätsgleichung,  
um den turbulenten Advektions-  
term in Flussform zu erhalten:

Mittlerer  
Quellterm



$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = \nu_q \frac{\partial^2 \bar{q}_T}{\partial x_j^2} + \frac{S_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

I
II
III
IV
V

- Term I** Änderungsrate des mittleren Gesamtwassergehalts
- Term II** Advektion des mittleren Gesamtwassergehalts durch den mittleren Wind
- Term III** molekulare Diffusion von Wasserdampf
- Term IV** mittlerer Quellterm des gesamten Wassergehalts
- Term V** Divergenz des turbulenten Wasserdampfflusses

Ähnliche Gleichungen erhält man für den Dampfanteil ( $q$ ) bzw. Wasseranteil ( $q_L$ ) der gesamten spezifischen Feuchte ( $q_T$ ).

## Erhaltung von Wärme

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \theta'_i}{\partial x_j}} + \cancel{u_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \cancel{u'_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} =$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} - \cancel{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial Q_j^*}{\partial x_i}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} + \nu \cancel{\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2}} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p}$$

Vorgehensweise wie bisher

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

I
II
III
IV
V
VI

- Term I** Änderungsrate der potentiellen Temperatur (Wärme)
- Term II** Advektion von Wärme durch den mittleren Wind
- Term III** mittlerer Strahlungsdivergenzterm
- Term IV** Molekulare Wärmeleitung
- Term V** Quelle, die mit der Freisetzung von latenter Wärme verbunden ist
- Term VI** Divergenz des turbulenten Wärmeflusses

# Erhaltung einer skalaren Größe (Konzentration)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial c'}{\partial t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial c'}{\partial x_j}} + \cancel{u'_j} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \cancel{u'_j} \frac{\partial c'}{\partial x_j} =$$

$$v \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + v \cancel{\frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2}} + \underline{S_c}$$

Mittlerer  
Quellterm

Vorgehensweise wie bisher

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = v \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + \bar{S}_c - \frac{\overline{\partial(u'_j c')}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + \bar{S}_c - \frac{\partial(\overline{u'_j c'})}{\partial x_j}$$

I

II

III

IV

V

- Term I** Änderungsrate einer Spurenstoffkonzentration
- Term II** Advektion einer Spurenstoffkonzentration durch den mittleren Wind
- Term III** molekulare Diffusion einer Spurenstoffkonzentration
- Term IV** mittlerer Quellterm der Spurenstoffkonzentration
- Term V** Divergenz des turbulenten Flusses der Spurenstoffkonzentration

# Zusammenfassung – Vernachlässigung der Viskosität für mittlere Bewegungen

- In jeder der Erhaltungsgleichungen, außer in der Kontinuitätsgleichung, gibt es einen molekularen Diffusions-/Viskositätsterm.
- Messungen in der Atmosphäre belegen, dass der molekulare Diffusionsterm um einige Größenordnungen kleiner ist als die anderen Term und deshalb vernachlässigt werden kann.

# Zusammenfassung – Vernachlässigung der Viskosität für mittlere Bewegungen

- Daraus ergibt sich, dass der vorletzte Term in

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} - \frac{\overline{\partial(u'_i u'_j)}}{\partial x_j}$$

vernachlässigt werden kann!

Nach Durchführung der hydrostatischen Approximation sind alle Term von der gleichen Größenordnung außer dem Diffusionsterm, der um  $O(1/Re) \approx 10^{-7}$  kleiner ist als die anderen Terme, abgesehen von den untersten Zentimetern oberhalb der Erdoberfläche.

Einschub: Reynoldszahl  $Re = \mathbf{V} \mathbf{L} / \nu$  ( $\mathbf{V}$ : Geschwindigkeitsskala;  $\mathbf{L}$ : Längenskala;  $\nu$ : kinematische Viskosität)

$\mathbf{V} = 5 \text{ m/s}$ ;  $\mathbf{L} = 100 \text{ m}$ ;  $\nu_{\text{air}} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^{-1} \Rightarrow Re = 3 \times 10^7$   
(entspricht dem Verhältnis von Trägheits- zu viskosem Antrieb)



# Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (1)

- Vernachlässigung der molekularen Diffusion und Viskosität und Verwendung der hydrostatischen und der Boussinesq Approximation  $\Rightarrow$

$$\bar{p} = R\bar{\rho}\bar{T}_v$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = - f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\partial (\overline{u'_j u'})}{\partial x_j} \quad (\text{zonale K.})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = + f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \frac{\partial (\overline{u'_j v'})}{\partial x_j} \quad (\text{meridionale K.})$$

# Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (2)

$$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} = \frac{\bar{S}_{q_T}}{\bar{\rho}} - \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \left[ \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_j} + \text{LE} \right] - \frac{\partial(\overline{u'_j \theta'})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = \bar{S}_c - \frac{\partial(\overline{u'_j c'})}{\partial x_j}$$

- Beachte die Ähnlichkeit in der Struktur der insgesamt fünf Bestimmungsgleichungen. Der Kovarianzterm (d.h. der jeweils letzte Term) beleuchtet die Rolle der Statistik in turbulenten Flüssen.

# Zusammenfassung der mittleren Flussgleichungen (3)

- In den beiden Bewegungsgleichungen wurde die geostrophische Windkomponente durch den mittleren horizontalen Druckgradienten definiert:

$$\bar{u}_g = -\frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \bar{v}_g = \frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

- Zur Vereinfachung kann man schreiben :

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$$

wobei die totale Ableitung  $D/Dt$  nur die mittlere Advektion einschließt.

# Beispiele

- Für viele Anwendungen (Experimente) muss man lange warten, bis realistischere Anfangs- und Randbedingungen in der planetaren GS enthalten sind.
- Hier: Zwei Beispiele, die die Anwendung der mittleren Flussgleichungen zeigen:

## Problem 1

- Angenommen, dass der turbulente Fluss linear mit der Höhe gemäß  $\overline{w'\theta'} = a - bz$  abnimmt, mit  $a = 0.3 \text{ (K m s}^{-1}\text{)}$  und  $b = 3 \times 10^{-4} \text{ (K s}^{-1}\text{)}$ .
- Wenn das anfängliche Profil der potentiellen Temperatur eine beliebige Form aufweist, wie sieht das Profil eine Stunde später aus? Vernachlässige Absinken, Strahlung, latente Wärme und nehme horizontale Homogenität an.

## Lösung

Vernachlässigung von Absinken, Strahlung und latenter Wärme ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = - \frac{\partial \overline{(u'\theta')}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(v'\theta')}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{(w'\theta')}}{\partial z}$$

- Annahme der horizontalen Homogenität ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{(w'\theta')}}{\partial z}$$

- Ersetzen des Ausdrucks für  $\overline{(w'\theta')}$  ergibt  $\partial \bar{\theta} / \partial z = b$ .
- Dieser ist unabhängig von  $z$ , so dass sich die Luft in jeder Höhe der Umgebung mit der selben Rate erwärmt. Integration ergibt:

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(t_0) + b(t - t_0)$$

In einer Stunde ist die Erwärmung  $3 \times 10^{-4} \text{ (K/s)} \times 3600 \text{ (s)} = 1.08 \text{ K}$ .

## Problem 2

- Wenn ein horizontaler Wind von  $10 \text{ m s}^{-1}$  trockenere Luft in ein Gebiet advehiert mit einem horizontalen Feuchtegradient von  $5 \text{ g Wasser pro kg Luft pro } 100 \text{ km}$ , welcher vertikaler Gradient des turbulenten Feuchteflusses in der GS ist erforderlich, um ein Gleichgewichtsprofil der spezifischen Feuchte zu erhalten?
- Annahme, dass alles Wasser gasförmig vorliegt und dass es keine Quellen und Senken gibt.

**Lösung** (zur Vereinfachung ist die x-Achse in Richtung des mittleren Windes)

Gleichgewicht  $\Rightarrow \partial(\quad)/\partial t = 0 \Rightarrow$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = - \frac{\overline{\partial(u'q')}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial(v'q')}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial(w'q')}}{\partial z}$$

- Keine Information war gegeben über Absinken oder den horizontalen Flussgradienten; der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie Null sind  $\Rightarrow$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow 10 \text{ (ms}^{-1}\text{)} \times 5 \times 10^{-5} \text{ (g kg}^{-1} \text{ m}^{-1}\text{)} = - \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z}$$

$$\text{Somit ist } \frac{\partial \overline{(w'q')}}{\partial z} = -5 \times 10^{-4} \text{ (g kg}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{)}$$

- Ein Gradient dieser Größe entspricht einer Abnahme um  $0.5 \text{ g kg}^{-1} \text{ m s}^{-1}$  von  $\overline{w'q'}$  über eine vertikale Strecke von 1 km ( $1000 \text{ m} \times -5 \times 10^{-4} \text{ g kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ).
- Beachte, dass die Abnahme des turbulenten Flusses mit der Höhe zu einem Anwachen von  $\bar{q}$  mit der Zeit führt.

## Fazit

An den beiden Beispielen erkennt man, dass eine Abnahme des turbulenten Flusses mit der Höhe (= Flusskonvergenz) zu einer Zunahme (Erhöhung) einer mittleren Variablen (z.B. Temperatur oder Feuchte) mit der Zeit führt!



## Problem 3

➤ Annahme einer turbulenten GS in  $44^\circ\text{N}$  geogr. Breite, wo der mittlere Wind  $2 \text{ m s}^{-1}$  langsamer ist als der geostrophische Wind (d.h. der Wind ist sub-geostrophisch). Vernachlässige Absinken und nehme horizontale Homogenität und Gleichgewichtszustand an.

(a) Bestimme die Divergenz der Reynolds Spannung die notwendig ist, um das Geschwindigkeitsdefizit auszugleichen.

(b) Wenn die Divergenz der Reynolds Spannung mit der molekularen Viskosität anstelle der Turbulenz zusammenhängen würde, welche Krümmung im mittleren Windprofil wäre dann notwendig?

Der Einfachheit halber wird das Koordinatensystem in Richtung der Spannung orientiert  $\Rightarrow$

## Lösung (a)

- Annahme der horizontalen Homogenität, Gleichgewicht, Vernachlässigung von Absinken, ergibt  $\Rightarrow$

$$0 = -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} = f(\bar{v}_g - \bar{v}) = 10^{-4} \text{ (s}^{-1}) \times 2 \text{ (ms}^{-1}) = \underline{2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}}$$

Divergenz der Reynolds Spannung

## Lösung (b)

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass der Einfluss des (viskosen) Spannungsterms auf die mittlere Bewegung ausgedrückt werden kann durch  $\nu \partial^2 \bar{u} / \partial z^2$ .

Somit  $\nu \partial^2 \bar{u} / \partial z^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$ .

Mit  $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 13.33 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

## Diskussion

Der Wert von  $13.33 \text{ 1/ms}$  ist ein extremer Wert für die Krümmung. Wenn man annimmt, dass so ein Profil in der Mitte der GS (d.h.  $z = 0.5 z_i$ ) beobachtet würde, wo eine mittlere Windgeschwindigkeit von  $5 \text{ m/s}$  vorherrscht, würde dies in einer  $10 \text{ m}$  höheren Schicht einen mittleren Wind von  $672 \text{ m/s}$  bedeuten.

Es ist offensichtlich, dass viskose Spannung in der mittleren Windgleichung eine viel geringere Rolle spielt als turbulente (Reynolds) Spannung. Trotzdem: Viskosität ist für turbulente Bewegungen sehr wichtig und kann nicht vernachlässigt werden!

# Stationärer, horizontal homogener Fluss

Vernachlässigung von Temperatur- und Feuchtefluktuationen

$$\begin{aligned}
 \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}} &= -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \cancel{\frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial(u'w')}}{\partial z} \\
 \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + \bar{u}_j \cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}} &= +f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \cancel{\frac{\partial(\overline{u'_i v'_j})}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial(v'w')}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

stationär    horizontal  
                  homogen

Kontinuitätsgleichung:  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$  (da nur horizontale Flüsse)

# Stationärer, horizontal homogener Fluss

## Gleichgewicht der Kräfte

$$0 = -f(\bar{v}_g - \bar{v}) - \frac{\partial(u'w')}{\partial z}$$

$$0 = +f(\bar{u}_g - \bar{u}) - \frac{\partial(v'w')}{\partial z}$$

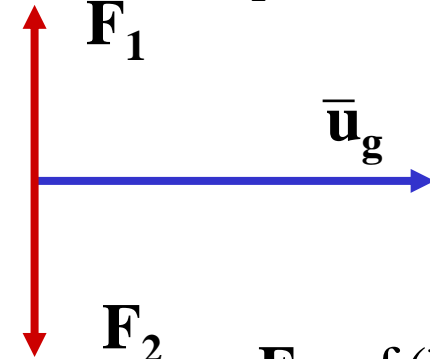
$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{F}_3 = - \left( \frac{\partial(u'w')}{\partial z}, \frac{\partial(v'w')}{\partial z} \right)$$

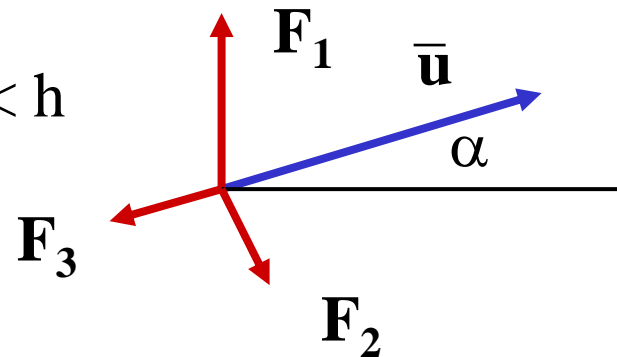
NH

$$\mathbf{F}_1 = f(-\bar{v}_g, \bar{u}_g)$$

$z > h$



$z < h$



**Ende Kapitel 3**

# Kapitel 4: Prognostische Gleichungen für turbulente Flüsse und Varianzen



# Inhalt

- Prognostische Gleichungen für turbulente Größen
- Freie Konvektion und Skalierungsvariable
- Prognostische Gleichungen für Varianzen
- Dissipation
- (Luft-) Druckstörungen
- Coriolisterm
- Vereinfachte Budgetgleichungen für die Geschwindigkeitsvarianz
- Prognostische Gleichungen für jede Komponente
- Budgetstudien
- Varianz von Feuchte und Wärme



# Prognostische Gleichungen für turbulente Größen

- Bis jetzt haben wir Bestimmungsgleichungen für mittlere Größen in turbulenten Flüssen behandelt.
- Diese Gleichungen enthalten Kovarianzen (jeweils der letzte Term, siehe oben), z.B.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\overline{\partial(u'_j u')}}{\partial x_j}$$

- Um diese Gleichungen zu nutzen kann man die Kovarianzen entweder experimentell ableiten oder man kann zusätzliche Gleichungen herleiten, um die Kovarianzen zu bestimmen.
- Im folgenden werden Bestimmungsgleichungen für variierende Größen in turbulenten Flüssen abgeleitet.

- Störungsgrößen (d.h.  $x'$ ) repräsentieren turbulente Fluktuationen, d.h. Abweichungen vom Mittelwert.
- Theoretisch könnten Bestimmungsgleichungen dieser Abweichungen für jede einzelne Windböe aufgestellt und berechnet werden, wenn man die notwendigen Anfangs- und Randbedingungen kennt.
- Leider ist die Zeitspanne, über die eine Vorhersage "genau" ist, proportional zur Lebenszeit der Störungen (Eddies):  
O(einige wenige Sek.) für die kleinsten Eddies bis zu etwa 15 Minuten für die größeren Thermals.
- Für meteorologische Anwendungen macht dies keinen Sinn.
- Stattdessen leitet man weitere prognostische Gleichungen als einen Zwischenschritt ab, um die Bestimmungsgleichungen für Varianzen und Kovarianzen von Variablen zu finden.

# Impulsgleichung

Zur Erinnerung:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \delta_{i3} \left[ g - g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \right] + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \quad \textcircled{1}$$

und

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}} \quad \textcircled{2}$$

Nehme

①

-

②



# Impulsgleichung

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} =$$

$$\varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für eine turbulente Windböe  $u'_i$ .

Genauso für die (gesamte) spezifische Feuchte:

$$\frac{\partial q'_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'_T}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial^2 q'_T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$$

Für Wärme (pot. Temperatur):

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \theta'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial Q_j^{*'}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial (u'_j \theta')}{\partial x_j}}$$


Für eine skalare Größe:

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2} + S_c \overline{\frac{\partial (u'_j c')}{\partial x_j}}$$

Man kann diese Bestimmungsgleichungen nutzen, um Bestimmungsgleichungen für die Varianzen zu erhalten.

# Skalierungsvariable für die freie Konvektion

- Bis jetzt haben wir Bestimmungsgleichungen für mittlere Größen in turbulenten Flüssen erhalten.
- Diese Gleichungen schließen Kovarianzen ein, z.B.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ij3} f(\bar{v}_g - \bar{v}_j) - \frac{\partial (\overline{u'_j u'})}{\partial x_j}$$


- Nun leiten wir Bestimmungsgleichungen für fluktuierende Größen in turbulenten Flüssen her.
- Bevor die Gleichungen für Varianzen und Flüsse hergeleitet werden, muss man einen kleinen Umweg machen, um zu lernen, wie experimentelle Daten zur Darstellung skaliert werden. Dann kann man anhand von Fallbeispielen Daten finden, die zu den entwickelten Gleichungen passen.

- In Kapitel 1 haben wir gelernt, dass Turbulenz zum einen durch starke (engl. buoyant) Konvektion produziert werden kann, z.B. durch Thermals warmer aufsteigender oder kalter absteigender Luft, zum anderen aber auch durch mechanische Prozesse, d.h. Windscherung.
- Manchmal dominiert ein Prozess.
- Wenn starke Konvektionsprozesse in der GS dominieren, spricht man davon, dass sich die GS in einem Zustand freier Konvektion (engl. free convection) befindet.
- Wenn mechanische Prozesse dominieren spricht man davon, dass sich die GS in einem Zustand erzwungener Konvektion (engl. forced convection) befindet.

- Freie Konvektion beobachtet man in der Regel über Land an klaren, sonnigen Tagen mit schwachem Wind.
- Erzwungene Konvektion beobachtet man an bedeckten Tage mit stärkeren Winden.
- Im folgenden konzentrieren wir uns auf Skalen der freien Konvektion - Skalen der erzwungenen Konvektion wurden bereits in Kapitel 2 diskutiert.



- Im Zustand der freien Konvektion verursacht starke solare Heizung am Erdboden einen ausgeprägten Tagesgang der Turbulenz sowie der Dicke der Mischungsschicht.
- Profile der Wärme- und Feuchteflüsse können dimensionslos gemacht werden, um den Tagesgang zu eliminieren. So werden zum Beispiel die resultierenden Wärmeflussprofile als Bruchteile von Oberflächenflüssen dargestellt, die Höhe als Bruchteil der Dicke der ML:  $h=z/z_i$  (Beispiele in Stull, Abschnitt 3.6).
- Ein ähnliches Vorgehen ist hilfreich, um bei der Bestimmung der relativen Anteile von den verschiedenen Termen in den Varianz- und Flussgleichungen die nicht-stationären Effekte zu beseitigen.
- Einige der geeigneten Skalierungsvariablen für die freie Konvektion werden nun kurz behandelt.

- Längenskala (-maß): Thermals steigen auf, bis sie eine stabile Schicht erreichen, die die ML bedeckt (capping inversion).  $\Rightarrow$  Die Größe der Thermals (eines Thermal) skaliert die Höhe der ML ( $= z_i$ ).
- Thermals sind die dominanten Eddies in der konvektiven GS und alle kleineren Eddies geben ihre Energie an die größeren Eddies ab.  
 $\Rightarrow$  deshalb nehmen wir an, dass in konvektiven Situationen viele turbulente Prozesse die Dicke der ML ( $z_i$ ) bestimmen ('skalieren').

- Geschwindigkeitsskala (-maß): Der ausgeprägte Tagesgang der solaren Heizung verursacht einen starken Wärmefluss von der Erdoberfläche in die Atmosphäre.
- Der Auftrieb, der mit diesen Flüssen verbunden ist, treibt die Thermals an.
- Man kann einen Fluss durch den Auftrieb definieren als:

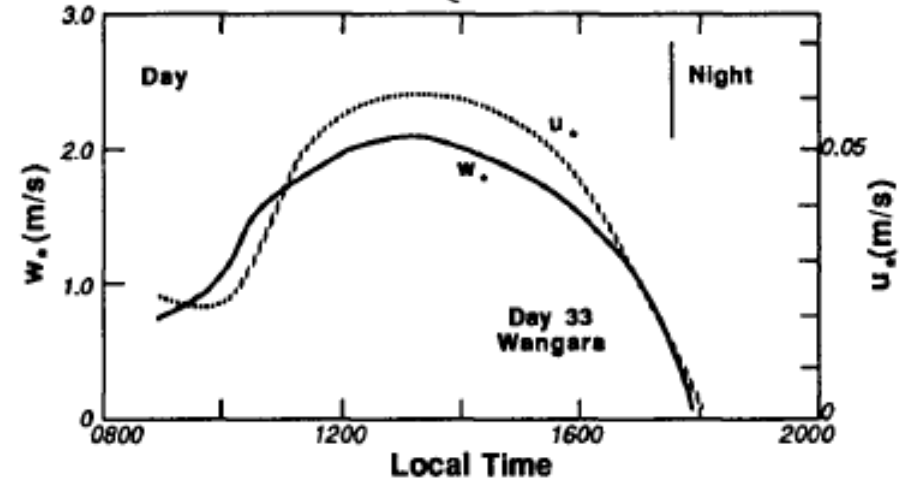
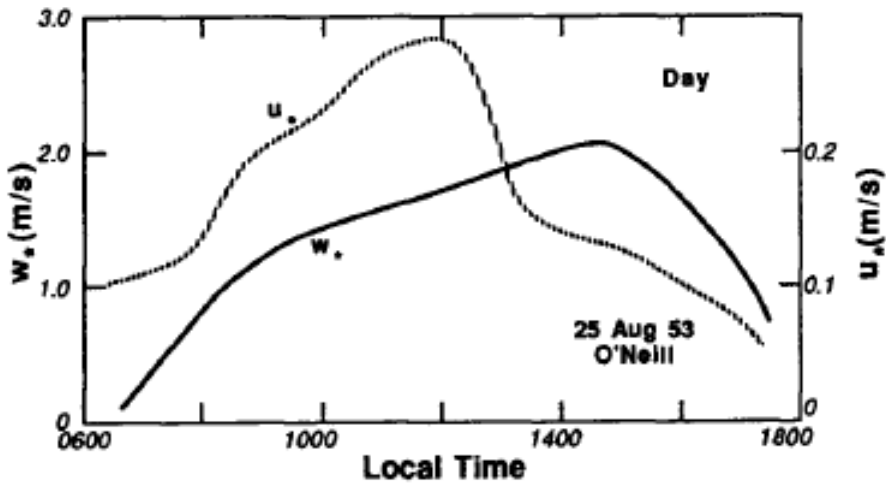
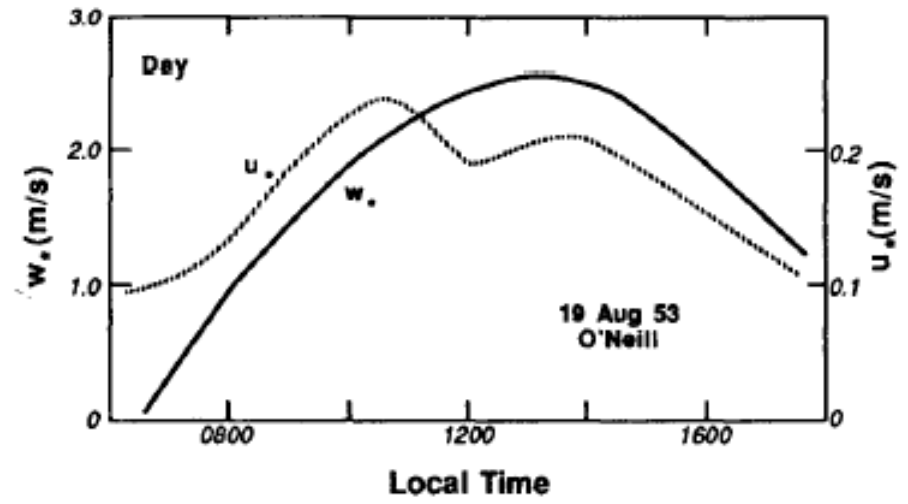
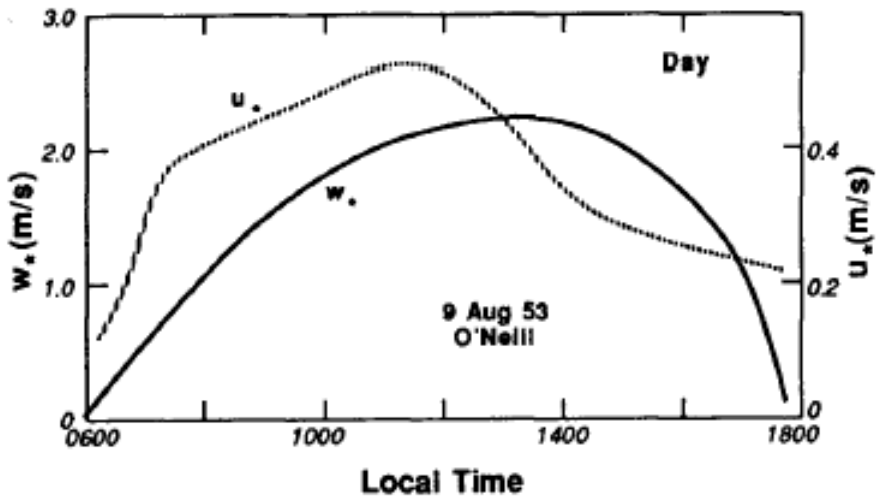
$$\frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v}$$

- Obwohl dieser 'Auftriebsfluss' direkt als Skalierungsvariable benutzt werden könnte, ist es gebräuchlicher, eine Geschwindigkeitsskalierung einzuführen, die die beiden wichtigsten Variablen für die freie Konvektion verwendet: den Auftriebsfluss am Erdboden und die Dicke der ML  $z_i$ .
- Die Kombination dieser Variablen ergibt ein Maß für die Geschwindigkeit, die Skalierungsgeschwindigkeit der freien Konvektion  $w_*$ ; sie wird auch die konvektive Geschwindigkeitsskala genannt:

$$w_* = \left[ \frac{gz_i}{\theta_v} \left( \overline{w'\theta'_v} \right)_s \right]^{1/3}$$

← s = surface

- Es stellt sich heraus, dass dieses Maß geeignet ist; zum Beispiel ist die Größe der vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen in Thermals von der gleichen Größenordnung wie  $w_*$ . Für dickere ML, mit kräftiger Heizung am Erdboden, kann  $w_*$  in der Größe von 1 bis 2 m s<sup>-1</sup> sein.



Beispiele von Variationen der Reibungsgeschwindigkeit und der konvektiven Geschwindigkeitsskala mit der Zeit.

- Zeitskala: Kombination von Längen- und Geschwindigkeitsskala ergibt die Zeitskala  $t_*$  für die freie Konvektion:

$$t_* = z_i / w_*$$

- Die Zeitskala hat eine Größenordnung von 5 bis 15 Minuten, d.h. entspricht ungefähr der Zeit die ein Luftpaket benötigt, um in einer Mischungsschicht von unten bis zu ihrer Oberkante zu gelangen.
- Ähnlich Skalierungen lassen sich für die Temperatur und die Feuchte durchführen (siehe Stull Seite 120).

# Prognostische Gleichungen für Varianzen

## ➤ Varianz des Impulses

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} =$$

$$\varepsilon_{ij3} f u'_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

Multiplikation mit  $2u'_i$  (Anwendung der Produktregel)  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u_i'^2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + 2u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} =$$

$$\varepsilon_{ij3} 2f u'_i u'_j - 2 \frac{u'_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\delta_{i3} g u'_i \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} + 2v u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - 2u'_i \overline{\frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j}}$$

# Prognostische Gleichungen für Varianzen

- Zeitliche Mittelung und Reynolds Regeln anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}} = \\ \varepsilon_{ij3} 2f \overline{u_i' u_j'} - 2 \frac{\overline{u_i' \partial p'}}{\bar{\rho} \partial x_i} + 2\delta_{i3} g u_i' \frac{\theta'_v}{\theta_v} + 2\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \cancel{2u_i' \frac{\partial(u_i' u_j')}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

= (4.3.1a) in Stull

- Diese generelle Form der prognostischen Gleichung für die Varianz der Windgeschwindigkeit wird üblicherweise weiter vereinfacht, bevor sie zur Bestimmung der GS-Flüsse benutzt wird.



# Dissipation

Stull S. 121: Consider a term of the form  $\overline{\partial^2(u_i'^2)/\partial x_j^2}$ . Using simple rules of calculus, we can rewrite it as:

$$\frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2 \overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) = 2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + 2 \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} =$$

$$2 \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} + 2 \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}$$

If we multiply the last term above by  $v$ , then it would be identical to the last term in (4.3.1a). Thus, we can write the last term in (4.3.1a) as

$$2v \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = v \overline{\frac{\partial^2 (u_i'^2)}{\partial x_j^2}} - 2v \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2}$$

## Dissipation (2)

$$2\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 \overline{(u_i')^2}}{\partial x_j^2} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \quad (4.3.1b)$$

The first term on the right, which physically represents the molecular diffusion of velocity variance, contains the curvature of a variance. The variance changes fairly smoothly with distance within the boundary layer, its curvature being on the order of  $10^{-6} \text{ s}^{-2}$  in the ML to  $10^{-2} \text{ s}^{-2}$  in the SL. When multiplied by  $\nu$ , the first term ranges in magnitude between  $10^{-11}$  and  $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

The last term on the right can be much larger. For example, if the eddy velocity changes by only 0.1 m/s across a very small size eddy (for example, 1 cm in diameter), then the instantaneous shear across that eddy is  $10 \text{ s}^{-1}$ . For smaller size eddies, the shear is larger. When this value is squared, averaged, and multiplied by  $2\nu$ , the magnitudes observed in the turbulent boundary layer range between about  $10^{-6}$  and  $10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ . Typical values in the ML are on the order of  $10^{-4}$  to  $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ , while in the surface layer, values on the order of  $10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  can be found. Thus, we can neglect the first term on the right and use:

## Dissipation (3)

Vernachlässigung des ersten Terms auf der rechten Seite:

$$\overline{2\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = \cancel{\nu \frac{\partial^2 \overline{(u_i')^2}}{\partial x_j^2}} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \quad (4.3.1c)$$

The *viscous dissipation*,  $\epsilon$ , is defined as:

$$\epsilon = +\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$

It is obvious that this term is always positive, because it is a squared quantity. Therefore, when used in (4.3.1a) with the negative sign as required by (4.3.1c), it is always causing a decrease in the variance with time. That is, it is always a loss term. In addition, it becomes larger in magnitude as the eddy size becomes smaller. For these small eddies, the eddy motions are rapidly damped by viscosity and irreversibly converted into heat. [This heating rate is so small, however, that it has been neglected in the heat conservation equation (3.4.5b).]

# Druck Störungen

Using the product rule of calculus again, the pressure

term  $-2 \overline{(u_i' / \bar{\rho}) \partial p' / \partial x_i}$  in (4.3.1a) can be rewritten as

$$-2 \overline{\left( \frac{u_i'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = - \left( \frac{2}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial \overline{(u_i' p')}}{\partial x_i} + \underbrace{2 \left( \frac{p'}{\bar{\rho}} \right) \left[ \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right]}$$

The last term is called the pressure redistribution term. The factor in square brackets consists of the sum of three terms:  $\partial u' / \partial x$ ,  $\partial v' / \partial y$ , and  $\partial w' / \partial z$ . These terms sum to zero because of the turbulence continuity equation (3.4.2c); hence, the last term in the equation above does not change the total variance (by total variance we mean the sum of all three variance components). But it does tend to take energy out of the components having the most energy and put it into components with less energy. Thus it makes the turbulence more isotropic, and is also known as the return-to-isotropy term.

Terms like  $\partial u' / \partial x$  are larger for the smaller size eddies. Thus, we would expect that smaller size eddies are more isotropic than larger ones. As we shall see later, this is indeed the case in the boundary layer.

## Druck Störungen (2), Coriolis term

The end result of this analysis is that:

$$-2 \overline{\left( \frac{u_i'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \equiv - \left( \frac{2}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{u_i' p'})}{\partial x_i} \quad (4.3.1e)$$

**Coriolis Term.** The Coriolis term  $2f_c \epsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'}$  is identically zero for velocity variances, as can be seen by performing the sums implied by the repeated indices:

$$\begin{aligned} 2f_c \epsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} &= 2f_c \epsilon_{213} \overline{u_2' u_1'} + 2f_c \epsilon_{123} \overline{u_1' u_2'} \\ &= -2f_c \overline{u_2' u_1'} + 2f_c \overline{u_1' u_2'} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.1f)$$

because  $\overline{u_1' u_2'} = \overline{u_2' u_1'}$  (see section 2.9.2). Many of the terms in the above sum were not written out because the alternating unit tensor forced them to zero.

## Coriolis term (2)

Physically, this means that Coriolis force can not generate turbulent kinetic energy.

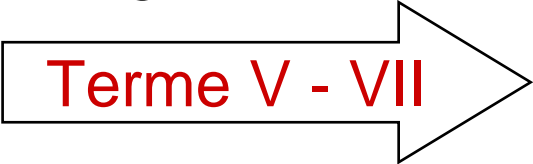
Kinetic energy enters the picture because the variance  $\overline{u_i'^2}$  is nothing more than twice the turbulence kinetic energy per unit mass. The Coriolis term merely redistributes energy from one horizontal direction to another. Furthermore, the magnitude of the redistribution term  $2f_c \overline{u_1' u_2'}$  is about three orders of magnitude smaller than the other terms in (4.3.1a). For that reason, the Coriolis terms are usually neglected in the turbulence variance and covariance equations, even for the cases where they are not identically zero.

# Vereinfachte Geschwindigkeitsvarianz Budgetgleichungen

$$\frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2\delta_{i3}g \frac{\overline{u_i'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{u_i'u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i'^2 u_j'}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon$$

I                      II                      III                      IV                      V                      VI                      VII

- Term I**    Änderungsrate der Varianz
- Term II**    Advektion der Varianz durch den mittleren Wind
- Term III**    Produktions-/Verlustterm, abhängig vom Vorzeichen des Auftriebsflusses
- Term IV**    Produktionsterm. Der Impulsfluss ist normalerweise negativ in der GS, da Impuls an der Erdoberfläche verloren geht; deshalb ergibt sich ein positiver Beitrag zur Varianz, wenn mit einem negativen Vorzeichen multipliziert wird.



# Vereinfachte Geschwindigkeitsvarianz Budgetgleichungen

$$\frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2\delta_{i3}g \frac{\overline{u_i'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{u_i'u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i'^2 u_j'}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon$$

I                      II                      III                      IV                      V                      VI                      VII

**Term V** Turbulenter Transportterm. Er beschreibt wie die Varianz durch turbulente Eddies verändert wird.

**Term VI** Beschreibt, wie die Varianz durch Druckstörungen verändert wird. Steht oft im Zusammenhang mit Schwerewellen oder Auftrieb.

**Term VII** Beschreibt die viskose Dissipation der Geschwindigkeitsvarianz mit

$$\varepsilon = +\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$$



# Prognostische Gleichungen separat für jede einzelne Komponente

- Man kann die Bestimmungsgleichungen auch für jede einzelne Komponente der Geschwindigkeitsvarianz aufstellen, wenn man die Summationsregeln in Bezug auf sich wiederholende Indizes etwas lockert : z.B. wähle  $i = 2$  für eine Gleichung für  $\overline{v'^2}$ .
- Alle anderen sich wiederholende Indizes wie  $j$  besagen weiterhin, dass es sich um eine Summe handelt. Zur Erinnerung sei gesagt, dass wir die Terme, die vorher wegen Anisotropie vernachlässigt wurden, wieder berücksichtigen müssen.



Vollständiger Satz von Gleichungen

# Prognostische Gleichungen separat für jede einzelne Komponente

$$\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{u'u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'p'}}{\partial x} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right)^2}$$

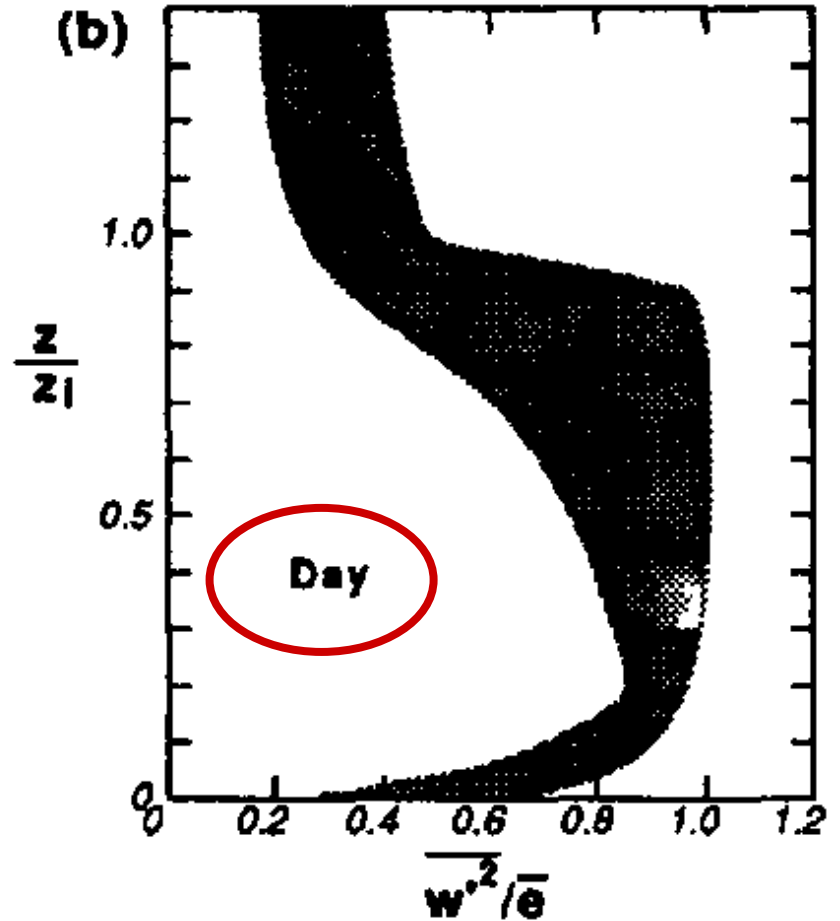
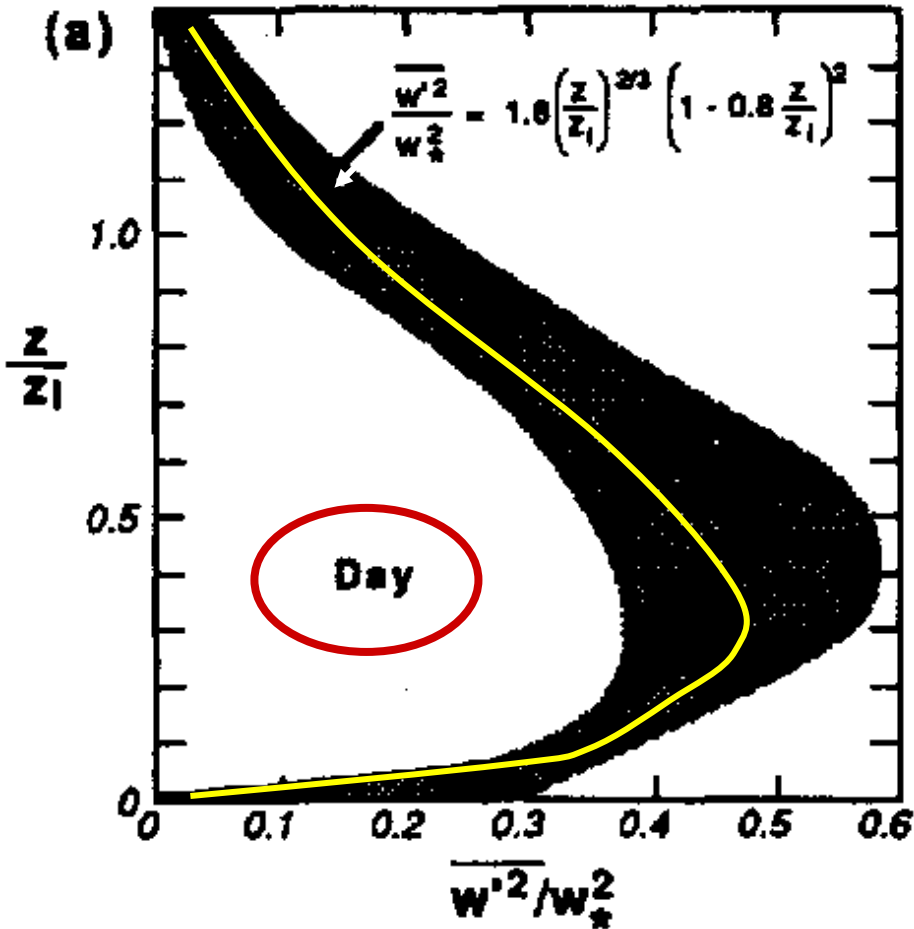
$$\frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{v'u'_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial v'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{v'p'}}{\partial y} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial x_j} \right)^2}$$

$$\frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial x_j} = 2g \frac{\overline{w'\theta'_v}}{\bar{\theta}_v} - 2\overline{w'u'_j} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial w'^2 u'_j}}{\partial x_j} - \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} + \frac{2\overline{p'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial x_j} \right)^2}$$

Die meisten Terme haben die gleiche Bedeutung wie vorher.  
— repräsentiert die Druckumverteilung, verbunden mit der Rückkehr zu isotropen Verhältnissen.

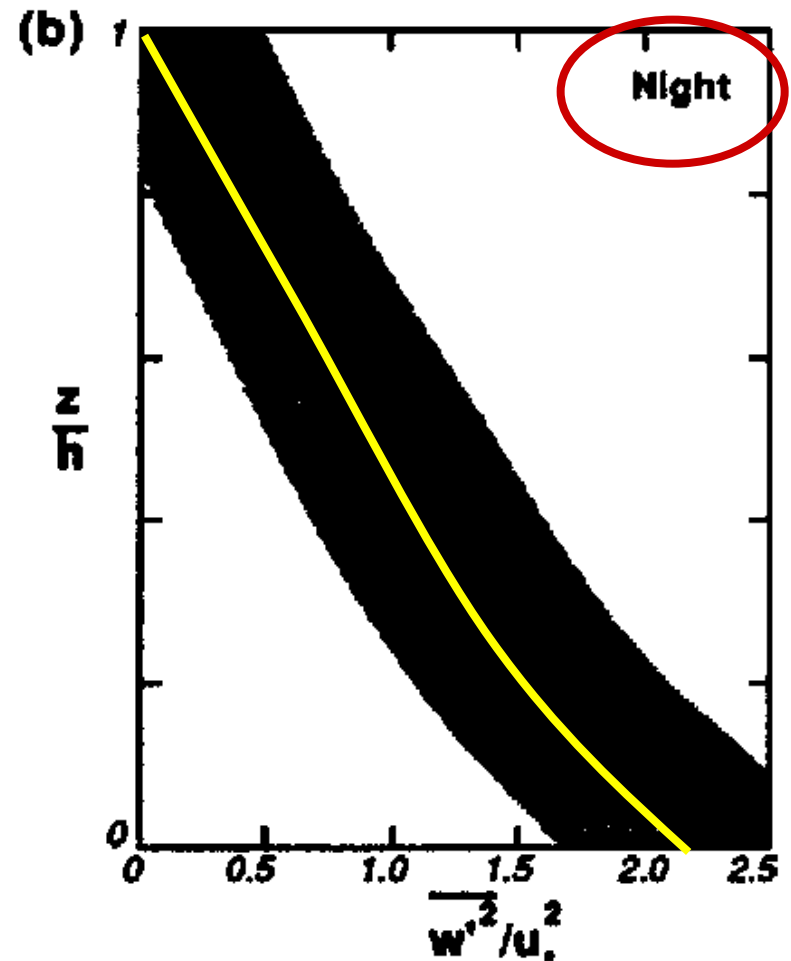
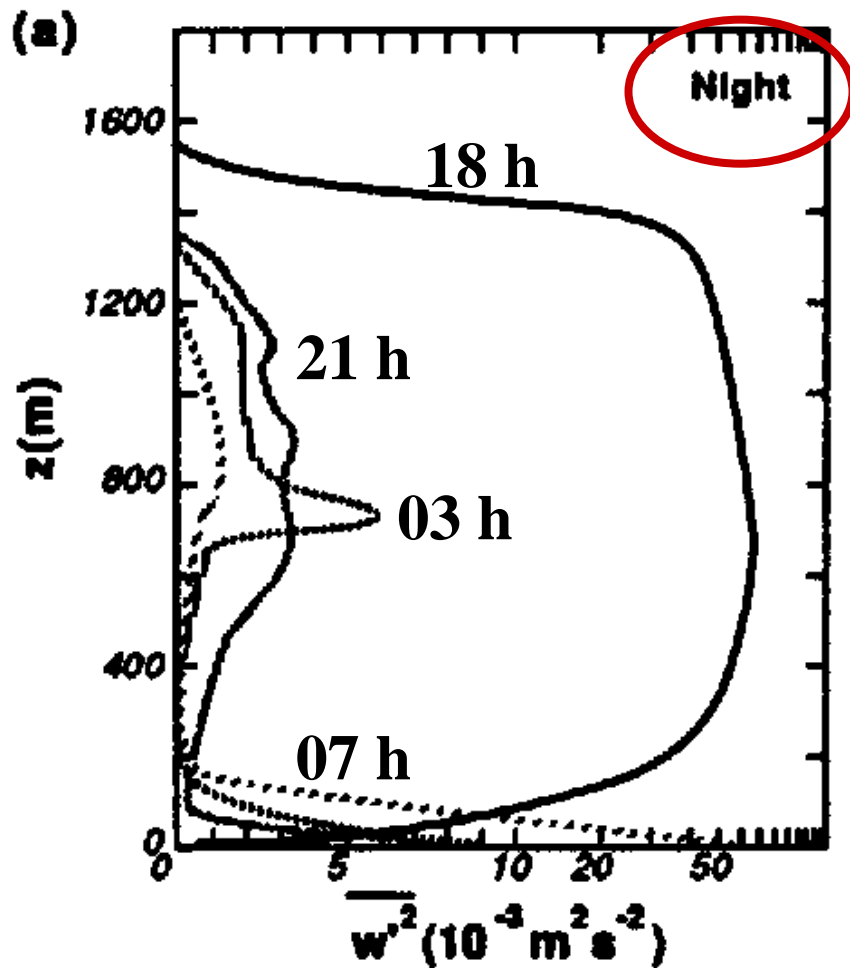
# Budgetstudien

- Mit Budgetstudie bezeichnet man die Überprüfung des Beitrags von jedem einzelnen Term einer Bestimmungsgleichung.
- Einige Terme sind sehr schwierig zu messen, weshalb man sich auch numerischer Simulationen bedient.
- In Budgetstudien, die im folgenden beschrieben werden, kombiniert man Daten von Feldexperimenten und numerischen Studien.
- In den meisten Fällen streuen die experimentell ermittelten Daten sehr viel mehr als die der Simulationen.



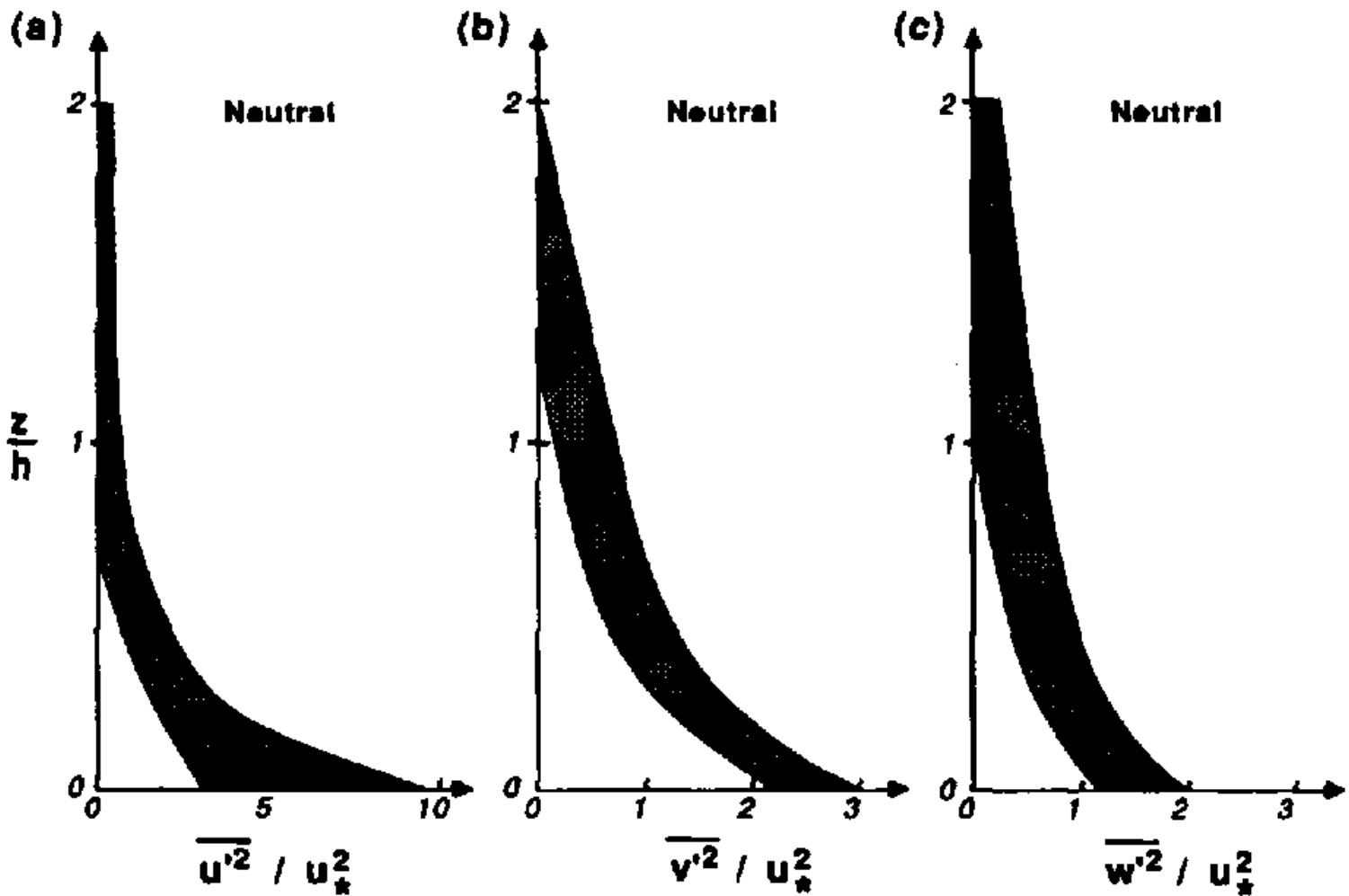
(a) Variation der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit mit der Höhe am Tage. Bereich der gemessenen und modellierten Werte ist schattiert.

(b) Rate der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit zur mittleren turbulenten kinetischen Energie ( $\bar{e} = \text{TKE}/\text{m}$ ).

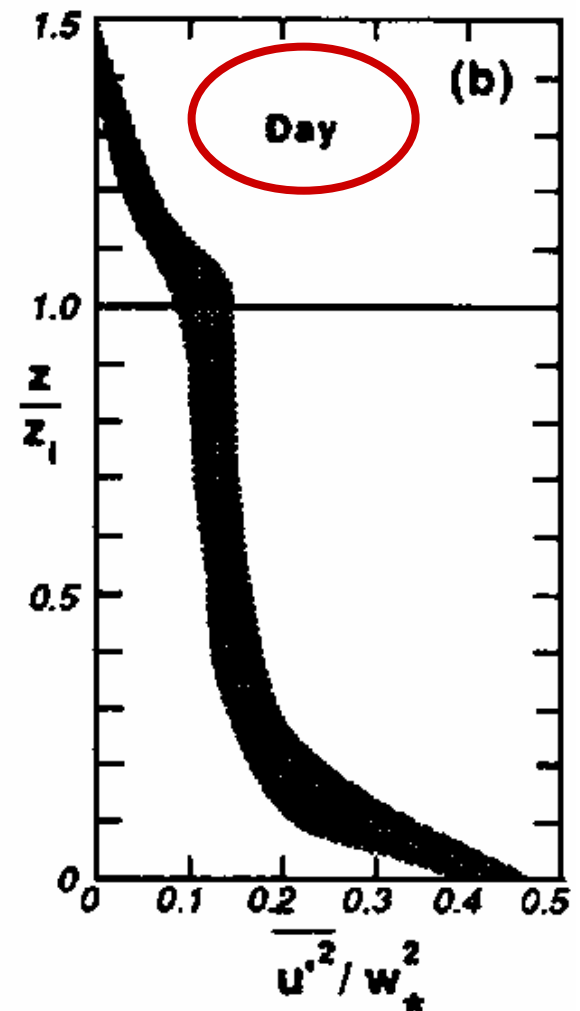
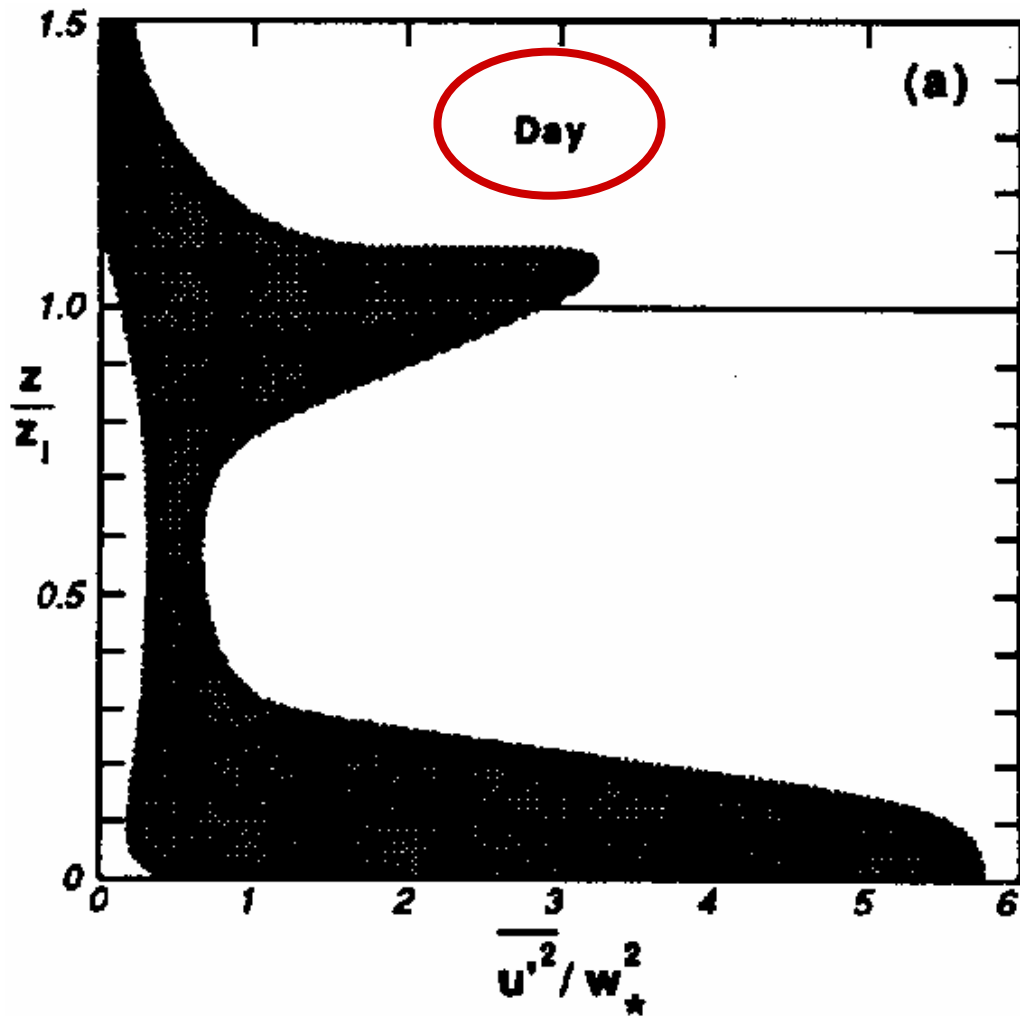


(a) Beispiele für modellierte Profile der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit während der Nacht. Beachte: Abszisse ändert sich von linear zu logarithmisch bei 10.

(b) Bereich der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit, hier normalisiert mit der Reibungsgeschwindigkeit, als Funktion der Höhe (normalisiert mit einem Maß für die Dicke der stabilen GS,  $h$  - siehe nächste Seite).

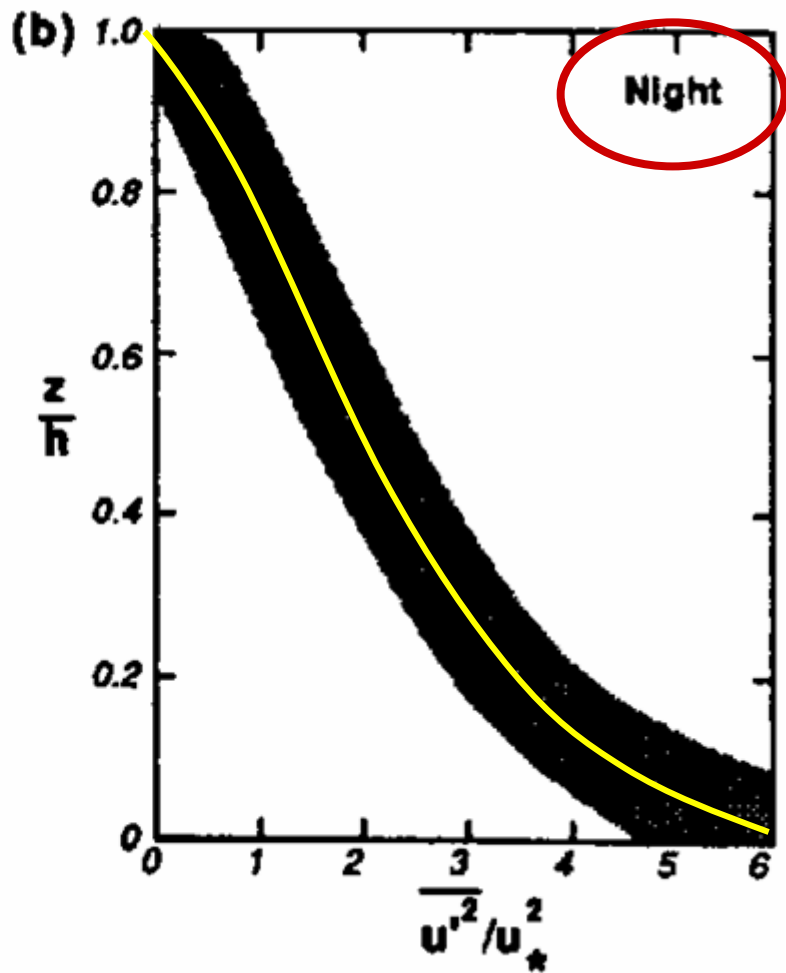
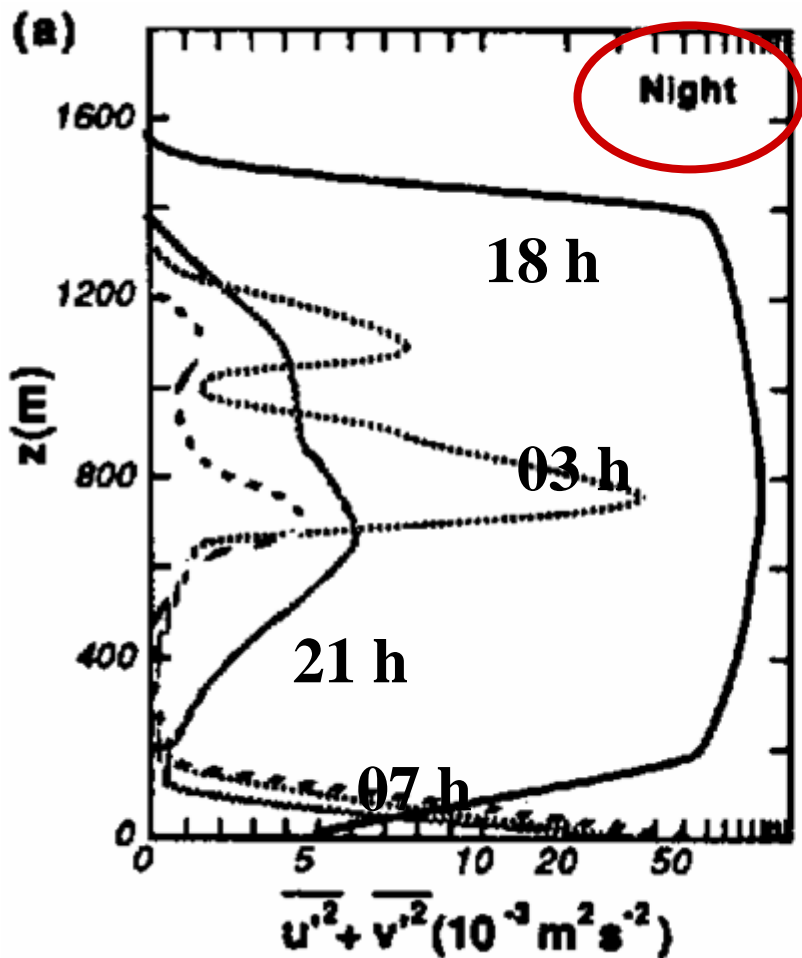


Normalisierte Varianz der Geschwindigkeit gegen die Höhe in einem statisch neutralen Zustand, wobei  $h$  ( $\approx 2$  km) die Höhe ist, in der  $\bar{v}$  gleich Null ist. Ergebnisse basierend auf Simulationen großer Eddies (engl. large-eddy simulation, LES) mit  $u_g = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_g = 0$ , and  $u_* = 0.4 \text{ m s}^{-1}$ .



(a) Bereich der Varianz der horizontalen Geschwindigkeit normalisiert durch die konvektive Geschwindigkeitsskala  $w_*^2$ , gegen die dimensionslose Höhe  $z/z_1$ , für typische Bedingungen mit gleichzeitiger Konvektion und Windscherung.

(b) Idealisierter Bereich für freie Konvektion ohne Scherung.



- (a) Modellierte Profile der horizontalen Eddy-kinetischen Energie während einer Nacht. Beachte: Abszisse ändert sich von linear zu logarithmisch bei 10.
- (b) Bereich der Varianz der vertikalen Geschwindigkeit, normalisiert mit einem Maß für die Dicke der stabilen GS,  $h$  - siehe oben).



# Varianz der Feuchte

Im folgenden wird nur der Wasserdampfanteil der spezifische Feuchte in der Bestimmungsgleichung betrachtet!

Multiplikation der entsprechenden Gleichung (siehe oben) mit  $2q'$  und Anwendung der Produktregel ergibt:

$$2q' \times \frac{\partial q'}{\partial t} + \dots = \dots$$

$$\frac{\partial q'^2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j} + 2q'u'_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j} = 2q'v_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2} + 2q' \frac{\partial \overline{u'_j q'}}{\partial x_j}$$

mit  $v_q$  der kinematischen Viskosität für Wasserdampf.

# Varianz der Feuchte

Nächster Schritt, Mittelung und Reynolds Regeln der Mittelung anwenden:

$$\frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial q'^2}{\partial x_j}} = \overline{2q'v_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2}}$$

Um diese Gleichung wieder in Flussform zu erhalten, addiert man die mit  $q'^2$  multiplizierte mittlere turbulente Kontinuitätsgleichung (d.h. addiert  $\overline{q'^2 \partial u'_j / \partial x_j} = 0$ ) und sortiert etwas um:

$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} + \underline{2v_q \overline{q' \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2}}}$$

Wie vorher schon für den Impuls spaltet man den letzten Term in zwei Terme auf, wovon einer (die molekulare Diffusion der Varianz der spezifischen Feuchte) klein genug ist, um vernachlässigt zu werden. Der verbleibende Term ist definiert als der doppelte molekulare Diffusionsterm  $\varepsilon_q$ , analog zum Impuls:

$$\varepsilon_q = v_q \overline{\left( \frac{\partial q'}{\partial x_j} \right)^2}$$

Die Bestimmungsgleichung für die Varianz der spezifischen Feuchte ist somit:

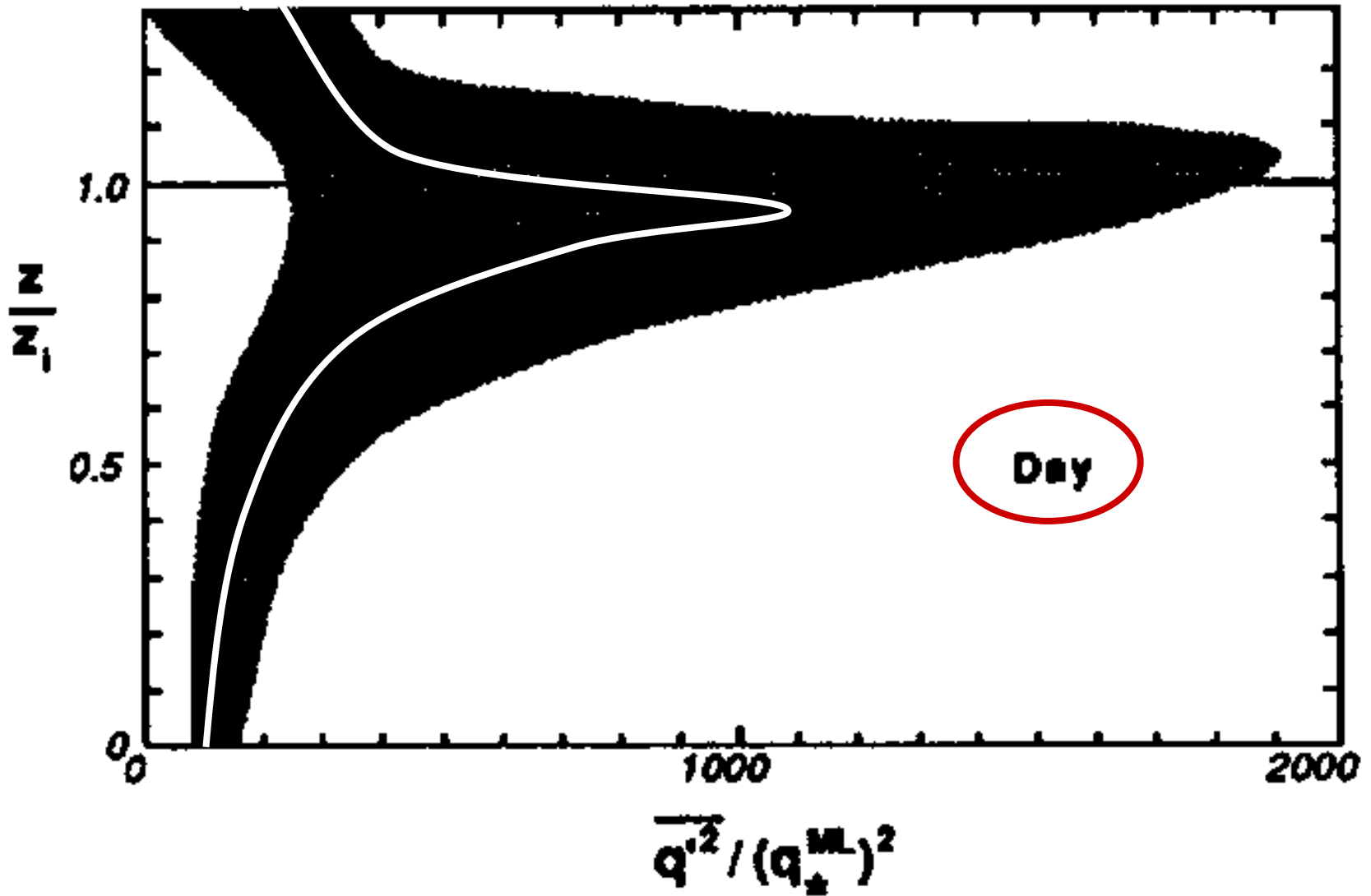
$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_q$$

Interpretation 

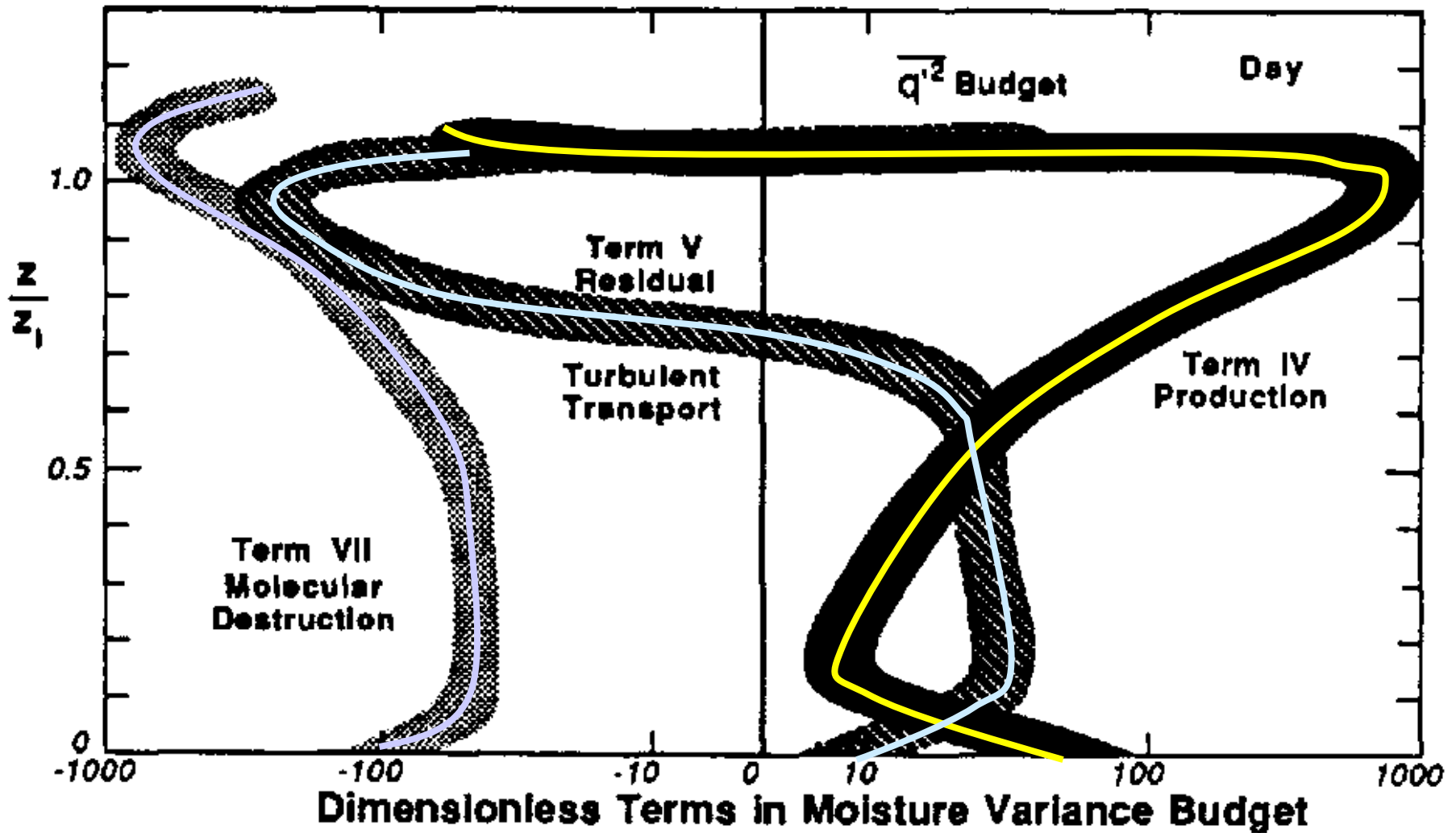
$$\frac{\overline{\partial q'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_j q'^2}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_q$$

I
II
IV
V
VII

- Term I**    Änderungsrate der Varianz der spezifische Feuchte
- Term II**    Advektion der Varianz der spezifischen Feuchte durch den mittleren Wind
- Term IV**    Produktionsterm verbunden mit der turbulenten Bewegung der sich bei einem mittleren Feuchtegradient einstellt
- Term V**    turbulenter Transport der Feuchtevarianz
- Term VII**    molekulare Dissipation (d.h. Verlustrate der Feuchtevarianz durch molekulare Prozesse).



Beispiel für ein modelliertes vertikales Profil der dimensionslosen Varianz der spezifischen Feuchte.  
 (siehe oben:  $q_*^{ML} = -w'q' / w_*$ , Skala der spez. Feuchte in der ML)



Beispiel für modellierte vertikale Profile der einzelnen Terme in der Bestimmungsgleichung für die Varianz der spezifischen Feuchte:  
 Vergleich der Größenordnung.

# Varianz der Wärme (potentielle Temperatur)

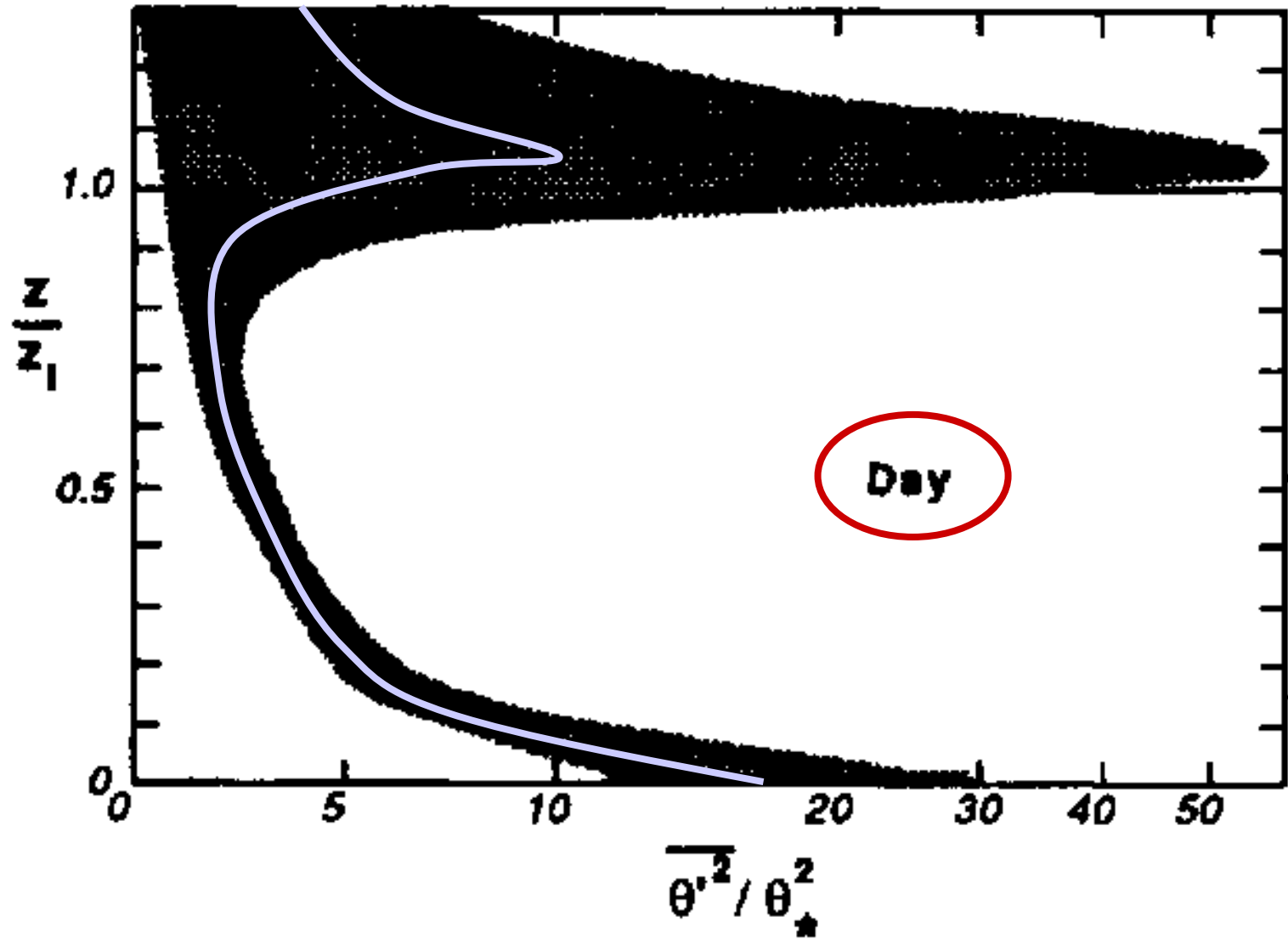
**Budget Equations.** As was done with the moisture equation, start with (4.1.3), multiply by  $2\theta'$ , use the product rule of calculus, Reynolds average, put into flux form, neglect molecular diffusion but retain the molecular dissipation, and rearrange to yield:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} & = & -2\overline{\theta' u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} & - & \overline{\frac{\partial u'_j \theta'^2}{\partial x_j}} & - & 2\varepsilon_\theta - \frac{2}{\bar{\rho} c_p} \overline{\theta' \frac{\partial Q'_j}{\partial x_j}} \\
 \text{I} & & \text{II} & & \text{IV} & & \text{V} & \text{VII} & \text{VIII}
 \end{array}$$

The terms above have physical representations analogous to those in (4.3.2). Term VIII is the radiation destruction term (sometimes given the symbol  $\varepsilon_R$ ). It is difficult to measure this term directly, but sometimes it is modeled as  $\varepsilon_R \equiv (0.036 \text{ m/s}) \cdot \overline{\theta'^2} / \bar{e}^{3/2}$ , where  $\varepsilon_R$  is about 1% to 10% of  $\varepsilon_\theta$  (Coantic and Simonin, 1984).

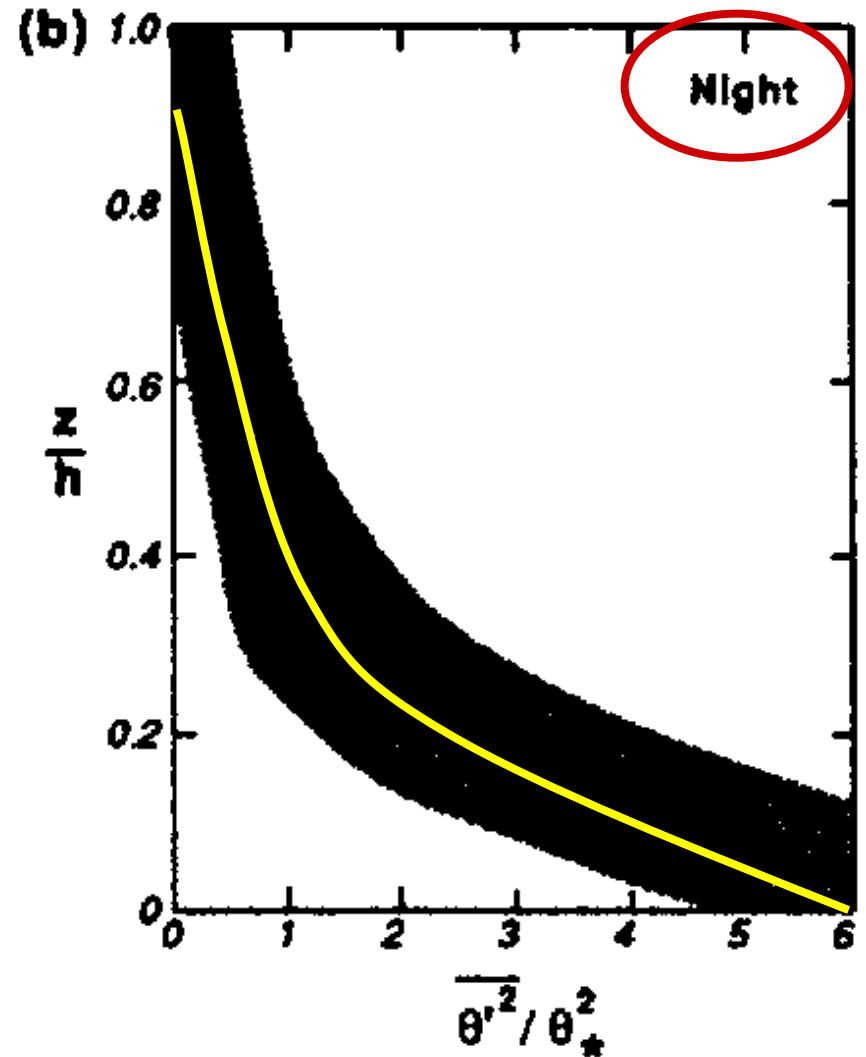
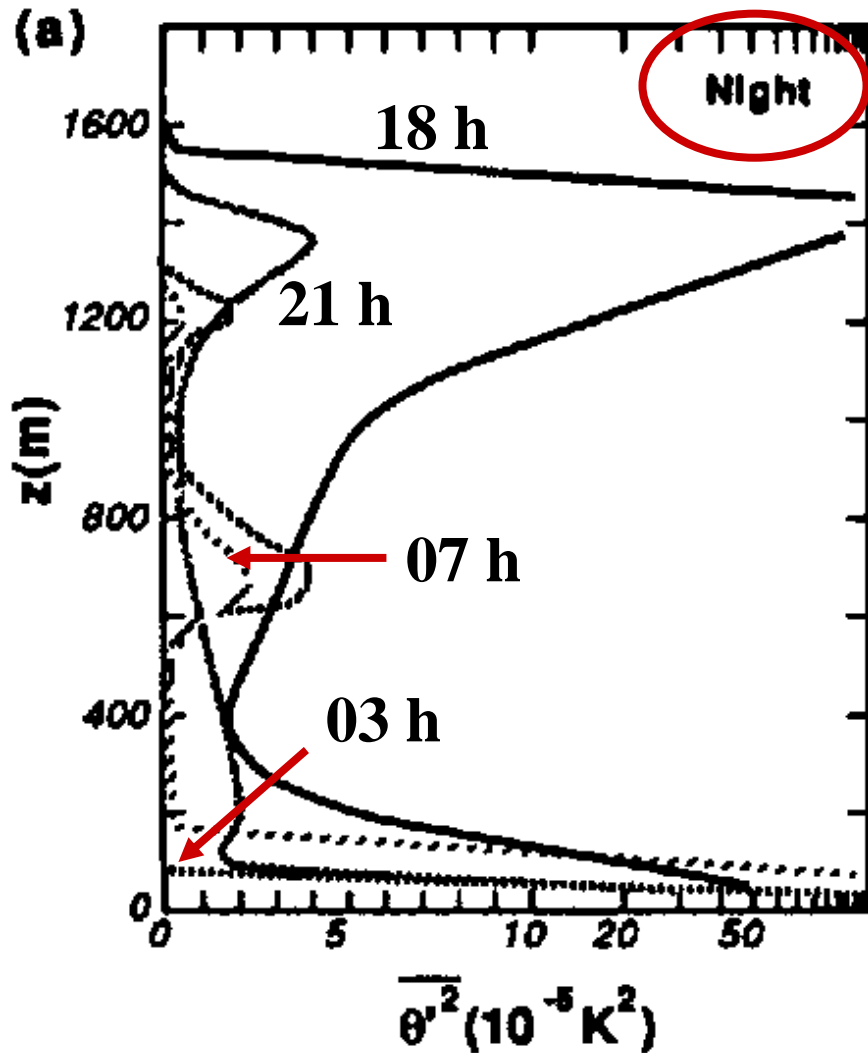
$\varepsilon_R$  : Verlustrate der Temperaturvarianz durch Strahlungsprozesse

$\varepsilon_\theta$  : Verlustrate der Temperaturvarianz durch molekulare Prozesse

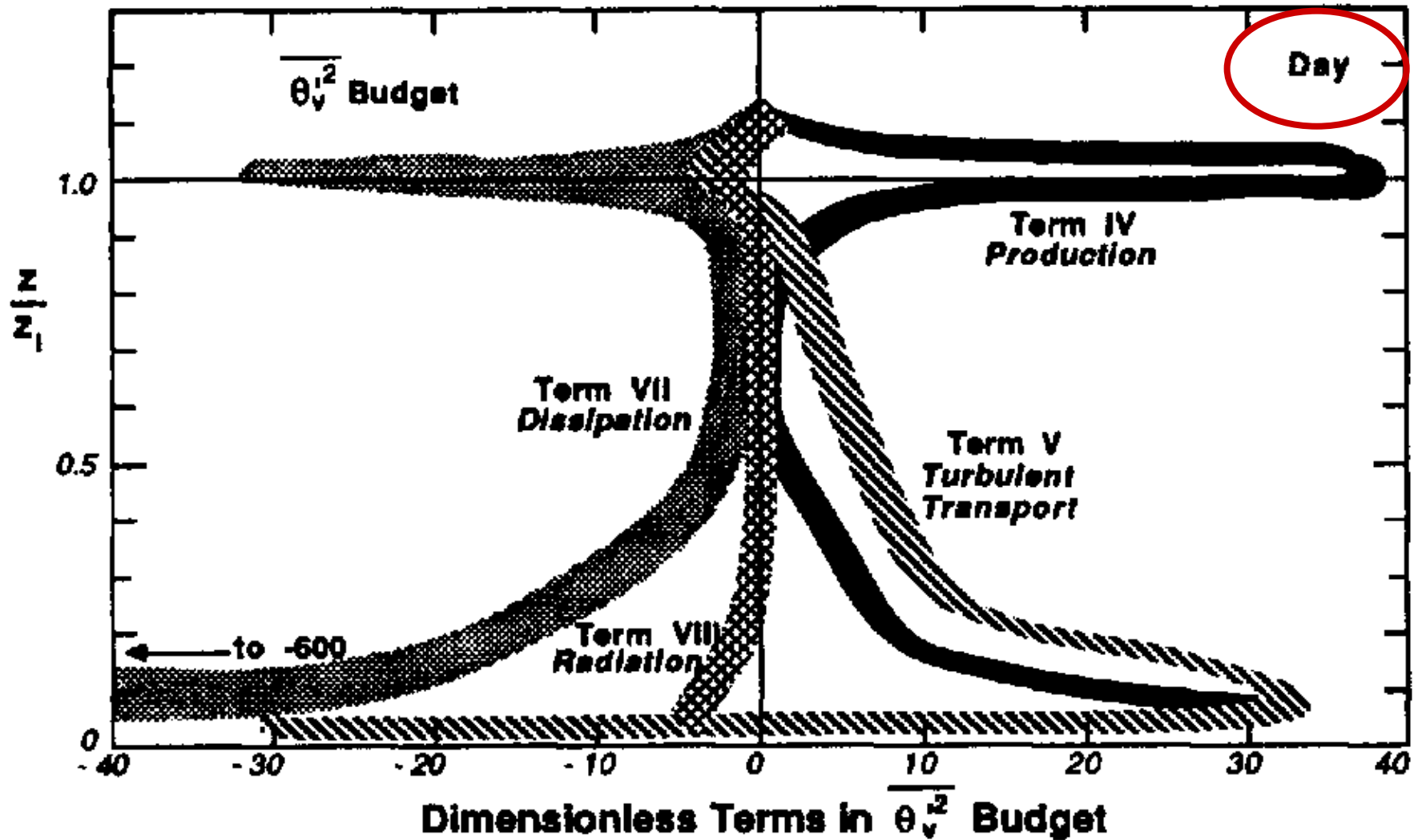


Beispiel für ein modelliertes vertikales Profil der dimensionslosen Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur am Tage.





Beispiel für ein modelliertes nächtliches Profil der Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur.



Beispiel für modellierte vertikale Profile der einzelnen Terme in der Bestimmungsgleichung für die Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur: Vergleich der Größenordnung.



**Ende Kapitel 4**

# Kapitel 5 (1): Kinetische Energie der Turbulenz



# Kinetische Energie der Turbulenz

- Kinetische Energie der Turbulenz (engl. turbulence kinetic energy, TKE) ist eine der wichtigsten Variablen in der Mikrometeorologie, da sie ein Maß für die Intensität der Turbulenz darstellt.
- Sie steht in direktem Zusammenhang mit dem Transport von Impuls, Wärme und Feuchte durch die GS.
- Die individuellen Terme in der TKE Bestimmungsgleichung beschreiben physikalische Prozesse, die Turbulenz erzeugen.
- Die relative Größe dieser Prozesse bestimmt die Fähigkeit des Flusses Turbulenz aufrecht zu erhalten oder turbulent zu werden; folglich ist sie ein Maß für die Stabilität des Flusses.

# Die TKE Bestimmungsgleichung

- Definition der TKE (siehe Kapitel 2):

$$\text{TKE} / m = \bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

- Summationsschreibweise (wie vorher)  $\Rightarrow$

$$\bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u_i'^2})$$

- Man erkennt sofort, dass TKE/m nichts anderes ist, als die Varianz der Geschwindigkeit geteilt durch 2.
- Deshalb beginnt man mit der prognostischen Gleichung für die Summe der Varianzen der Geschwindigkeit und teilt diese durch 2  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

I
II
III
IV
V
VI
VII

- Term I**      Änderungsrate der TKE
- Term II**      Advektion der TKE durch den mittleren Wind
- Term III**      Produktions- oder Verbrauchsterm von TKE durch den Wärmefluss (hängt davon ab, ob dieser positiv oder negative ist; engl. buoyancy prod. term)
- Term IV**      Produktionsterm von TKE durch mechanische Vorgänge, z.B. Scherung (Impulsfluss)
- Term V**      Turbulenter Transport von TKE; er beschreibt wie TKE durch turbulente Eddies ( $u'_j$ ) umher bewegt wird, in der Regel von unten nach oben)

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} & + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} & = & \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} & - & \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} & - & \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} & - & \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} & - & \varepsilon \\
 \text{I} & \text{II} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VI} & & \text{VII}
 \end{array}$$

**Term VI** Druckkorrelationsterm der beschreibt, wie TKE durch die Druckstörungen neu verteilt wird; ist häufig mit Schwerewellen assoziiert

**Term VII** viskose Dissipation der TKE, d.h. Umwandlung von TKE in Wärme.



Wähle ein Koordinatensystem, welches nach der mittleren Windrichtung ausgerichtet ist, nehme horizontale Homogenität an und vernachlässige Absinken der Luft  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

I

III

IV

V

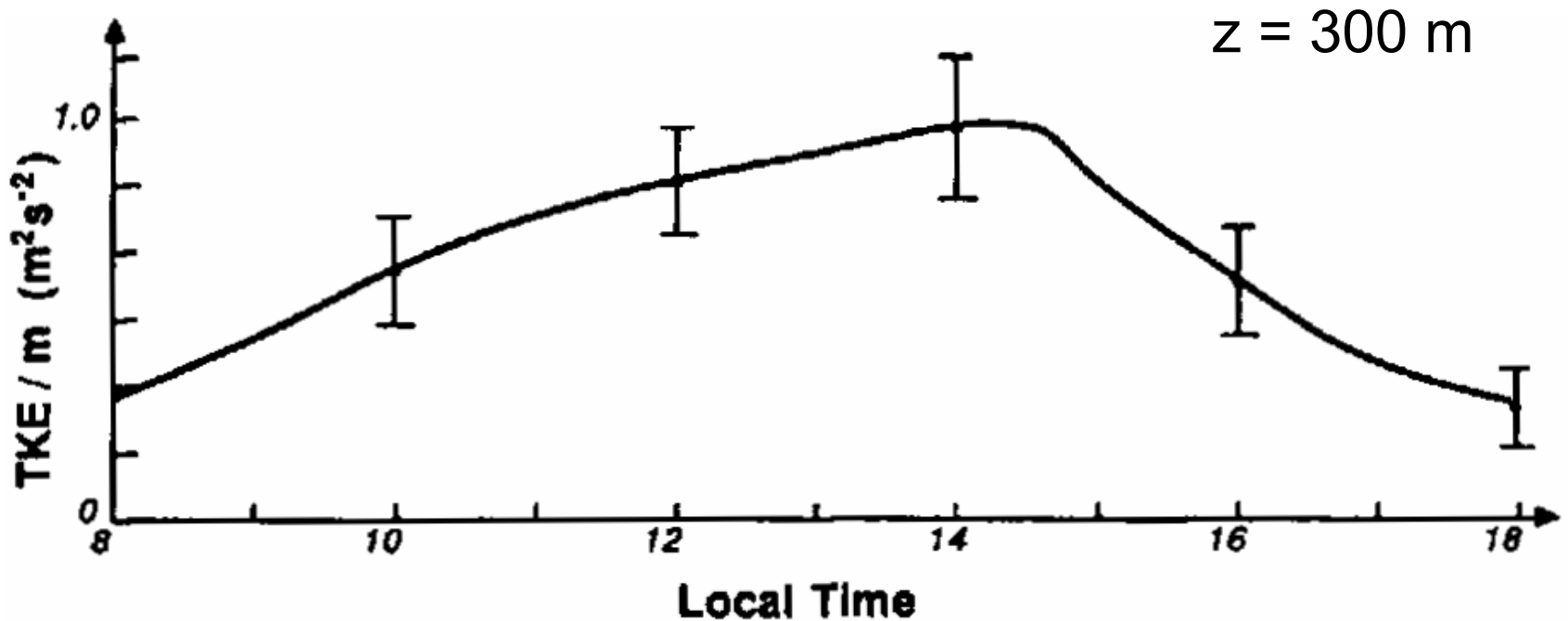
VI

VII

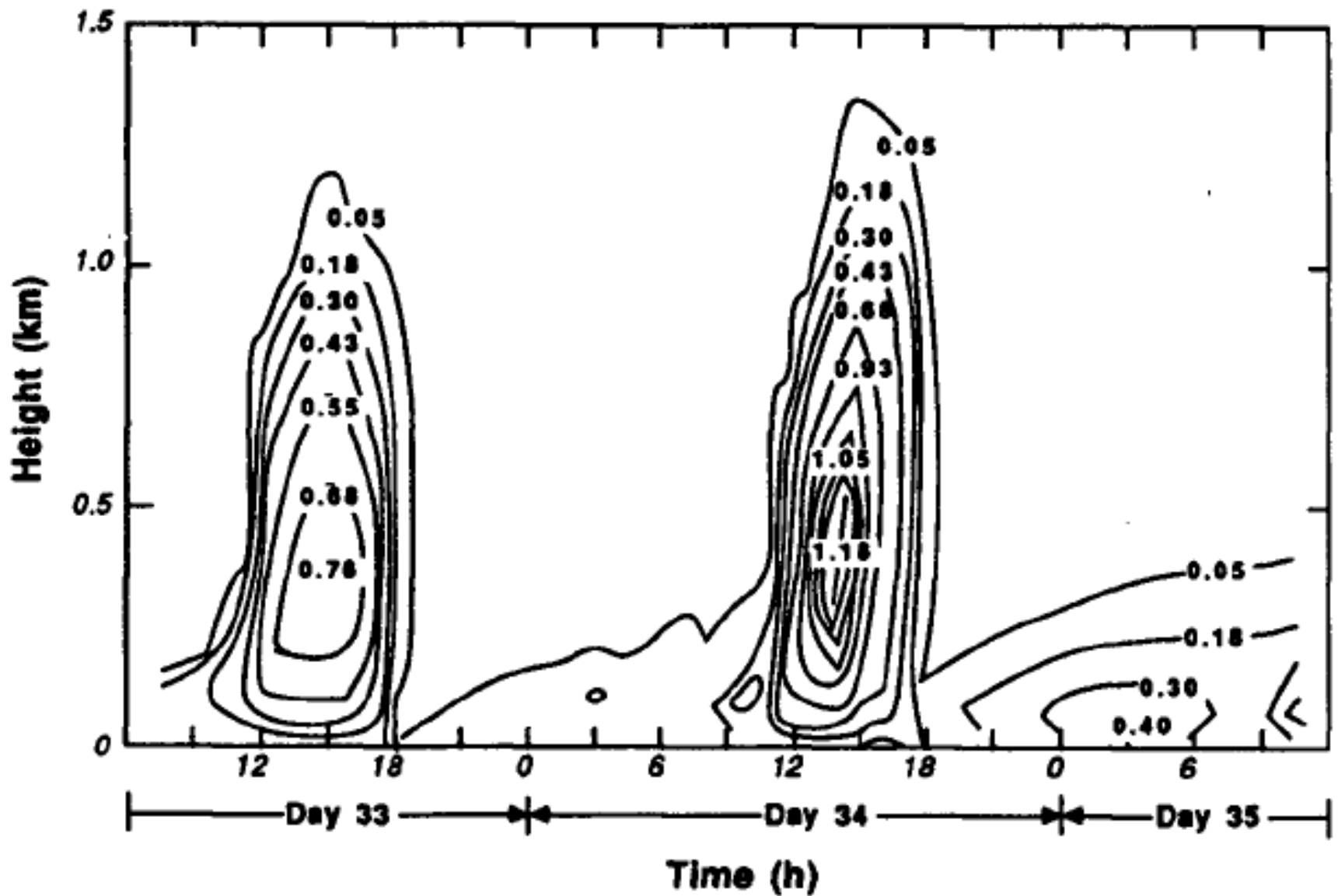
- Turbulenz ist dissipativ! Term VII ist ein Verlustterm der immer dann existiert, wenn TKE ungleich Null ist.
- Physikalisch heißt das, dass Turbulenz mit der Zeit schwächer wird und verschwindet, bis sie lokal neu erzeugt oder heran transportiert wird.
- Somit ist TKE keine Erhaltungsgröße.
- Die GS kann nur dann turbulent sein, wenn es einzelne physikalische Prozesse gibt, die Turbulenz erzeugen.

# Beiträge zum TKE Budget

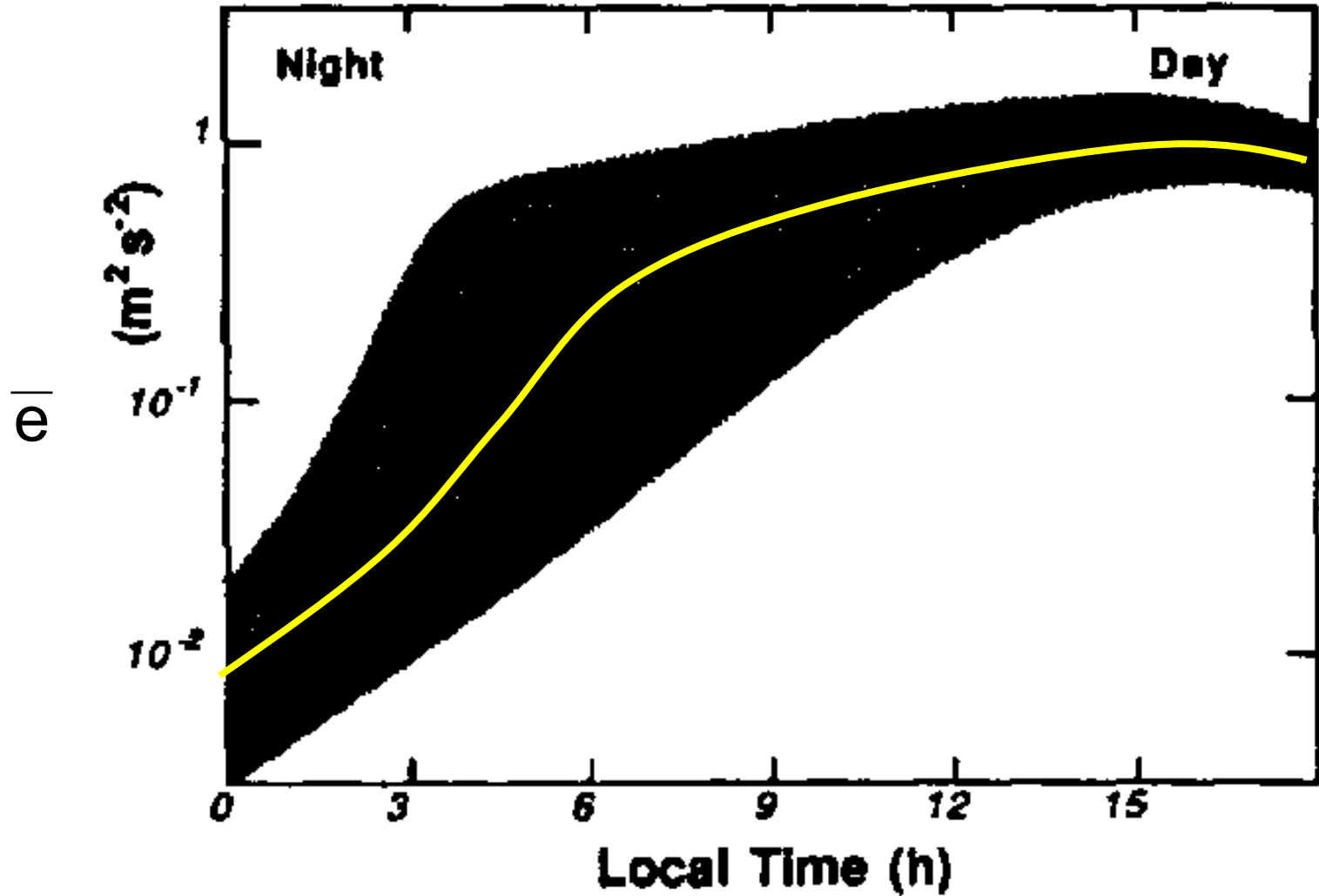
## ➤ Term I: Zeitliche Variation



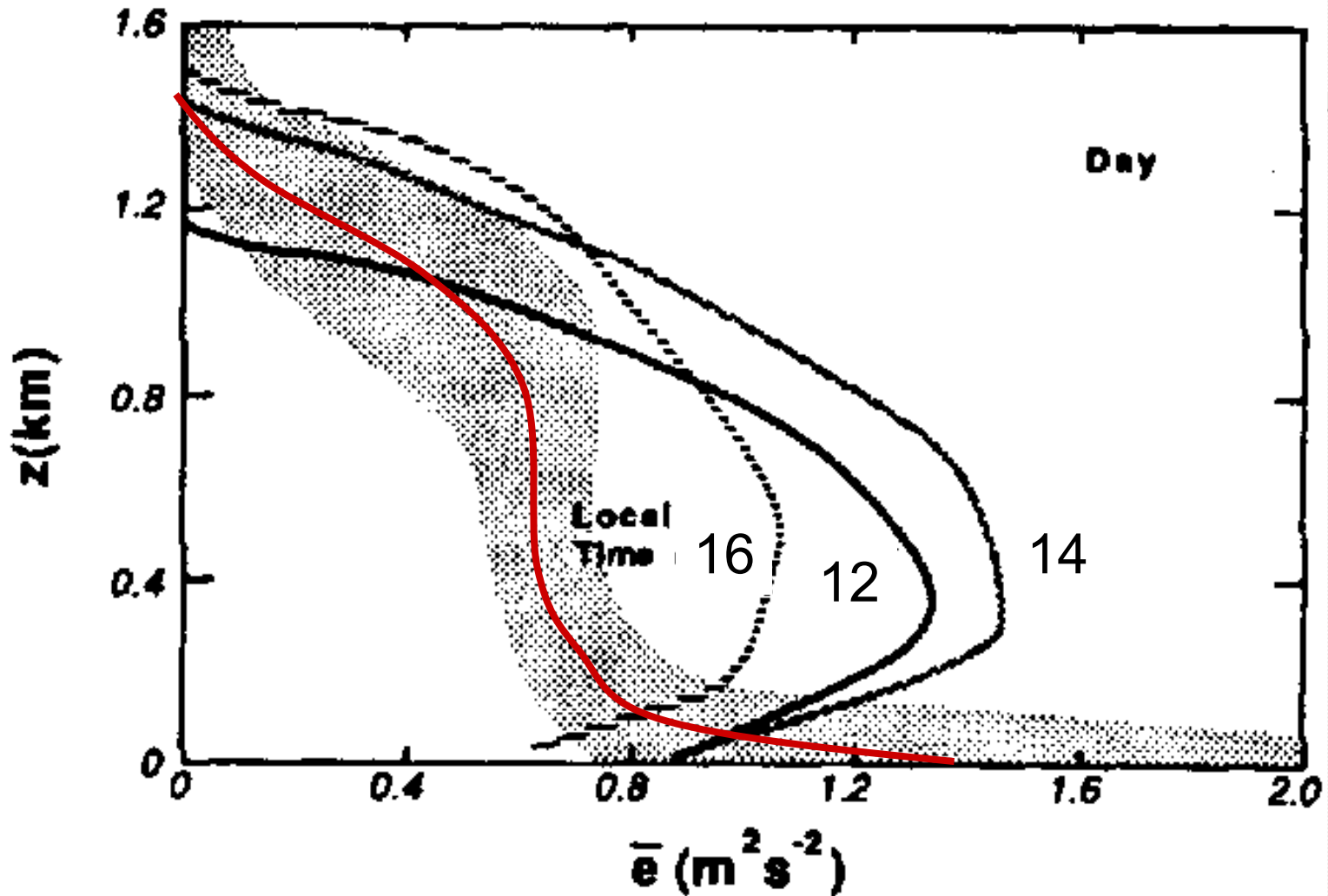
Beispiel für einen typischen Tagesgang der TKE bei konvektiven Bedingungen.



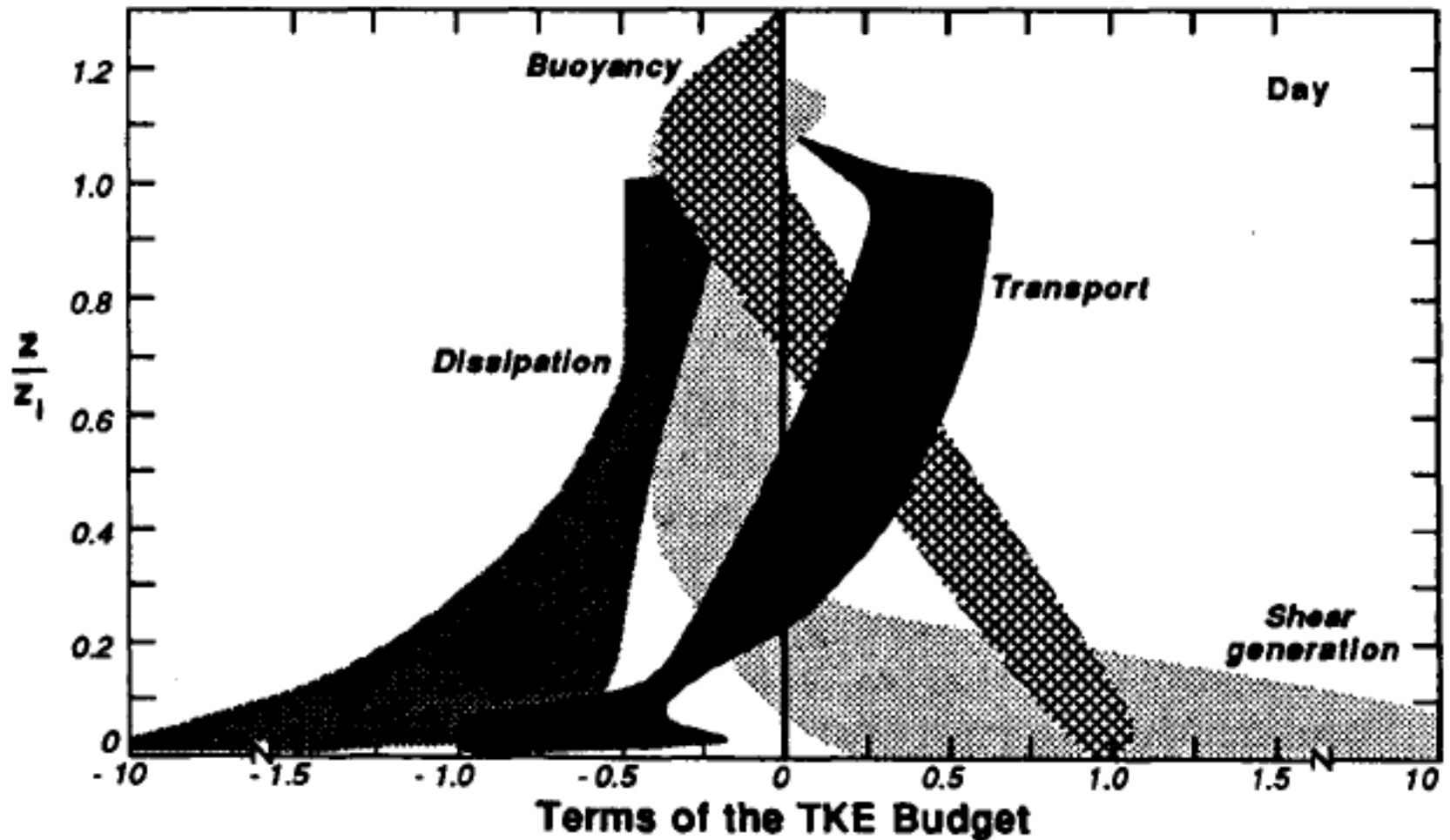
Modellierte zeitliche und räumlich Variation der TKE  
(Einheiten in  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ).



Beispiel für den Variationsbereich des Tagesgangs der TKE im November, beobachtet in der Bodenschicht. Man erkennt, dass die TKE um Größenordnungen variiert.



Die Linien zeigen modellierte vertikale Profile der TKE, wenn freie Konvektion dominiert. Das "rote" Profil tritt auf, wenn sowohl Scherung als auch Auftrieb berücksichtigt werden.



Normalisierte Terme TKE Gleichung. Die schattierten Bereiche geben den Wertebereich der einzelnen Terme an. Alle Terme wurden durch  $w_*^3/z_i$  dividiert (siehe unten); der Wert hierfür ist in der Größenordnung von  $10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-3}$ .

# Advektion

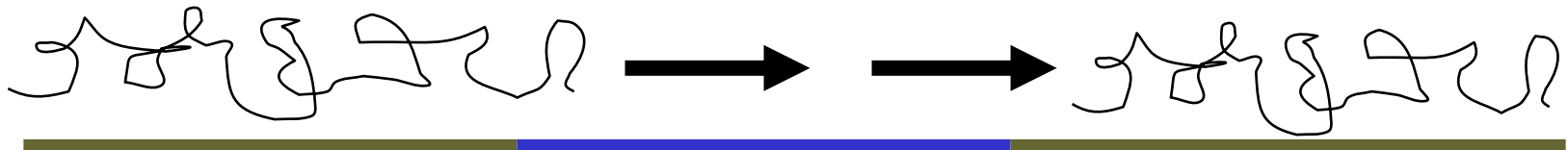
- Term II: Advektion
- Über diesen Term weis man nur sehr wenig.
- Wenn man über einen horizontalen Bereich von mehr als  $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$  mittelt wird häufig angenommen, dass die TKE in der horizontalen nur wenig variiert und der Advektionsterm somit vernachlässigbar ist.
- Dies ist eine durchaus angemessene Annahme über den meisten Landoberflächen.
- Auf kleineren Skalen ist dieser Term aber sicherlich wichtig.



Beispiel

# Advektion

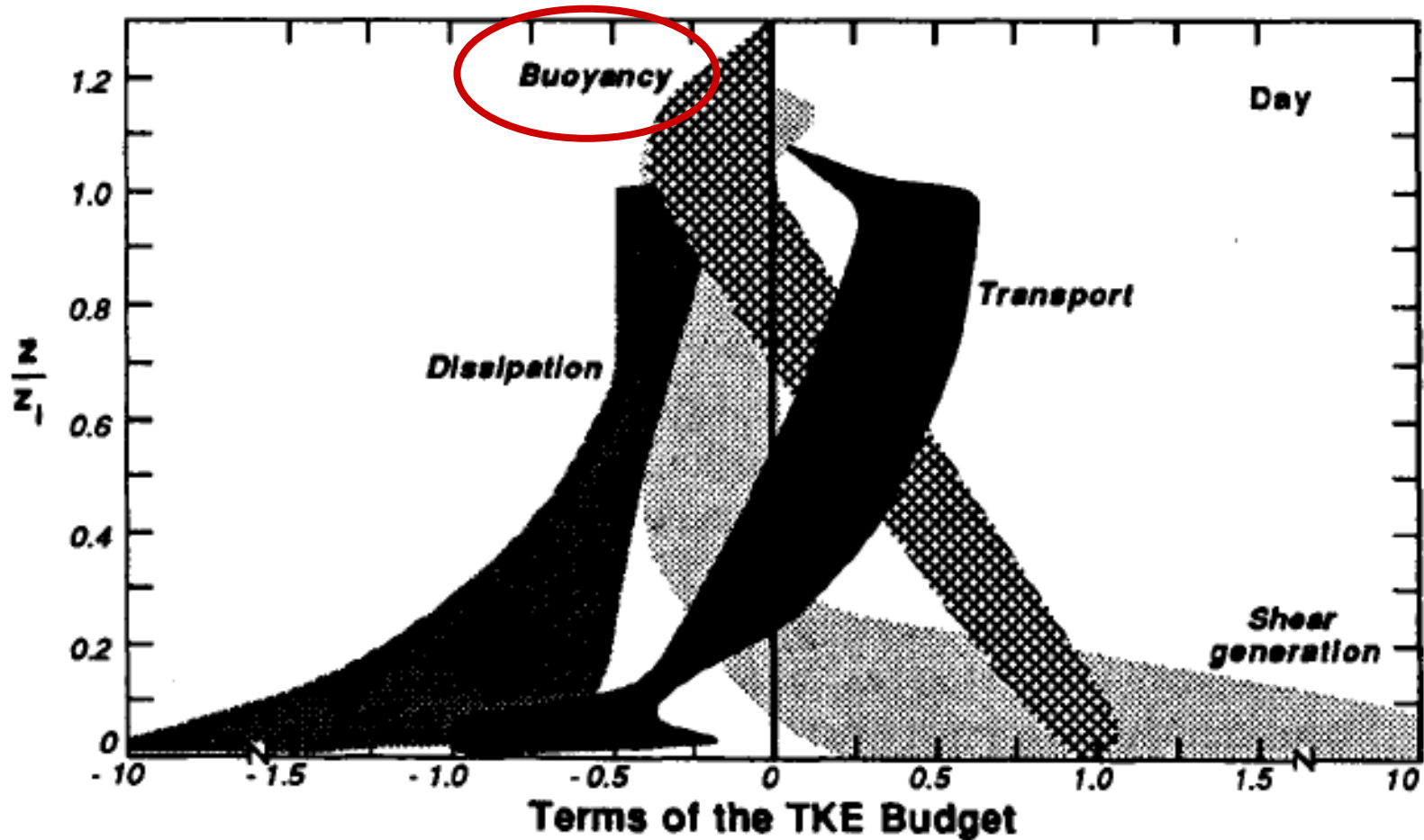
## Advektion der TKE



- Angenommen wir haben ein Wasserreservoir, welches kälter ist als die umgebende Landfläche. Durch das Fehlen der Heizung über dem Reservoir würde hier die Turbulenz in der darüberliegenden Luft zerfallen, während die Luft über den angrenzenden Landoberflächen im Zustand aktiver Konvektion verbleibt. Ein mittlerer Wind, der Luft über die Ufer der Wasserfläche hinweg advehiert, würde zu einer signifikanten Änderung des TKE Budgets führen.
- Über Ozeanen kann der Advektionsterm vernachlässigbar sein, auch für kleinere Skalen.



# Produktion / Verlust von Auftrieb

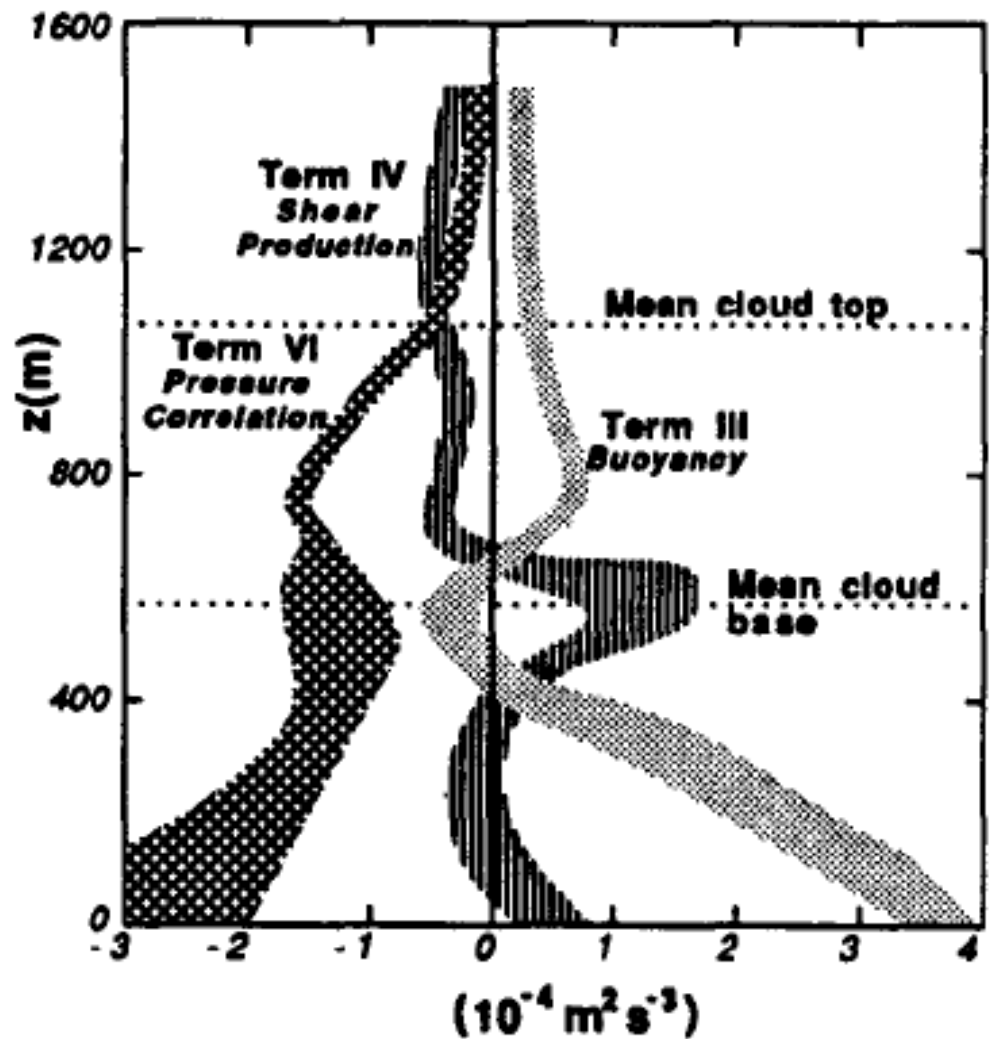
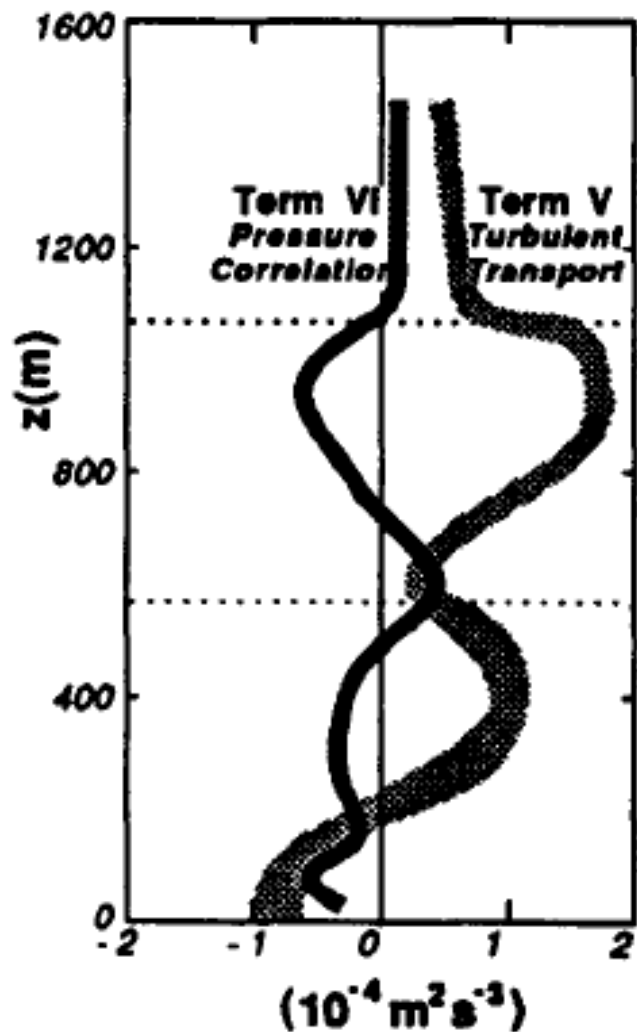


Entscheidend ist hier der vertikale Wärmefluss; er ist in den unteren 2/3 der GS positiv und nimmt mit der Höhe in etwa linear ab.

- Term III: Da dieser Term an Tagen mit freier Konvektion sehr wichtig ist, wird er oft zur Normalisierung aller anderen Terme benutzt.
- Am Erdboden wird Term III =  $w_*^3 / z_i$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{z_i}{w_*^3} \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} & = & \frac{gz_i}{w_*^3 \bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} & - & \frac{z_i \overline{u'w'}}{w_*^3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & - & \frac{z_i}{w_*^3} \frac{\partial (\overline{w'e})}{\partial z} & - & \frac{z_i}{w_*^3} \bar{\rho} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} & - & \frac{z_i \varepsilon}{w_*^3} \\
 \text{I} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VI} & & \text{VII}
 \end{array}$$

- Per Definition wird Term III an der Erdoberfläche gleich Eins gesetzt.
- Term III wirkt nur auf die vertikale Komponente der TKE.
- Dieser Produktionsterm ist also anisotrop und damit für einen Teil der Umwandlung von vertikaler KE in horizontale Richtungen verantwortlich.



**Terms of the TKE Budget**

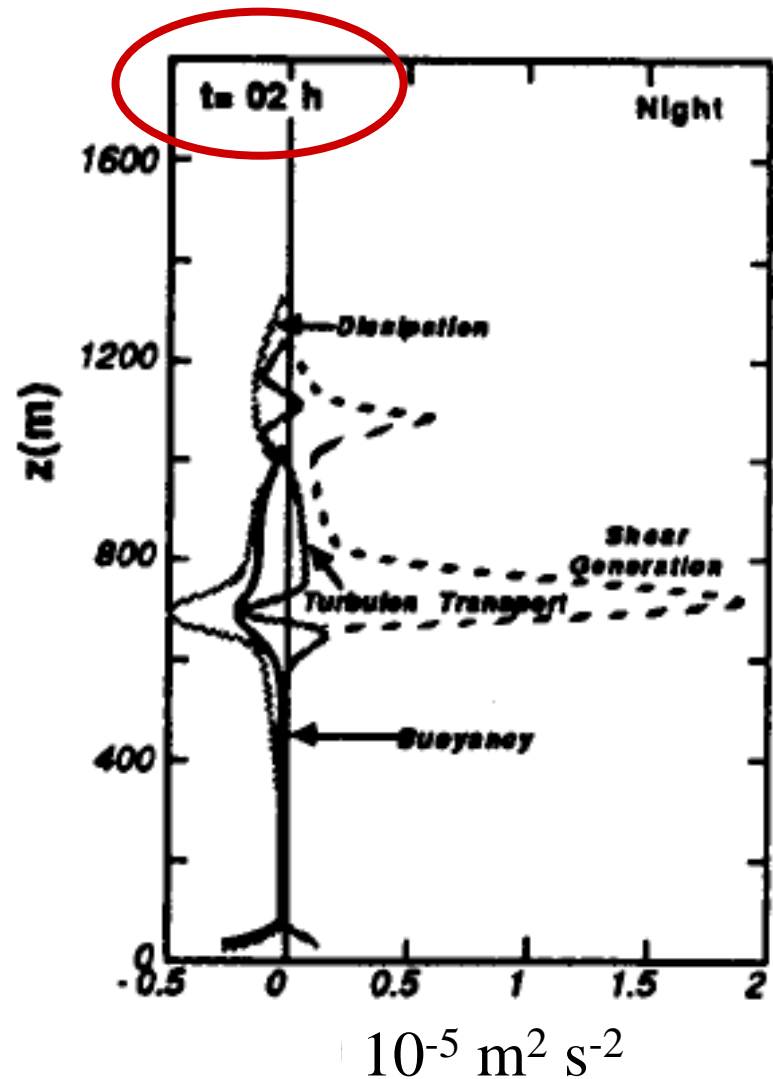
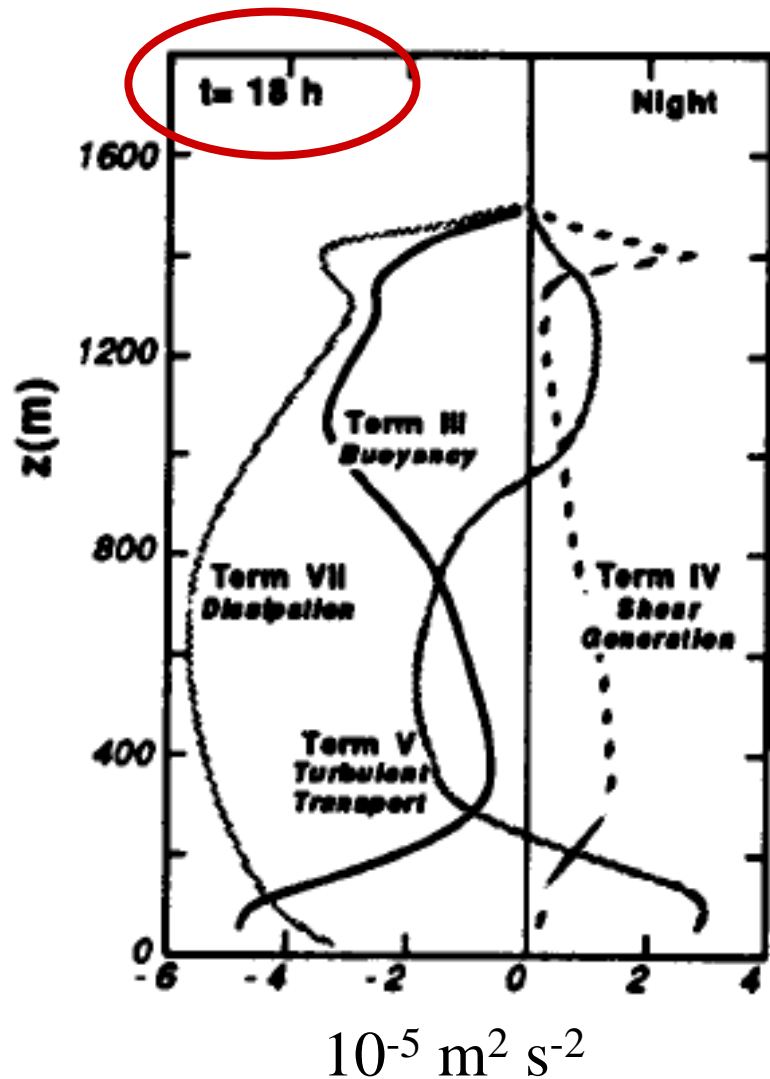
Wertebereich der einzelnen Terme in der TKE Budgetgleichung für eine tropische GS mit Wolkenbedeckung am oberen Rand. Der Transportterm (= "Umverteilungsterm") ist dabei in einen Druckkorrelationsterm (Term VI) und einen turbulenten Transportterm (V) aufgeteilt.

# Verluste

- In einer statisch stabil geschichteten Atmosphäre wird ein Luftpaket, welches durch Turbulenz vertikal verschoben ist, eine (Auftriebs-) Kraft erfahren, die es in seine Ausgangshöhe zurück drückt.
- In diesem Fall tendiert die statische Stabilität dazu TKE zu unterdrücken oder zu verbrauchen und ist deshalb mit einem negativen Wert von Term III assoziiert.
- Diese Bedingungen findet man in einer stabilen nächtlichen GS über Land oder immer dann, wenn die Oberfläche kälter ist als die darüberliegende Luft.



**Beispiel**



**Terms of the TKE Budget**

Modelliertes Budget der TKE am Abend (t = 18 h) und in der Nacht (t = 02 h).

# Produktion durch mechanische Vorgänge

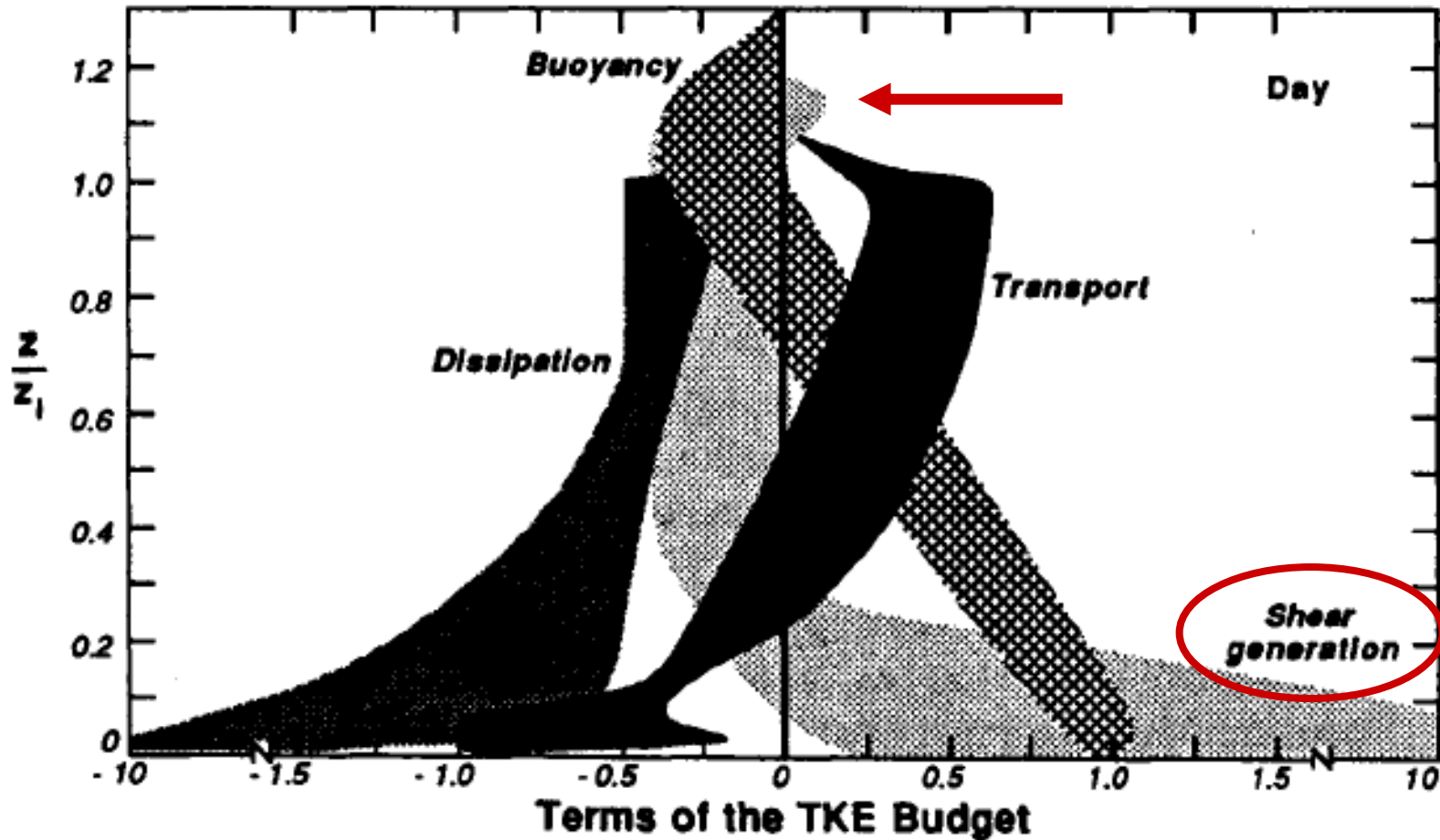
- Betrachtung von Term IV:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

I                    III                    IV                    V                    VI                    VII

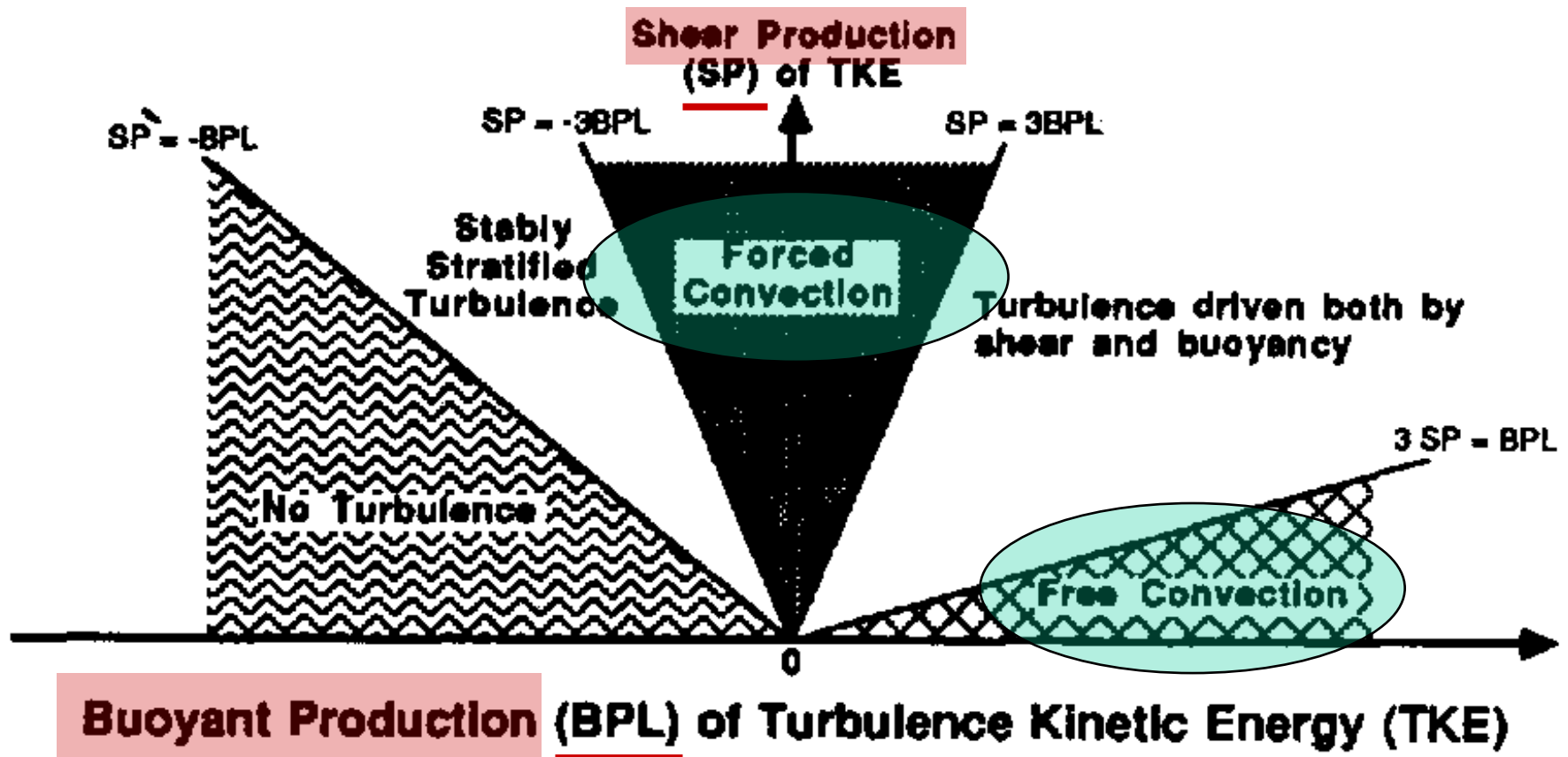
- Wenn ein turbulenter Impulsfluss bei einer mittleren Windscherung existiert, führt die Wechselwirkung zwischen den beiden zur Erzeugung von mehr Turbulenz.
- Term IV ist ein negatives Vorzeichen voran gestellt. Da der Impulsfluss in der Regel ein umgekehrtes Vorzeichen als die mittlere Windscherung hat, ergibt sich, dass Term IV ausschließlich ein Produktionsterm für Turbulenz darstellt.

# Produktion durch mechanische Vorgänge



Größte Werte werden in Bodennähe gefunden. Ein relatives Maximum der Scherproduktion findet man am oberen Rand der ML wegen der Windscherung an der "Entrainment"-Zone (später mehr!).

# Produktion von TKE durch Scherung und Auftrieb

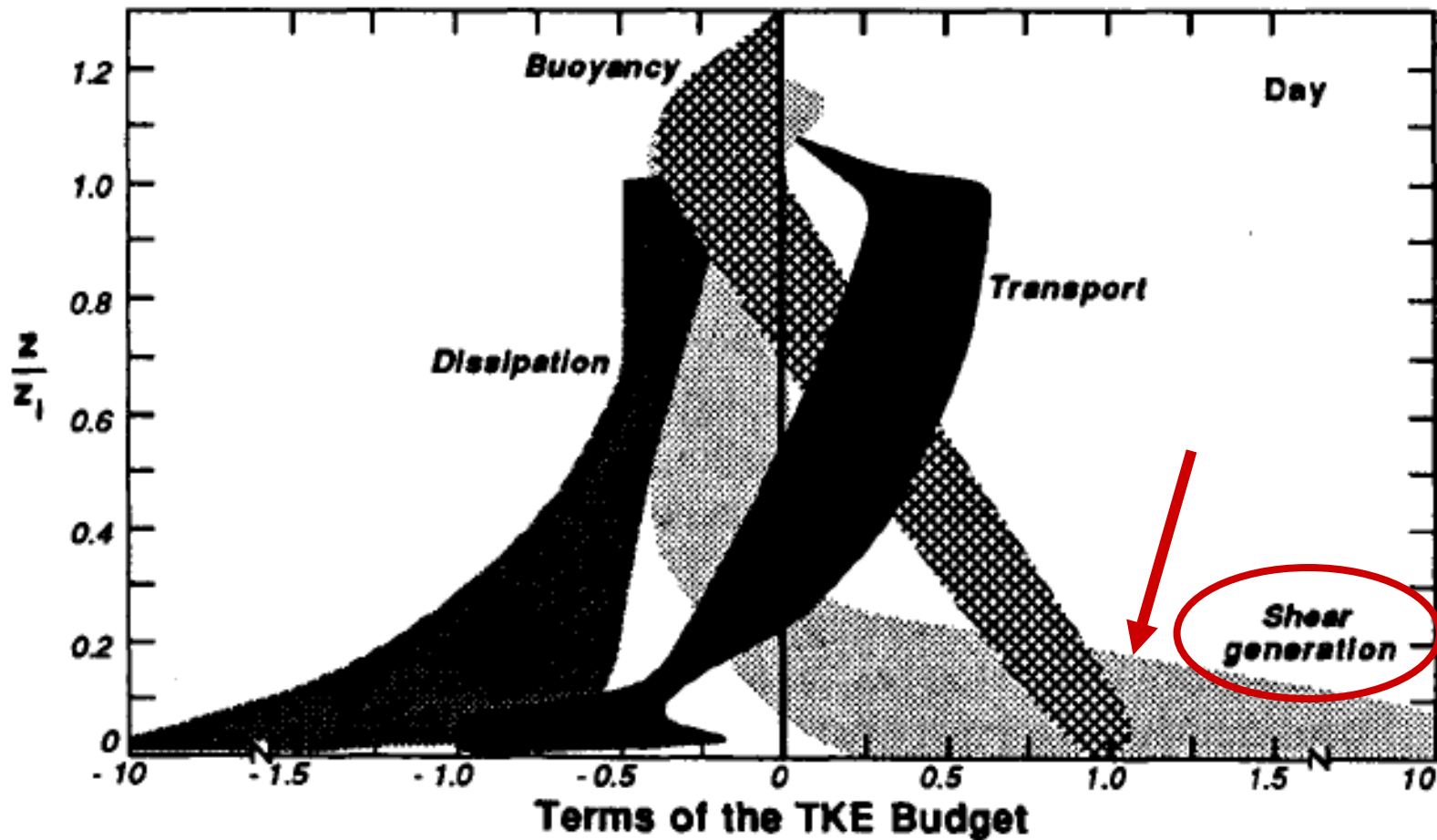


Skizzierte Regime für freie und angetriebene Konvektion.



- Die Größe des Scherproduktionsterms in der Bodenschicht ist an einem windigen Tag offensichtlich größer als an einem (dynamisch) ruhigen Tag.
- In synoptisch-skaligen Zyklonen deuten starke Winde und bewölkter Himmel darauf hin, dass angetriebene Konvektion (engl. forced convection) vorhanden ist.
- An vielen Tagen ist die Konvektion weder in einem Zustand freier oder angetriebener Konvektion, da beide Terme (Scherung, Auftrieb) zur Produktion von Turbulenz beitragen.
- In der Nacht über Land oder immer wenn der Boden kälter ist als die Luft, ist der Scherterm der Einzige der, Turbulenz erzeugt.

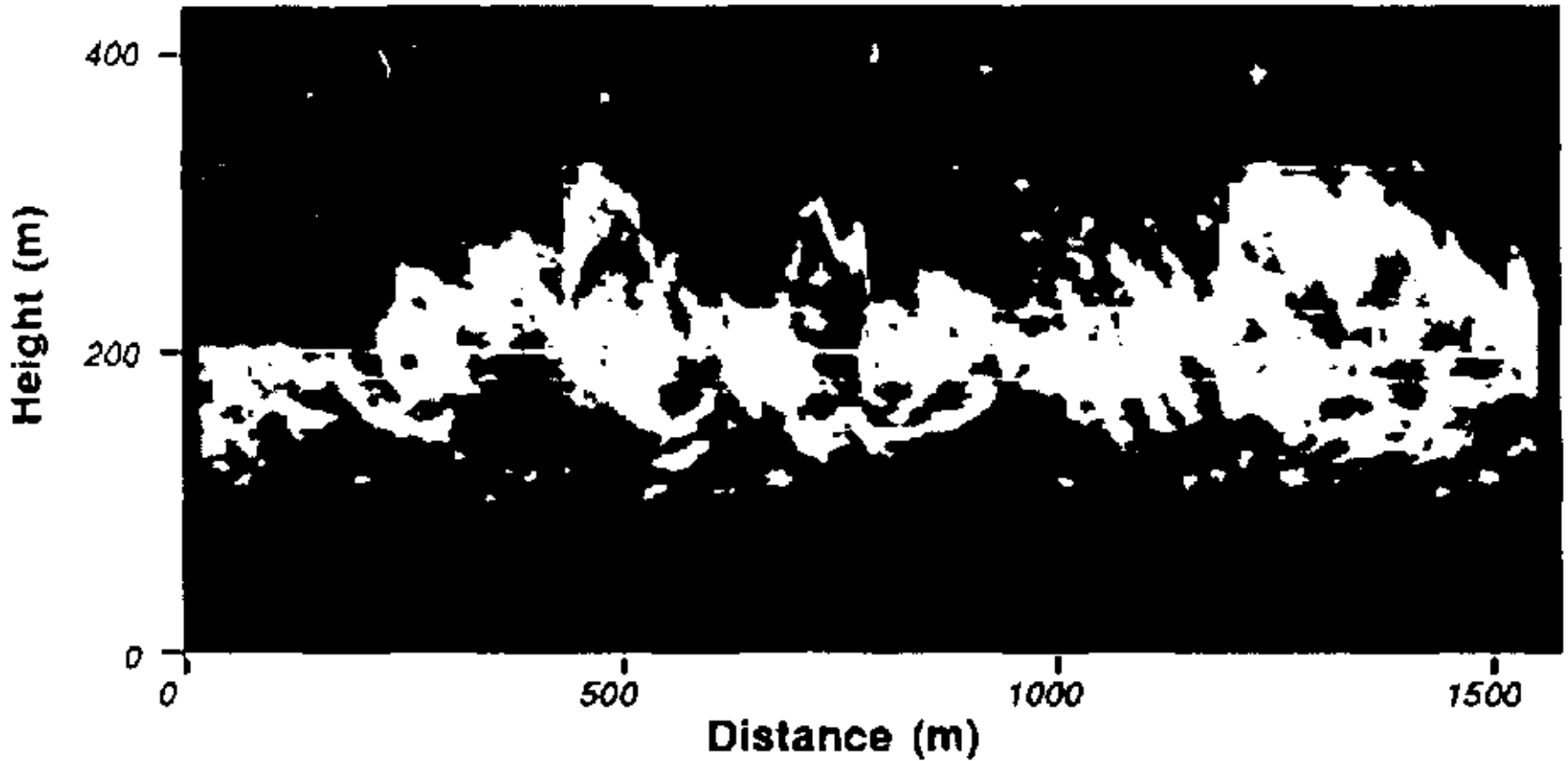
# Produktion durch mechanische Vorgänge



Größte Werte werden in Bodennähe gefunden. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die nächtliche GS dünner ist als die ML am Tage.

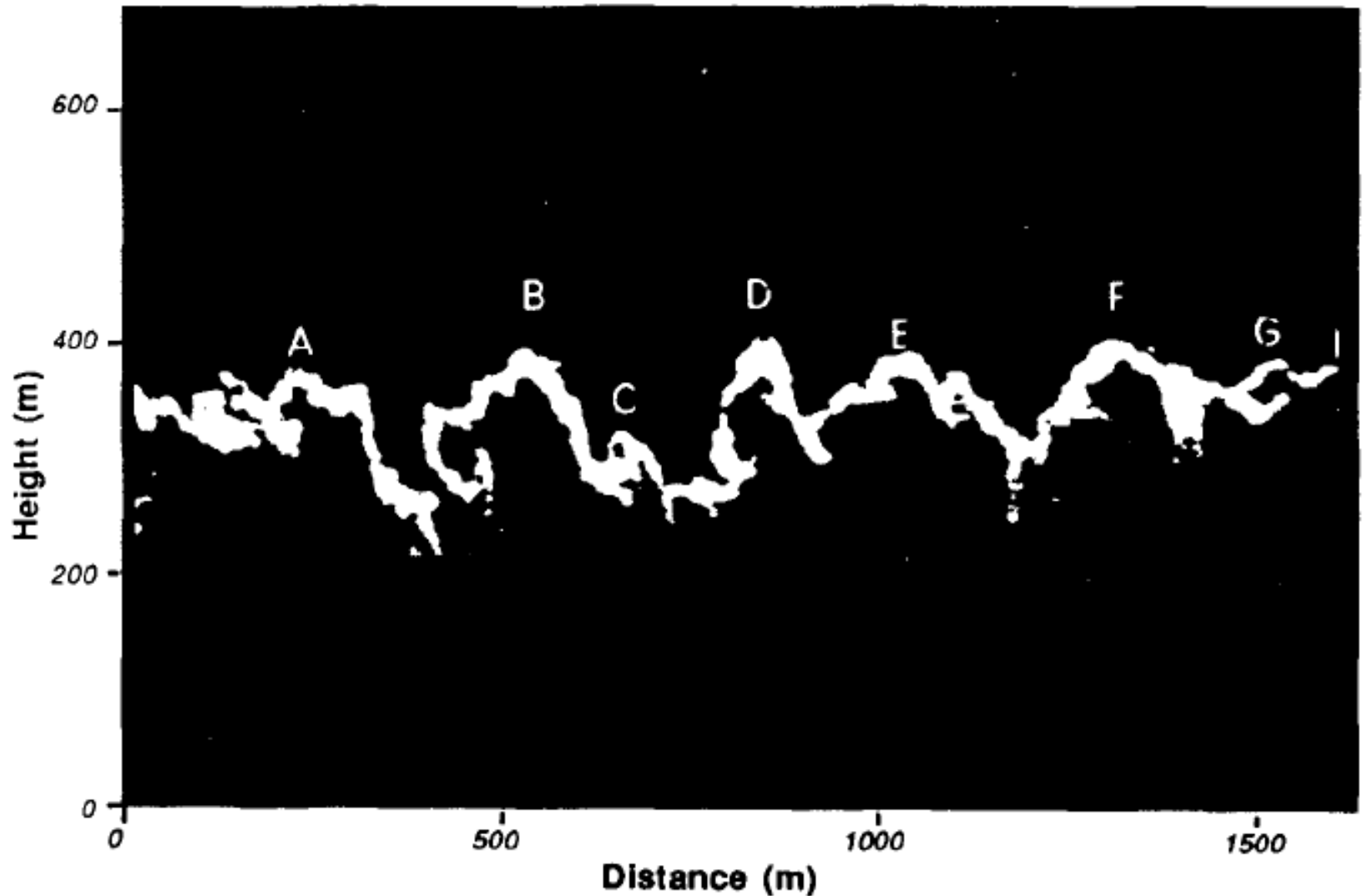
- Die größten Scherungen sind mit Änderungen der u- und v-Komponente des mittleren Windes mit der Höhe verbunden.
- Außer in Gewittern ist die Scherung aufgrund von Änderungen der w-Komponente in der GS vernachlässigbar.
- Aus den Gleichungen für die einzelnen Komponenten der Varianz folgt, dass die Scherproduktion in den x- und y-Komponenten der TKE am größten ist. Daher stellt die Scherproduktion auch einen anisotropen Antrieb dar - am stärksten in der Horizontalen.
- Sowohl der Scherproduktionsterm als auch der Auftriebsterm können anisotrope Turbulenz erzeugen.
- Der Unterschied ist, dass Scherung Turbulenz vorwiegend in horizontalen Richtungen erzeugt, während der Auftrieb im wesentlichen Turbulenz in vertikaler Richtung generiert.
- Die Unterschiede werden in den folgenden Abbildungen deutlich :

**a) Mechanical** Turbulenz durch Scherung



**Fig. 5.8** Radar images of turbulence near the boundary layer top, showing (a) forced convection, and (b) free convection. After Noonkester (1974).  
siehe nächstes Bild für (b)

## b) Thermal Turbulenz durch Auftrieb



Konvektion, die durch Scherung verursacht wird, ist viel chaotischer als thermisch angetriebene Konvektion!

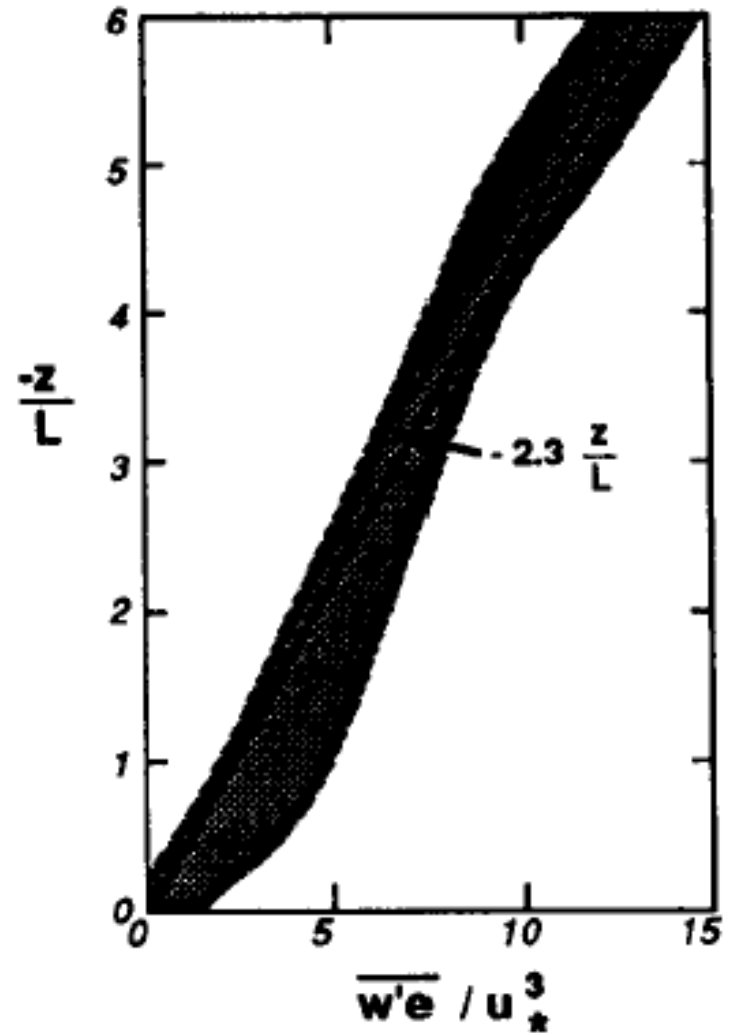
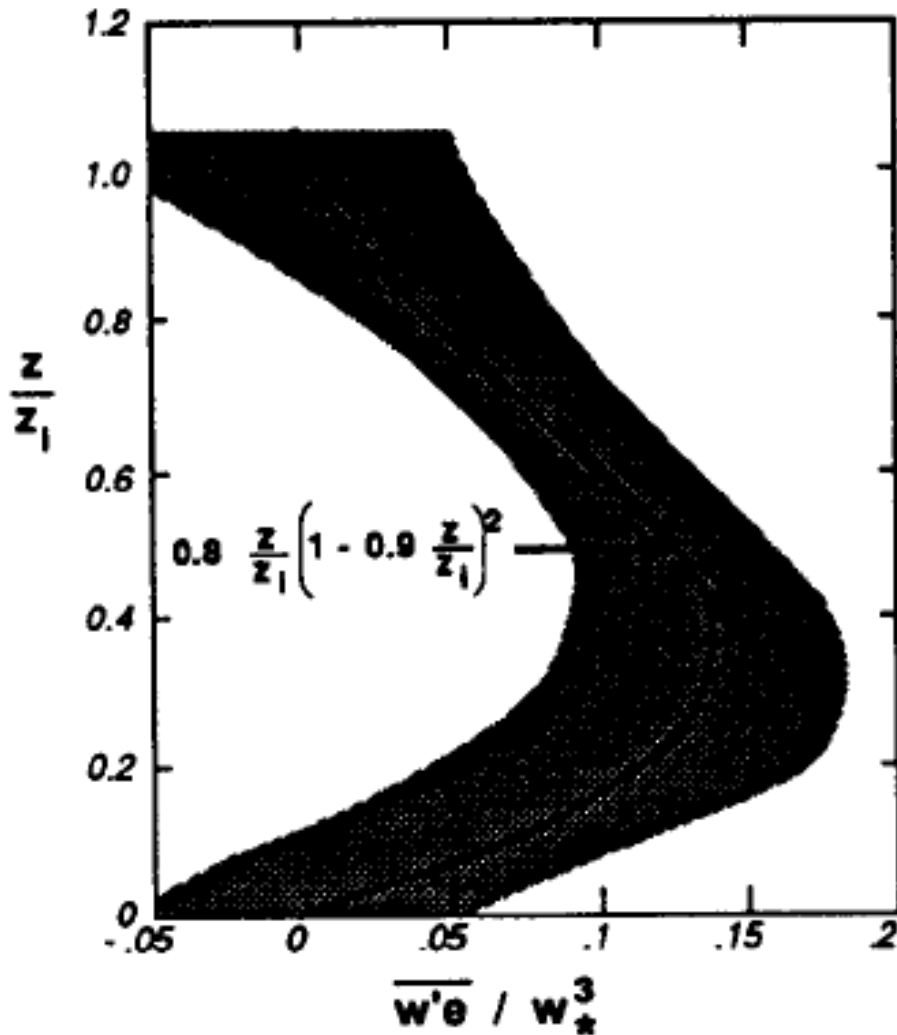
# Turbulenter Transport

Term V:

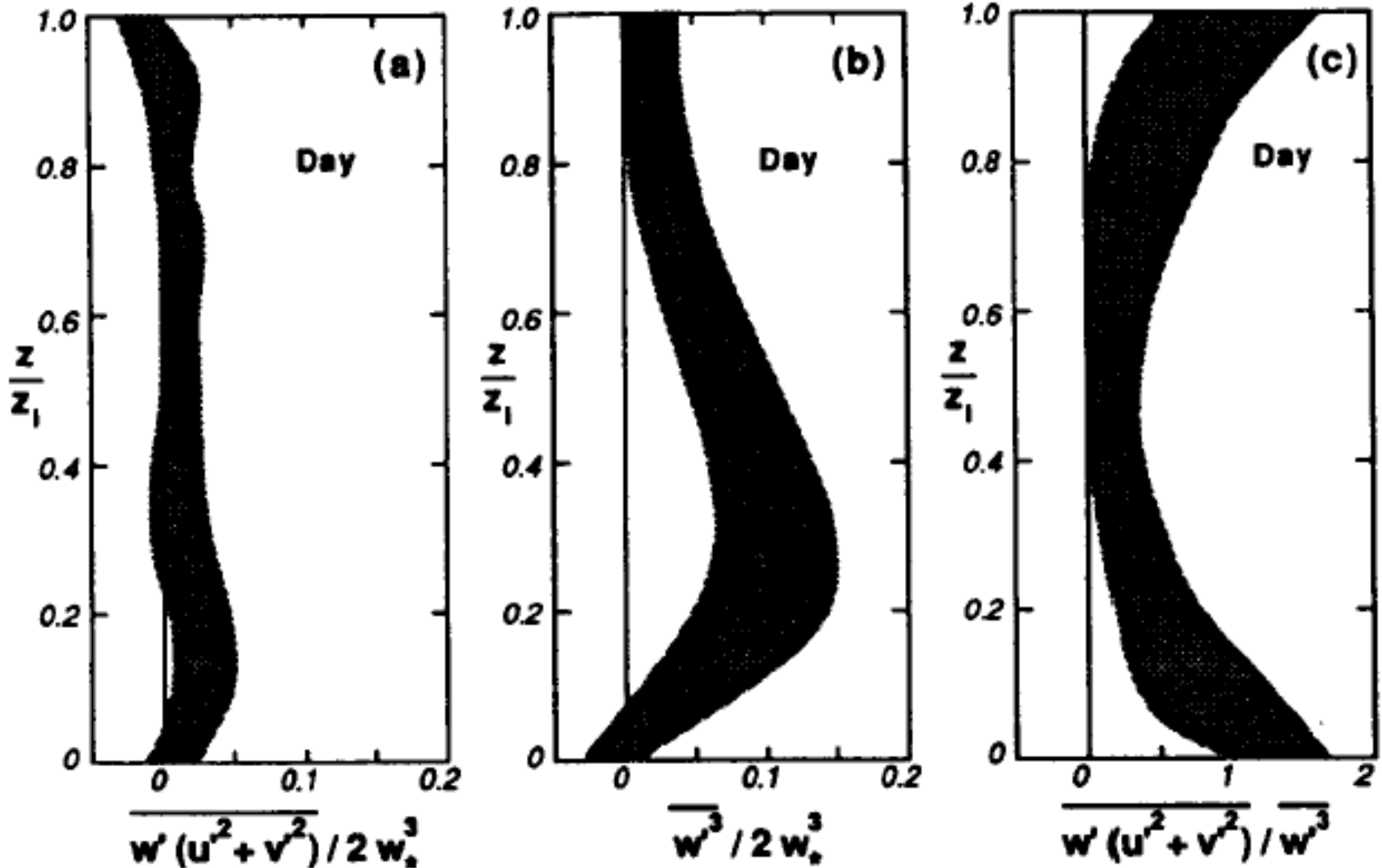
$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\frac{\partial (w'e)}{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

V

- $\overline{w'e}$  repräsentiert den vertikalen turbulenten Fluss von TKE.
- Wie auch für die anderen Flüsse gilt, dass die Änderung des Flusses mit der Höhe wichtiger ist, als die absolute Größe des Flusses selbst.
- Term V ist ein Flussdivergenzterm; wenn der Fluss, der in eine Schicht hinein geht größer ist als der, der hinaus geht, nimmt die Größe der TKE zu.
- Dieser Term verteilt die TKE einfach um: wenn man über die Dicke der ML integriert, gibt es keinen Beitrag.



Wertebereich von Vertikalprofilen der normalisierten vertikalen Flüsse der TKE unter Ausnutzung der Skalierung der ML (links) und der Skalierung der Bodenschicht (rechts);  $L$  ist die Obukhov Länge (siehe unten).



(a) Wertebereich von Vertikalprofilen des normalisierten vertikalen Flusses der horizontalen Varianz; (b) vertikaler Fluss der vertikalen Varianz; (c) das Verhältnis der beiden am Tage.



# Druck Korrelation - Turbulenz

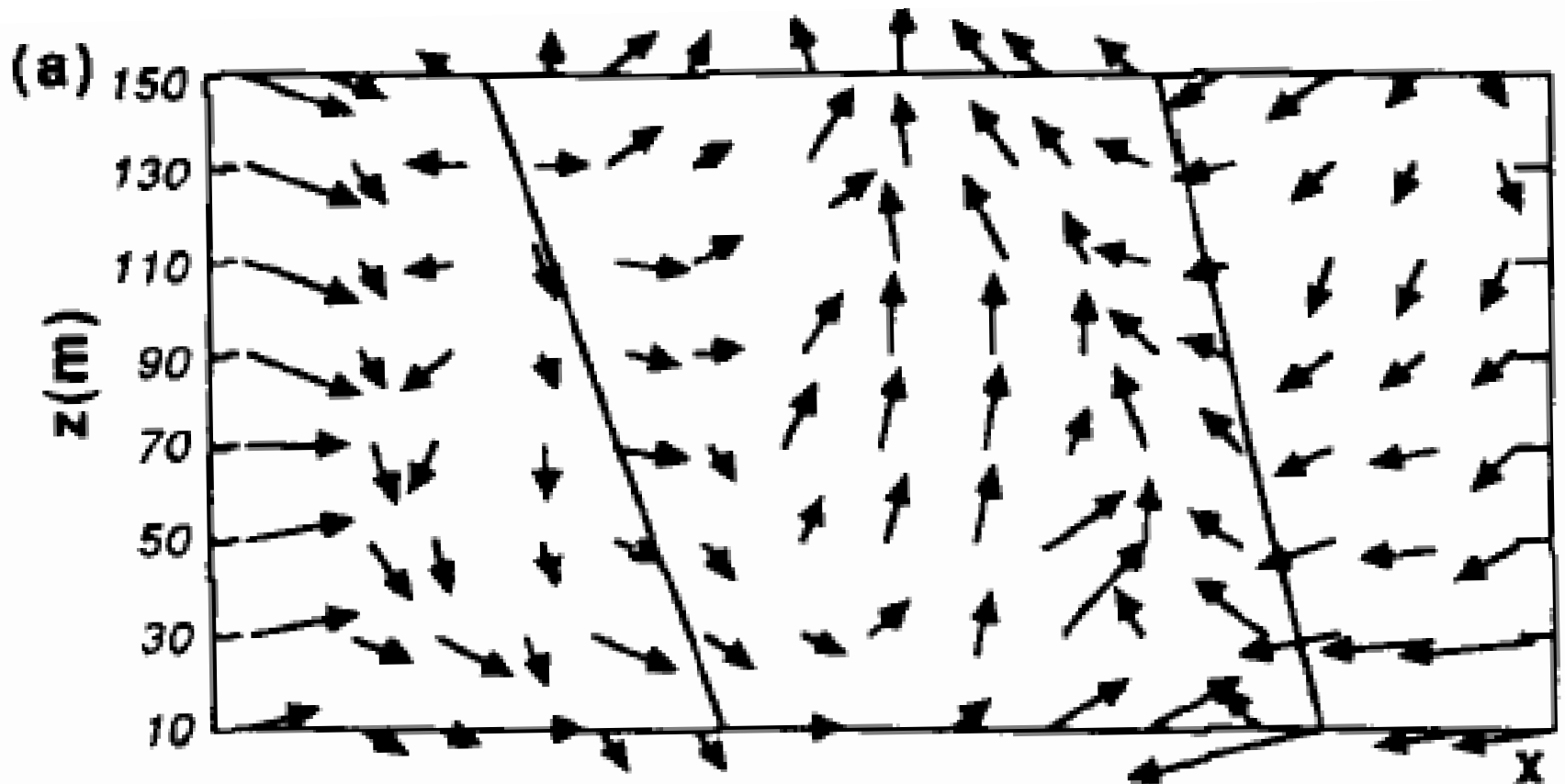
VI

Term VI:

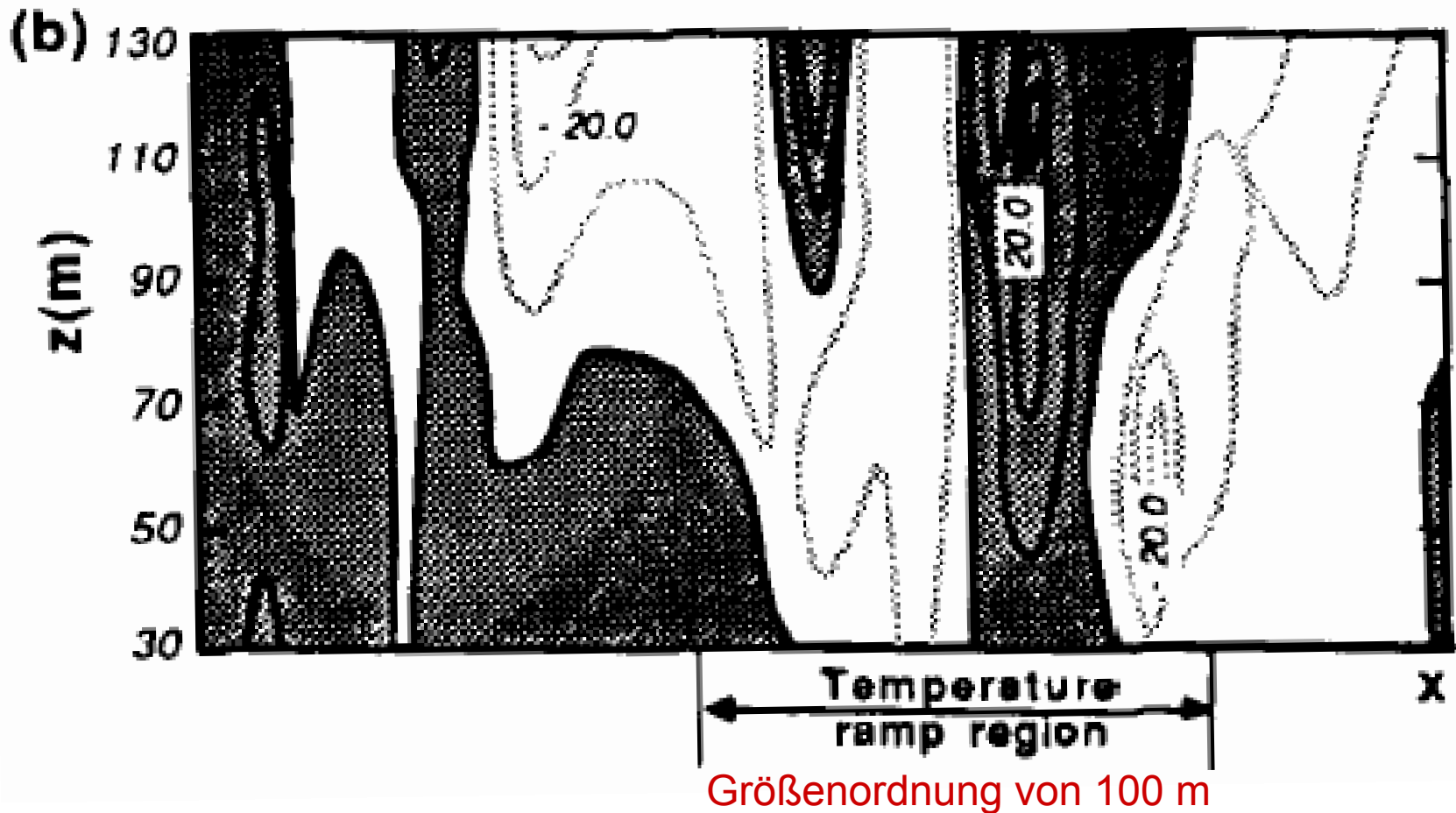
$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

- Stationäre Druckfluktuationen sind in der Atmosphäre überaus schwierig zu messen.
- Die Größe dieser Veränderungen sind sehr klein, etwa 0.005 kPa (0.05 hPa) in der konvektiven Bodenschicht bis 0.001 kPa (0.01 hPa) oder weniger in der ML.
- Drucksensoren mit ausreichender Empfindlichkeit sind durch große Druckänderungen, die durch turbulente oder mittlere Bewegungen verursacht sind, zu sehr beeinflusst.  
⇒ Korrelationen, wie z.B.  $w'p'$  bestimmt aus Messdaten, enthalten meist mehr "Rauschen" als ein wirkliches Signal.

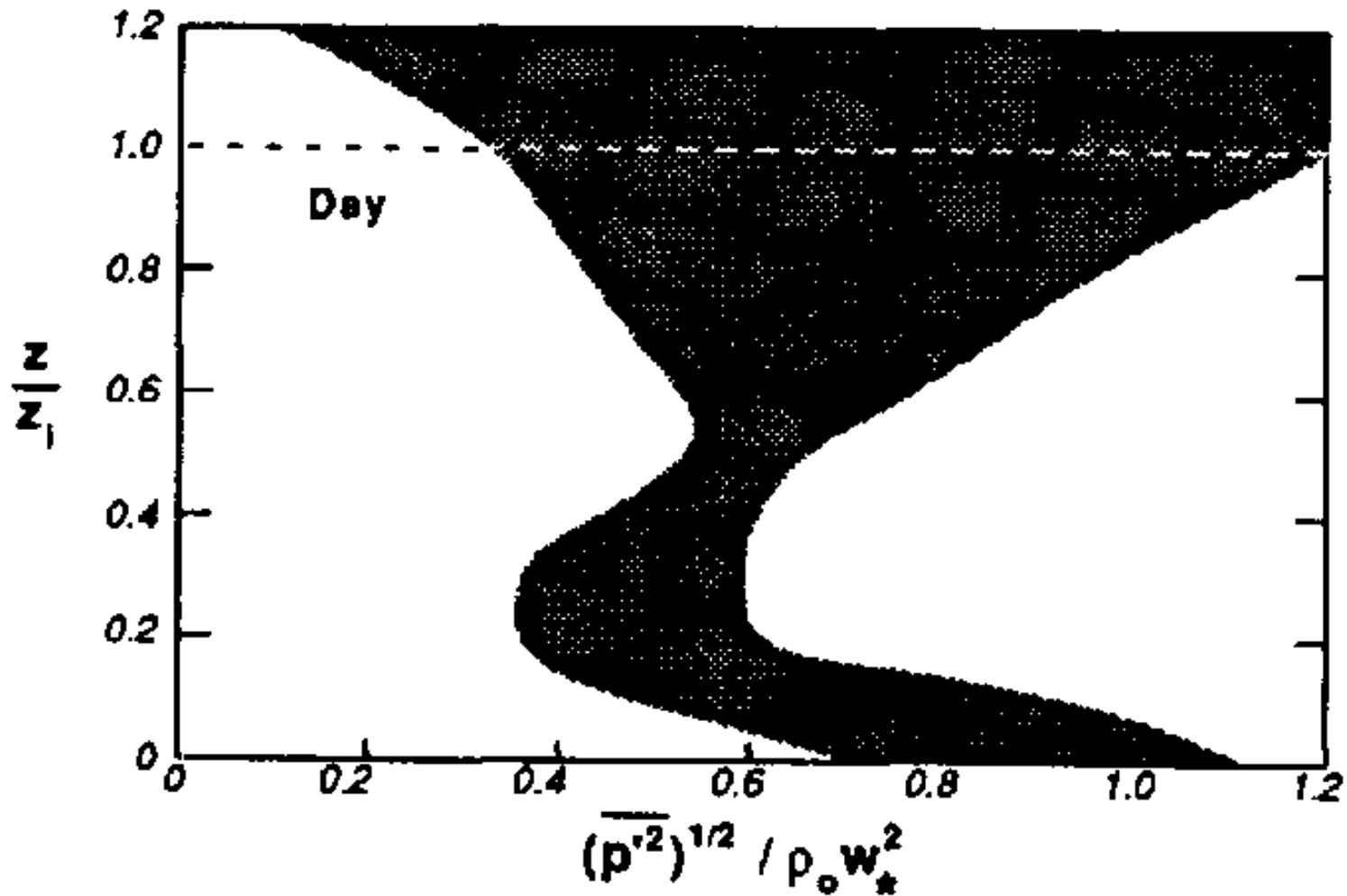
- Das, was man über das Verhalten des Druckkorrelations-term nur unzureichend weiß, schätzt man als "Rest" in der Budgetgleichung ab, wie vorher besprochen.
- Wenn alle anderen Terme in der Budgetgleichung bestimmt (d.h. gemessen oder parametrisiert) wurden, dann schließt der "Restterm", der notwendig ist, um die Gleichung zu balancieren, die unbekanntenen Terme zusammen mit den akkumulierten Fehlern ein.
- Eine offensichtliche Gefahr von diesem Ansatz ist, dass die akkumulierten Fehler der anderen Terme sehr groß werden können.
- Abschätzungen von  $\overline{w'p'}$  in der Bodenschicht, die diese Methode anwenden, sind in der nächsten Abbildung (Teil b) dargestellt, zusammengestellt als Mittel einer großen Anzahl von konvektiven Strukturen.



(a) Zirkulationsmuster durch einen mittleren konvektiven Thermal (mittel aus mehreren Ereignissen) in einem vertikalen Schnitt . Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen die Abweichung vom mittleren Wind. Durchgezogene Linien beschreiben die Grenzen des Temperaturanstiegs, der mit dem thermischen Aufsteigen (freie Konvektion) verbunden ist.



(b) Konturplot von  $w'p'/\rho u_*^3$ , wobei die horizontale Achse wieder ein Mittel aus mehreren Thermals darstellt. Das Konturintervall ist 10.0.



Abschätzung der Druckvarianz mittels einer Doppler-Radar-Messung (Messung der Bewegung innerhalb der ML).

# Druck Korrelation - Wellen

- Abweichungen von Mittel können sowohl durch Turbulenz als auch durch Wellen verursacht sein (siehe oben).
- Liegt ein gemessener Wert für  $\overline{w'p'}$  vor, so ist es unmöglich den Beitrag von Turbulenz und Wellen ohne weitere Informationen zu bestimmen.
- Studien der linearen Schwerewellentheorie zeigen, dass  $\overline{w'p'}$  gleich dem aufwärtsgerichteten Fluss von Wellenenergie einer vertikal propagierenden Schwerewelle in einer statisch stabilen Umgebung ist.
- Dies legt nahe, dass Turbulenzenergie an der Oberkante der ML in Form von Schwerewellen verloren gehen kann, die durch Thermals angeregt werden, die in die stabile Schicht an der Oberkante der ML eindringen.

- Der Energieverlust durch Schwerewellen ist von der Größenordnung 10% oder weniger (bezogen auf die gesamte TKE Dissipationsrate). Die resultierenden Wellen können manchmal Wolkenbildung auslösen oder Wolken (Bedeckungsgrad) vergrößern.
- Turbulenz kann auch in der stabilen nächtlichen Grenzschicht durch Wellen verloren gehen.
- Daraus kann man folgern, dass der Druckkorrelations-term nicht nur eine Umverteilung von TKE in der GS bewirkt, sondern dass Energie auch aus der GS entfernt werden kann.

# Dissipation

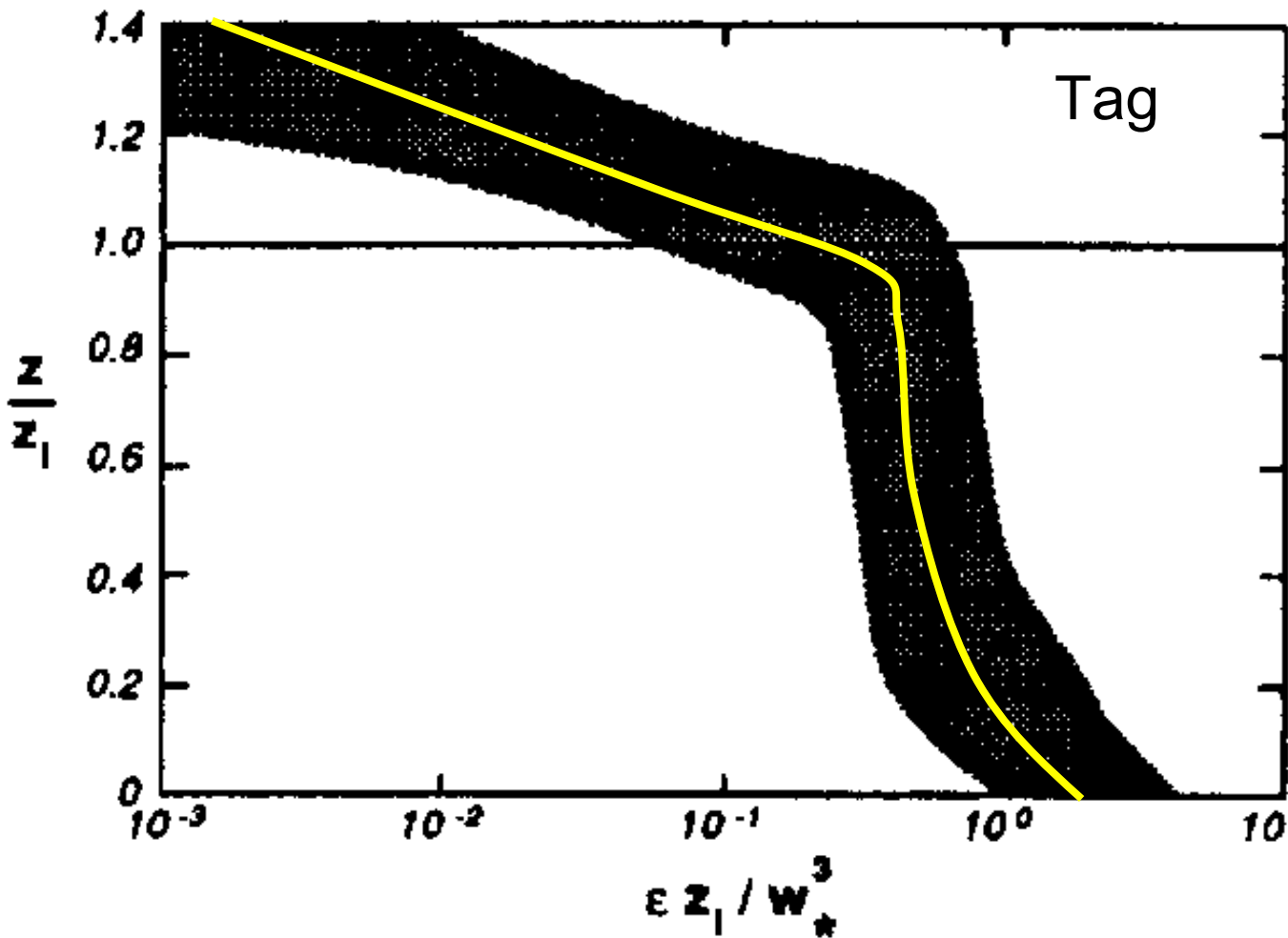
## ➤ Term VII

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

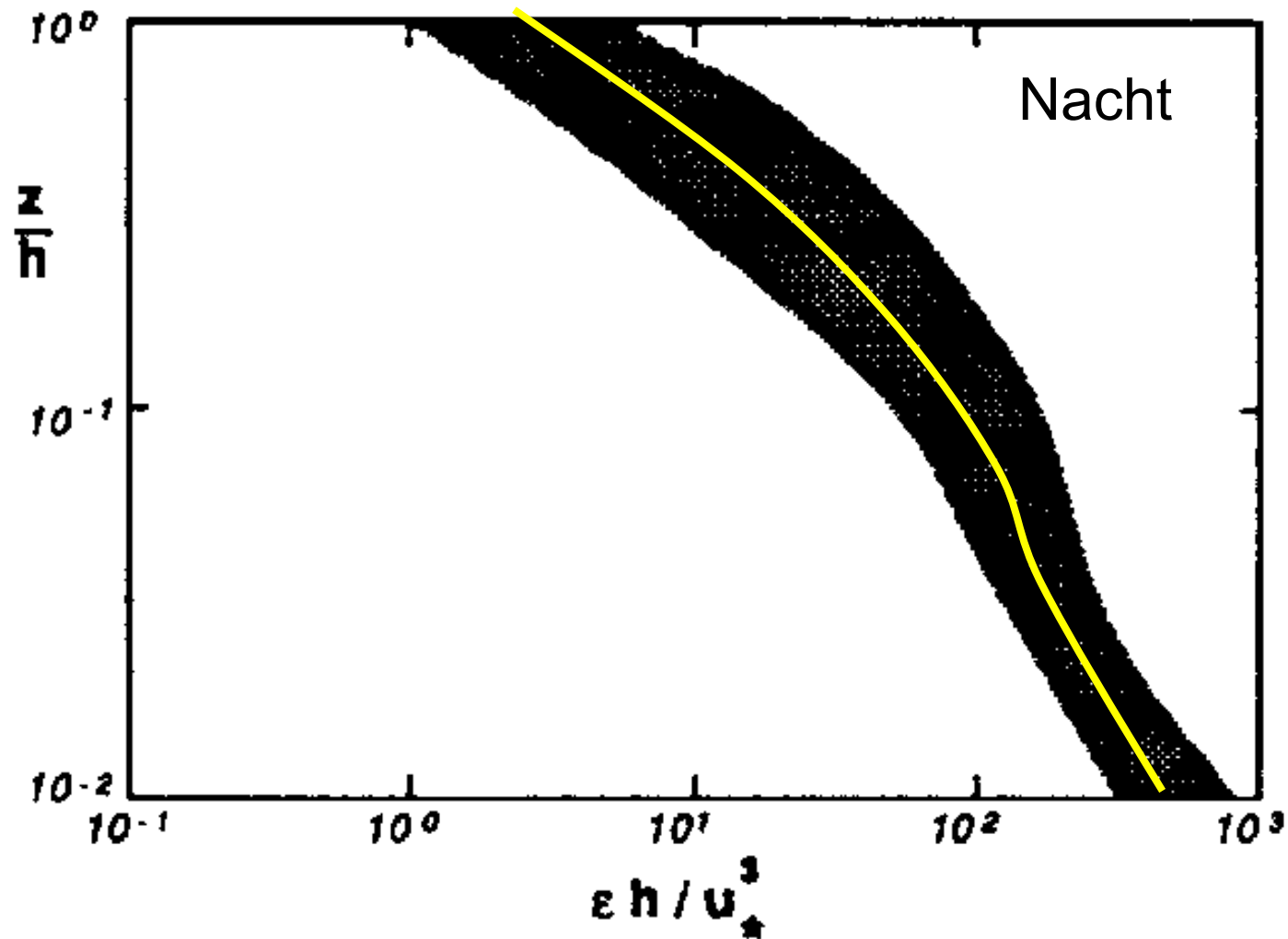
VII

- Die molekulare Dissipation von turbulenten Bewegungen ist für Eddies geringster Größe am größten (Kap. 4).
- Je intensiver diese kleinskalige Turbulenz ist, desto größer ist die Dissipationsrate.
- Kleinskalige Turbulenz wiederum ist durch die Energiekaskade von größerskaligen Eddies angetrieben.
- Typische Profile sind in den folgenden Abbildungen dargestellt ⇒





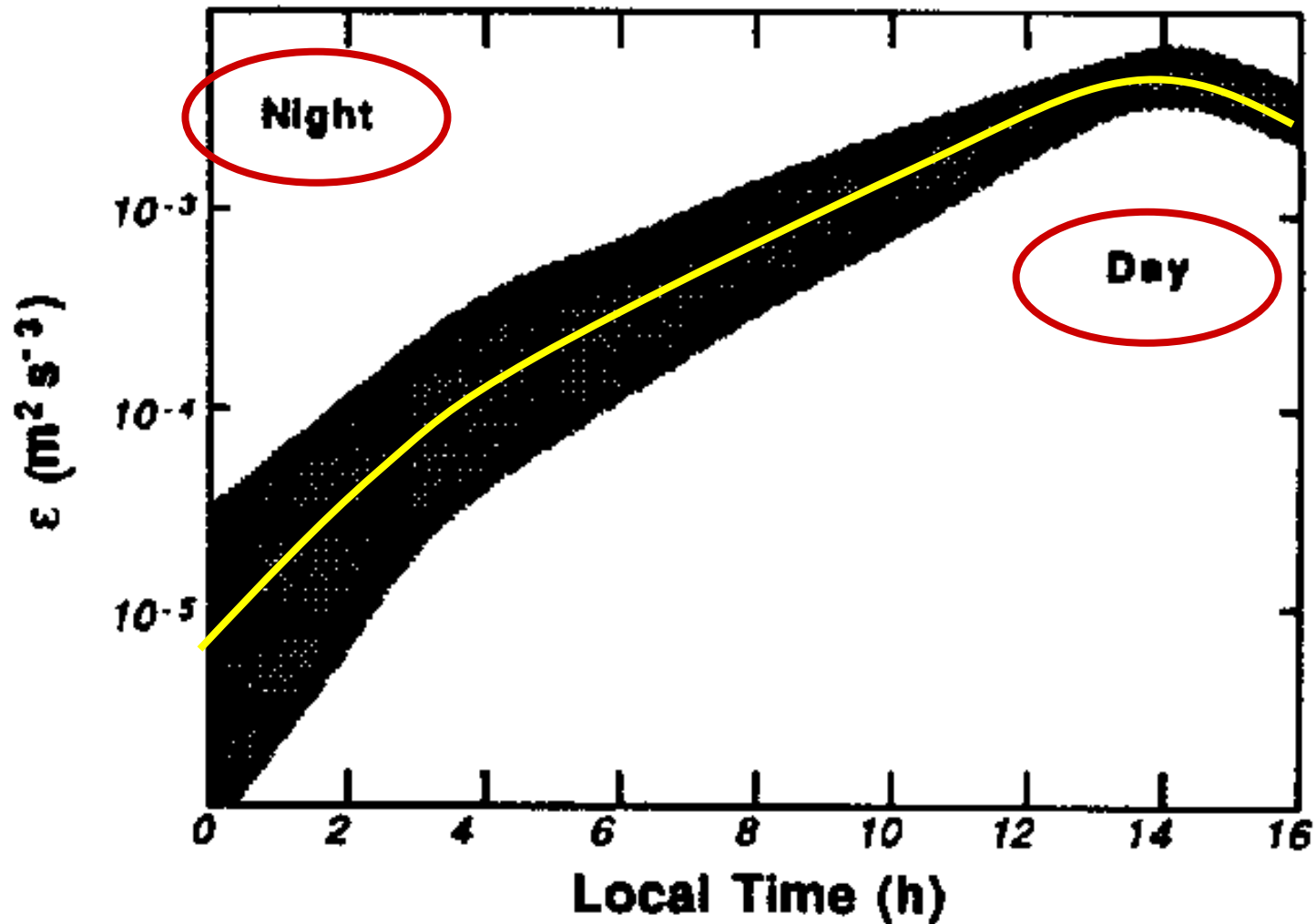
Wertebereich der normalisierten Dissipationsrate  $\epsilon$  am Tage, wobei  $z_i$  die Dicke der ML ist und  $w_*$  die konvektive Geschwindigkeitsskala.



Wertebereich der normalisierten Dissipationsrate  $\varepsilon$  in der Nacht,  
wobei  $h$  die Dicke der GS ist und  $u_*$  ( $= \sqrt{-\overline{u'w'}}$ ) die  
Reibungsgeschwindigkeit (Schubspannungsgeschwindigkeit).

# Dissipation

- Da Turbulenz nicht erhalten bleibt, findet man die größten Werte für die TKE und damit auch die größten Dissipationsraten meistens dort, wo die TKE Produktion am größten ist, also nahe der Erdoberfläche.
- Dennoch erwartet man wegen der verschiedenen Transportterme im TKE Budget nicht, dass die Dissipationsrate vollständig die Produktionsrate balanciert.
- Der enge Zusammenhang zwischen der TKE Produktionsrate, der Intensität der Turbulenz und der Dissipationsrate ist in der nächsten Abbildung dargestellt  
⇒



Beispiel für den Tagesgang der Dissipationsrate, hier von der Nacht zum Tag.

## Beispiel

- Problem: In einer Höhe von  $z = 300$  m in einer insgesamt 1000 m dicken ML wurden die folgenden Bedingungen beobachtet:

$$\overline{\partial U / \partial z} = 0.01 \text{ s}^{-1},$$

$$\overline{\theta_v} = 25^\circ\text{C},$$

$$\overline{w'\theta_v'} = 0.15 \text{ K m s}^{-1} \text{ und}$$

$$\overline{u'w'} = -0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-2},$$

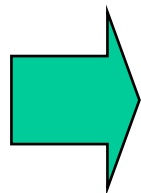
der virtuelle Wärmefluss am Erdboden ist  $0.24 \text{ K m s}^{-1}$ .

- Die Transporte durch Druckänderungen und Turbulenz seien vernachlässigt: (a) Welche Dissipationsrate ist erforderlich, um ein lokales Gleichgewicht in  $z = 300$  m zu erhalten? (b) Was sind die Werte der normalisierten TKE Terme?

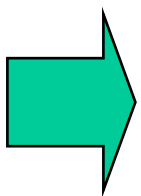
- Lösung: (a) Da keine Information gegeben wurde über die Geschwindigkeitskomponente  $v$  und auch nichts über die Scherspannung, nehmen wir an, dass die  $x$ -Achse am mittleren Wind ausgerichtet ist.  $\Rightarrow$  TKE Budget:

$$\frac{\cancel{\partial \bar{e}}}{\cancel{\partial t}} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\cancel{\partial(\overline{w'e})}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\cancel{\partial \overline{w'p'}}}{\cancel{\partial z}} - \varepsilon$$

$= 0$   $= 0$   $= 0$   
 stationär ---- gegeben ----



$$\varepsilon = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$



$$\underline{\varepsilon} = \frac{9.8}{298.15} \times 0.15 - (-0.03) \times 0.01 = \underline{5.23 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}}$$

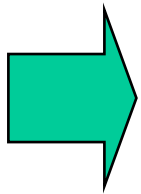
(=273.15+25)

- Lösung: (b) Um die Gleichungen zu normalisieren berechne:

$$\frac{w_*^3}{z_i} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} = 7.89 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

- Dividiere alle Terme durch diesen Wert ergibt:

$$\frac{\cancel{\partial \bar{e}}}{\cancel{\partial t}} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\cancel{\partial(\overline{w'e})}}{\cancel{\partial z}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\cancel{\partial \overline{w'p'}}}{\cancel{\partial z}} - \varepsilon$$



$$0 = 0.625 + 0.038 - 0 - 0 - 0.663$$

# Spezielle Probleme turbulenter Flüsse

(Einschub: Wiederholung von Kapitel 3)

- Im Prinzip könnten diese Gleichungen direkt auf turbulente Flüsse angewendet werden, aber dies ist generell zu kompliziert.
- Um die Anfangsbedingungen zu bestimmen kann man nicht alle turbulenten Skalen herunter bis zu den kleinsten Störungen (Eddies) auflösen.
- Anstelle dessen "schneidet" man zur Vereinfachung bei einer bestimmten Eddy-Größe (Skala) ab, unterhalb derer man nur den statistischen Effekt der Turbulenz betrachtet.
- In einigen mesoskaligen und synoptisch-skaligen Modellen findet dieses "abschneiden" bei etwa 10 bis 100 km statt, während für einige GS-Modelle (bekannt als 'Large Eddy Simulation Models', LES models) bei etwa 100 m abgeschnitten wird.



# Mittlere KE und ihre Wechselwirkung mit Turbulenz

## ➤ TKE Gleichung

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

I

II

III

IV

V

VI

VII

- Man erwartet, dass die Produktion von TKE verbunden ist mit einer gleichzeitigen Abnahme der KE des mittleren Flusses (Bewegung).

→ Ableitung einer Gleichung für die KE des mittleren Flusses: Beginne mit der Gleichung für den mittleren Wind in einem turbulenten Fluss, multipliziere mit  $\bar{u}_i$ .



➤ Gleichung für die mittlere KE

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) &= \overset{\text{III}}{-g\delta_{i3} \bar{u}_i} + \cancel{\overset{\text{IV}}{f\varepsilon_{ij3} \bar{u}_i \bar{u}_j}} = 0 \quad (\text{s. Kap. 4}) \\
 &\quad - \overset{\text{V}}{\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overset{\text{VI}}{v \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^2}} - \overset{\text{VII}}{\bar{u}_i \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}}
 \end{aligned}$$

Term VII  $\Rightarrow$

$$-\bar{u}_i \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{\text{VI}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j \bar{u}_i})}{\partial x_j}$$

= Term IV von TKE Gleichung!



## TKE Gleichung

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

## Gleichung für die mittlere KE

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) = -g\bar{w} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} +$$

$$v\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j \bar{u}_i})}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- Energie, die mechanisch als Turbulenz erzeugt wird vom mittleren Fluss gewonnen und umgekehrt.

A dramatic sunset sky with orange and yellow clouds, a utility pole with power lines, and silhouettes of trees and buildings in the foreground.

**Ende Kapitel 5 (1)**

# Kapitel 5 (2): Stabilität und Skalierung



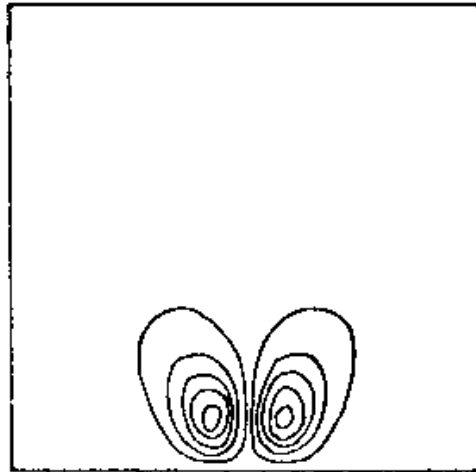
# Stabilitätskonzepte

- Labile (Instabile) Flüsse werden oder bleiben turbulent, stabile Flüsse werden oder bleiben laminar.
- Wenn der Nettoeffekt aller destabilisierenden Faktoren größer ist als der Nettoeffekt der stabilisierenden Faktoren, dann tritt Turbulenz auf.
- In vielen Fällen kann man diese Faktoren interpretieren als Teil der TKE Budgetgleichung (einzelne Terme).
- Man kann einen stabilisierenden Faktor mit einem destabilisierenden Faktor durch Bildung eines dimensionslosen Verhältnis der beiden vergleichen; so ergibt sich z.B. die Reynoldszahl, die Richardsonzahl, die Froudezahl und die Rayleighzahl.
- Andere Stabilitätsparameter, wie die statische Stabilität, werden normalerweise nicht in einer dimensionslosen Form ausgedrückt.

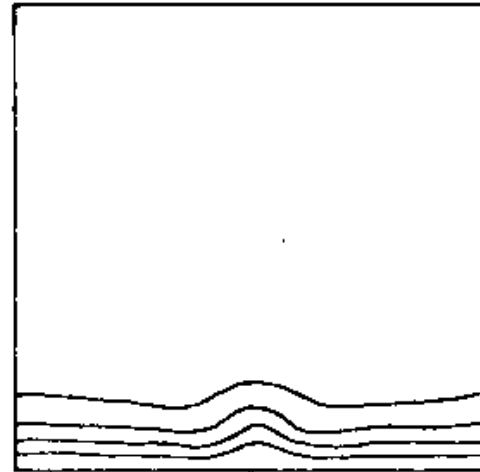
# Statische Stabilität und Konvektion

- Statische (In-) Stabilität ist ein Maß für die Fähigkeit eines Systems, Konvektion auszubilden.
- “statisch” bedeutet, dass keine Bewegung existiert.
- Statische Instabilität entsteht, wenn weniger dichtere Luft (d.h. wärmere und oder feuchtere Luft) unterhalb von dichterem Luft liegt.
- Der Fluss reagiert auf diese Instabilität, indem er konvektive Zirkulation (z.B. Thermals) begünstigt; diese ermöglicht das Aufsteigen von Luft bis zum Oberrand der instabilen Schicht und damit eine Stabilisierung des Fluids.
- Thermals benötigen einen auslösenden Mechanismus um zu beginnen.
- Diese sind überall in der Atmosphäre vorhanden (z.B. Hügel, Bäume).

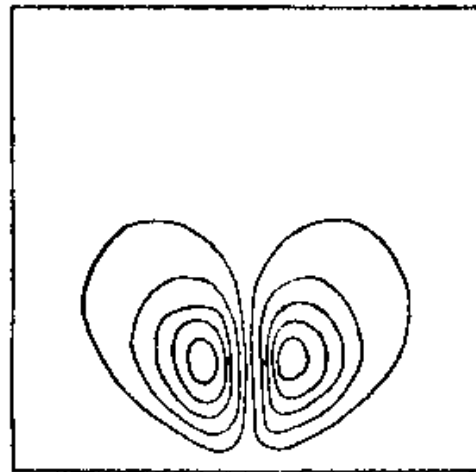
# Durchdringende Konvektion



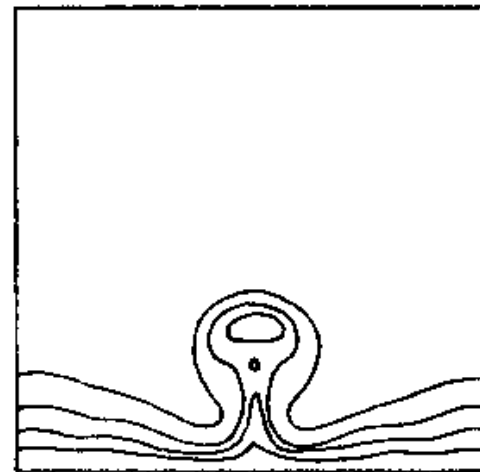
$\psi$  3.8



$\theta$



$\psi$  22

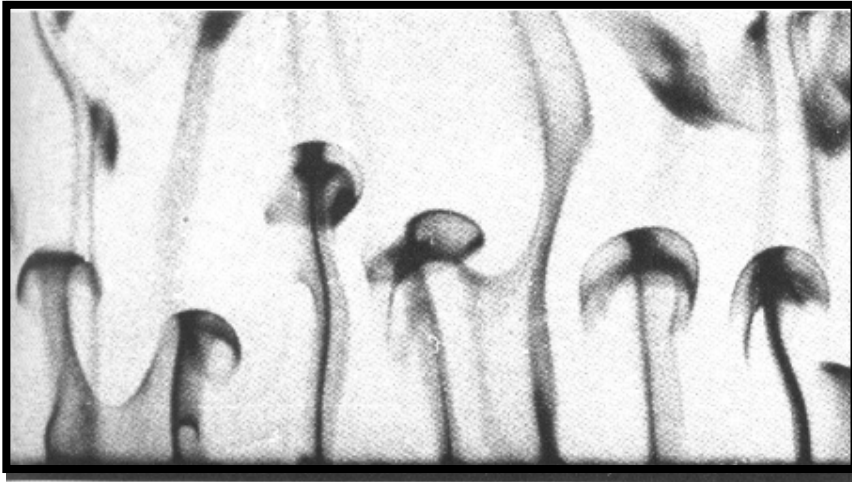


$\theta$

$\psi$ : Stromfunktion



# Bildung aufsteigender Abgasfahnen oder Thermals von einer aufgeheizten Oberfläche



größere Heizrate

In einem turbulenten Konvektionsregime ist der Fluss von Wärme, ausgehend von einer geheizten Fläche, eher unterbrochen als stetig; er wird durch die Bildung von Thermals erreicht.

# Statische Stabilität: Lokale Definitionen

- In der Meteorologie wird traditionell definiert, dass die statische Stabilität von "lokaler" Natur ist; d.h. die statische Stabilität ist durch den lokalen vertikalen Temperaturgradienten (engl. lapse rate) bestimmt.
- Diese lokale Definition versagt häufig in konvektiven ML, da das Aufsteigen von Thermals von bodennahen Schichten oder ihr Absinken von der Wolkenoberkante abhängig ist von dem Überschuss an Auftrieb und nicht von dem umgebenden Temperaturgradienten.

# Statische Stabilität: Lokale Definitionen

Beispiel:

- In den mittleren 50% einer konvektiven ML ist der vertikale Temperaturgradient nahezu adiabatisch, was zu einer falschen Klassifikation der neutralen Stabilität führt, wenn die traditionelle lokale Definition verwendet wird.
- Deshalb muss klar unterschieden werden zwischen einem adiabatischen Temperaturgradienten und neutraler Stabilität.

- Eine Luftmasse, in der ein adiabatischer Temperaturgradient gefunden wird, kann statisch stabil, neutral oder instabil sein, abhängig von Konvektion und dem vertikalen Fluss (Auftrieb).
- Neutrale Stabilität bedeutet eine sehr spezielle Situation: adiabatischer Temperaturgradient und keine Konvektion!
- Beide Ausdrücke sollten nicht abwechselnd verwendet werden. Der Ausdruck "neutraler Temperaturgradient" (engl. neutral lapse rate) sollte nicht verwendet werden!
- Schlussfolgerung: Um die statische Stabilität zu bestimmen sind Messungen des lokalen Temperaturgradienten allein unzureichend.
- Entweder muss man das gesamte  $\overline{\theta}_v$  Profil kennen, oder Messungen des vertikalen turbulenten Flusses (Auftriebsfluss) müssen durchgeführt werden.

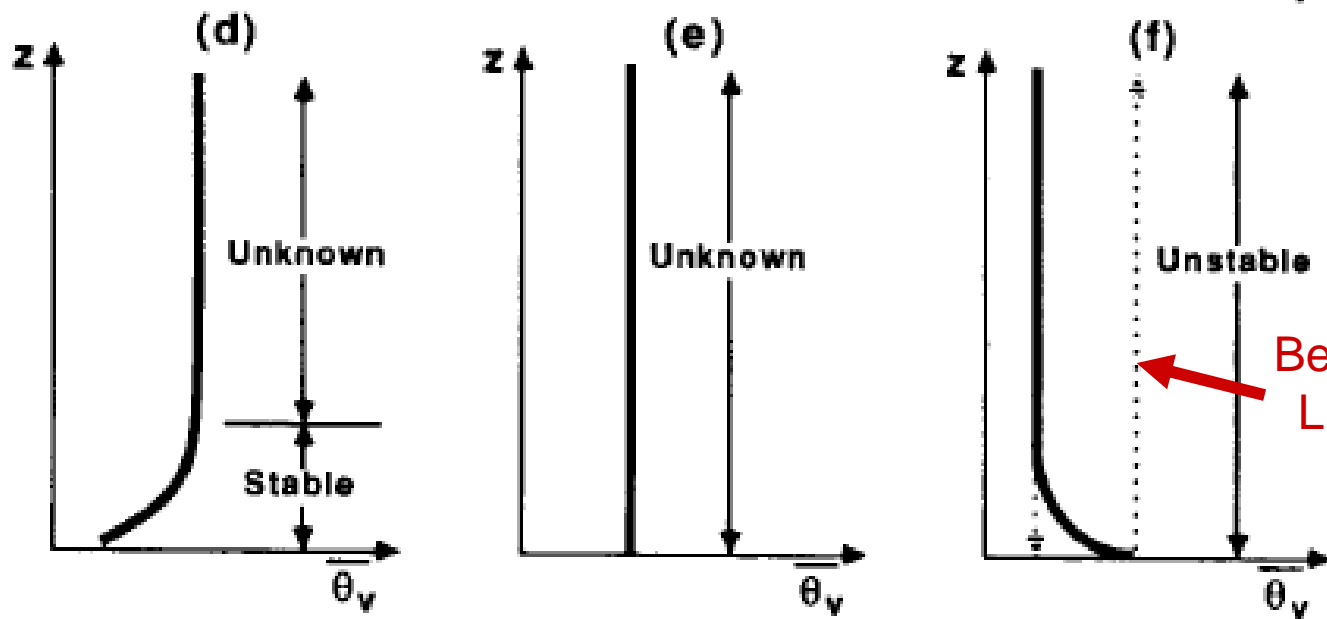
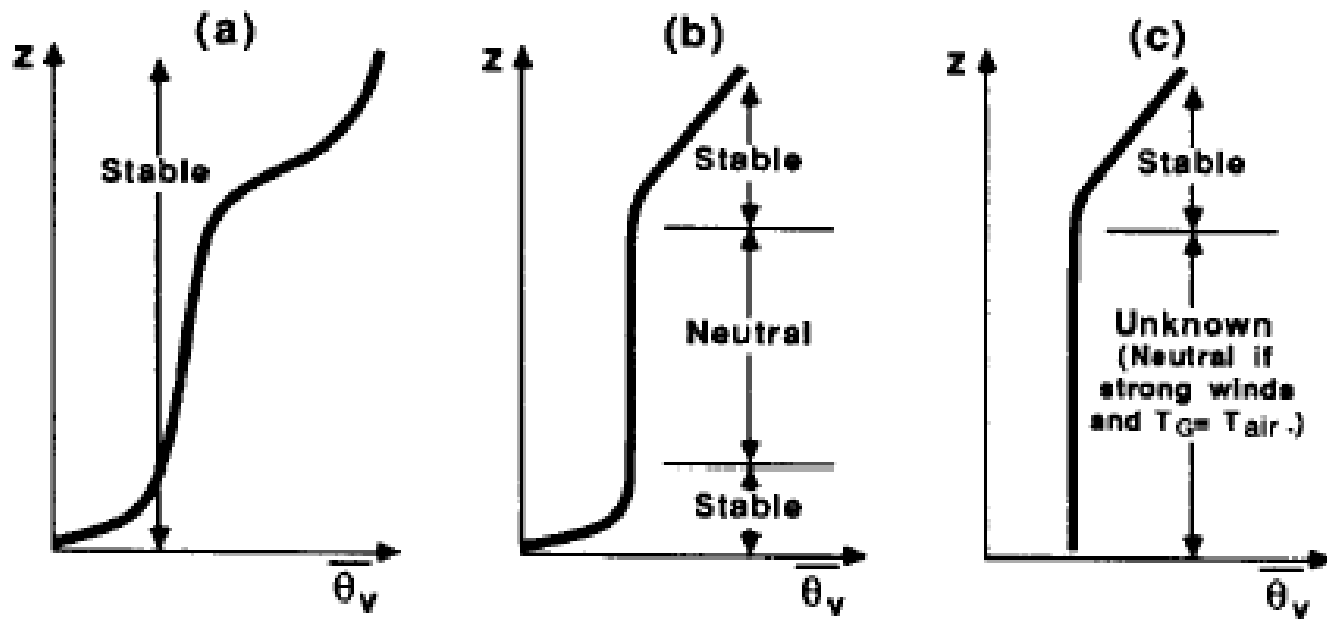
# Statische Stabilität: Nicht-lokale Definitionen

- Besser ist es, die Stabilität einer gesamten Schicht zu betrachten:
- Beispiel: Wenn  $w'\theta_v'$  am Erdboden positiv ist, oder wenn verschobene Luftteilchen als Thermal von unten durch die GS aufsteigen oder von oben durch sie absinken, spricht man davon, dass die GS instabil oder konvektiv ist.
- Wenn  $w'\theta_v'$  am Erdboden negativ ist, oder wenn verschobene Luftteilchen wieder zurück in ihren Ausgangspunkt streben, spricht man davon, dass die GS stabil ist.
- Wenn über die gesamte Dicke der GS der Scherproduktionsterm in der TKE Gleichung viel größer ist als der Auftriebsterm, oder wenn der Auftriebsterm nahe Null ist, spricht man davon, dass die GS neutral ist.
- In diesem Fall bezeichnet man die GS manchmal auch als die Ekman Grenzschicht.

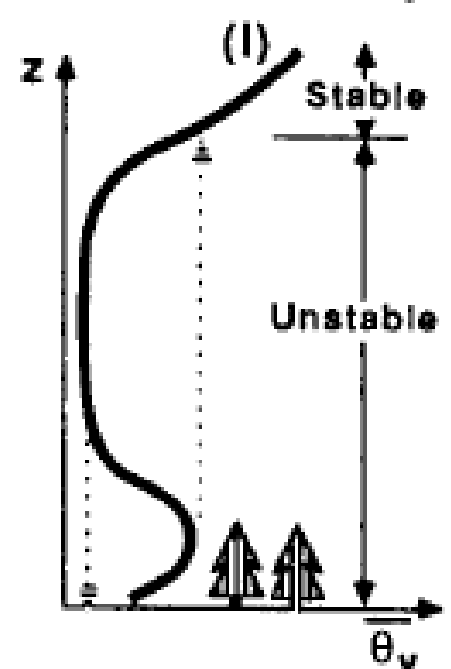
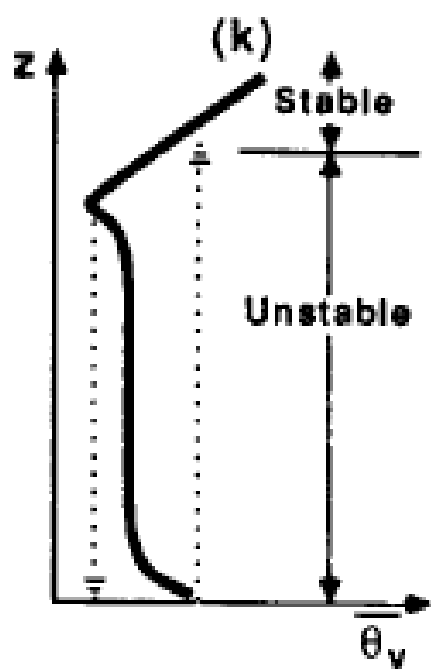
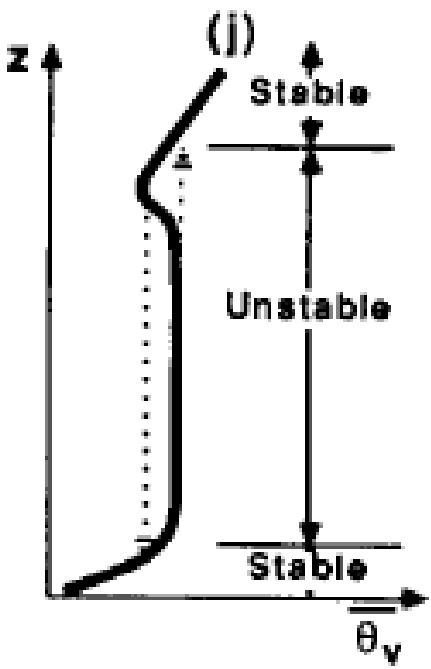
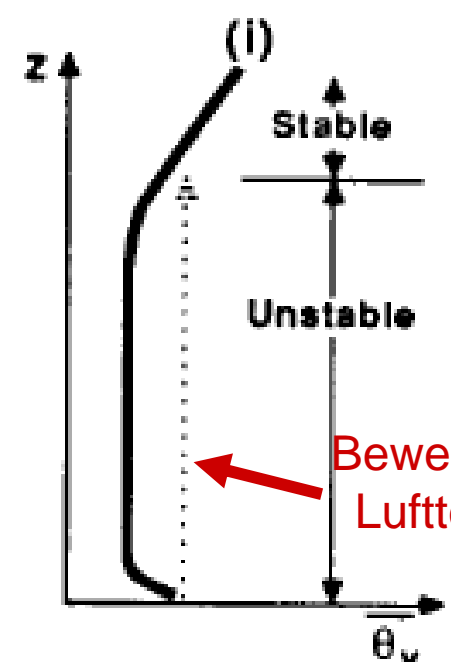
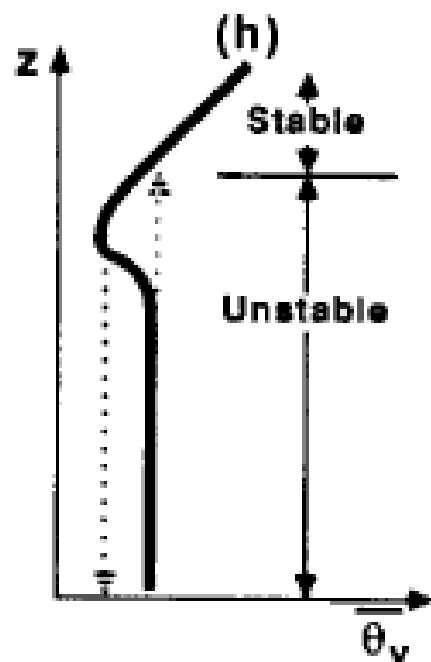
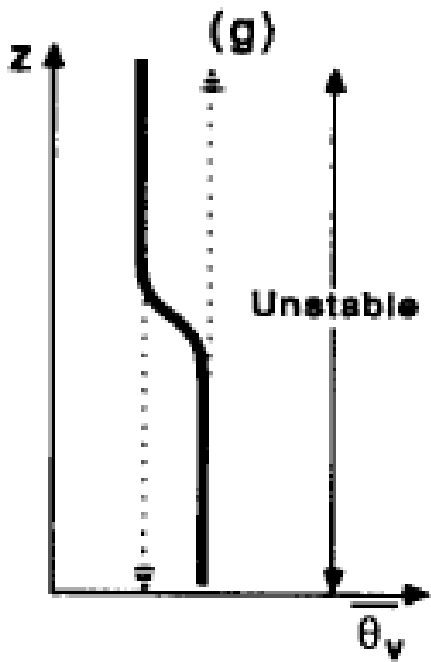
- Die GS, die während einer Schönwetterepisode über Land den Boden berührt, ist selten neutral.
- Neutrale Bedingungen werden häufig in der darüberliegenden Restschicht (RL) gefunden.
- In Situationen mit bedecktem Himmel und starken Winden, aber geringen Temperaturunterschieden zwischen der Luft und der Oberfläche, ist die GS häufig nahe an der Bedingung neutraler Stabilität.
- Wenn man weder etwas über Konvektion oder Auftrieb weiß, ist eine alternative Bestimmung der statischen Stabilität möglich, wenn das  $\bar{\theta}_v$  Profil über die gesamte GS bekannt ist.



Abbildungen



Statische Stabilität in Abhängigkeit vom  $\bar{\theta}_v$  Profil.



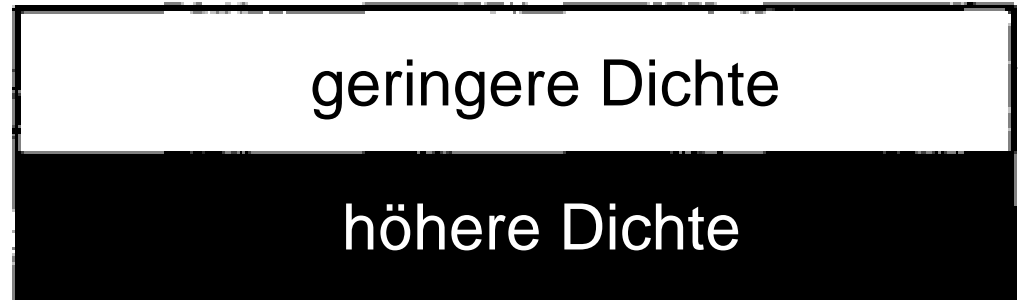


# Dynamische Stabilität & Kelvin-Helmholtz-Wellen

- Das Wort "dynamisch" bezieht sich auf eine Bewegung. Daher hängt die dynamische Stabilität zum Teil vom Wind, d.h. der Windstärke ab.
- Selbst wenn die Luft statisch stabil geschichtet ist, sind Windscherungen durchaus in der Lage, Turbulenz dynamisch zu erzeugen.
- Dieser Mechanismus wird auch Kelvin-Helmholtz- (KH-) Instabilität genannt. Die brechende Welle wird als Kelvin-Helmholtz-Welle bezeichnet.



# Kelvin-Helmholtz-Instabilität (Welle) in einem Laborexperiment





# KH-Instabilität in der Atmosphäre



# KH-Instabilität in der Atmosphäre



# KH-Instabilität in der Atmosphäre



# Die Richardsonzahl

## Die Richardson-Flusszahl

- In einer statisch stabilen Umgebung wirkt die vertikale Komponente der turbulenten Bewegungen gegen die zurück treibende Schwerkraft  $\Rightarrow$

Auftrieb neigt dazu Turbulenz zu unterdrücken, während die Windscherung Turbulenz mechanisch erzeugen kann.

- In dieser Situation ist der Auftriebsterm (Produktionsterm) der TKE Gleichung negativ, während der Scherungsterm (mechanischer Produktionsterm) positiv ist:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v}}_{< 0} - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{> 0} - \frac{\partial(\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

III                      IV

# Die Richardson-Flusszahl

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

Definiere die Richardson-Flusszahl  $Ri_f$ :

$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w'\theta'_v}}{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$$

dimensionslos

9 Terme

- Das negative Vorzeichen von Term IV wird per Vereinbarung vernachlässigt.
- Unter der Annahme von Homogenität und Vernachlässigung von Absinken, reduziert sich die obige Gleichung zu der gebräuchlicheren Form von  $Ri_f$ :



$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v}}{\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

- Für statisch instabile Flüsse ist  $Ri_f$  für gewöhnlich negativ (weil der Nenner normalerweise negativ ist). Für statisch neutrale Flüsse ist  $Ri_f$  gleich Null, für statisch stabile Flüsse ergibt sich ein positiver Wert.
- Richardson schlug vor, dass  $Ri_f = +1$  ein kritischer Wert ist, weil dann die mechanische Produktionsrate den Auftriebsterm der TKE balanciert.
- Für jeden Wert von  $Ri_f < +1$  ist die statische Stabilität zu schwach, um die mechanische Erzeugung von Turbulenz zu verhindern.
- Für  $Ri_f < 0$  ist es der Zähler, der zur Erzeugung von Turbulenz beiträgt.

- Deshalb erwartete Richardson, dass
  - der Fluss turbulent, d.h. dynamisch instabil ist, wenn  $Ri_f < +1$  und
  - der Fluss laminar, d.h. dynamisch stabil ist, wenn  $Ri_f > +1$ .
- Man erkennt, dass (per Definition) ein statisch instabiler Fluss immer dynamisch instabil ist.

# Die Richardsonzahl

- Problem: Man kann  $Ri_f$  nur für turbulente Flüsse berechnen, weil  $Ri_f$  Faktoren beinhaltet, die turbulente Korrelationen einschließen  $\Rightarrow$  Man kann  $Ri_f$  nur nutzen um herauszufinden, ob ein turbulenter Fluss laminar wird, nicht aber um zu bestimmen, ob ein laminarer Fluss turbulent wird.

- Wie kann man weiter verfahren?

Man nehme an, dass 
$$-\overline{w'\theta'_v} \propto \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \quad (\text{siehe Kapitel 2})$$

Ganz ähnlich: 
$$-\overline{u'w'} \propto \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad -\overline{v'w'} \propto \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

- Dies ist die Basis der sogenannten K-Theorie oder auch Eddy-Diffusionstheorie, die später noch diskutiert wird (siehe Kapitel 6). An dieser Stelle sei einfach angenommen, dass diese Annahmen so möglich sind.

- Durch einsetzen ergibt sich die sogenannte Gradienten-Richardsonzahl  $Ri$ :

$$Ri = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2}$$

- Wenn von der Richardsonzahl gesprochen wird, ohne genaue Bezeichnung, um welche es sich handelt, ist in der Regel die Gradienten-Richardsonzahl gemeint.
- Theoretische Arbeiten und Laborstudien deuten darauf hin, dass laminare Flüsse instabil werden und in Turbulenz übergehen (sich z.B. KH-Wellen bilden), wenn  $Ri$  kleiner wird als die sog. kritische Richardsonzahl  $Ri_c$ .
- Ein anderer Wert,  $Ri_T$ , zeigt das Ende von Turbulenz an.

# Richardsonzahl Kriterium

Das dynamische Stabilitätskriterium kann wie folgt angegeben werden:

- Laminare Flüsse werden turbulent, wenn  $Ri < Ri_c$ .
- Turbulente Flüsse werden laminar, wenn  $Ri > Ri_T$ .
- Obwohl es noch eine Diskussion über die korrekten Werte von  $Ri_c$  und  $Ri_T$  gibt zeigt sich, dass diese Annahmen gut funktionieren für  $Ri_c = 0.21$  bis  $0.25$  und  $Ri_T = 1.0$ .
- Es scheint einen Hystereseeffekt zu geben, da  $Ri_T$  größer ist als  $Ri_c$ .

Eine Hypothese für den Hystereseeffekt ist folgende:

- Zwei Bedingungen für Turbulenz werden benötigt:  
(1) Instabilität und (2) ein auslösender Mechanismus.
- Ferner sei angenommen, dass dynamische Instabilität immer dann auftritt, wenn  $Ri < Ri_T$ .

# Hystereseeffekt

- Wenn ein auslösender Mechanismus bereits existierende Turbulenz innerhalb eines (oder angrenzend an ein) instabilen Fluids ist, dann kann Turbulenz solange existieren wie  $Ri < Ri_T$ , weil sowohl Instabilität als auch der "Auslöser" vorhanden sind.
- Wenn KH-Wellen ein anderer auslösender Mechanismus sind, dann findet man in Abwesenheit von existierender Turbulenz, dass  $Ri$  deutlich kleiner als  $Ri_T$  sein muss, bevor KH-Wellen gebildet werden.
- Labor- und theoretische Studien haben gezeigt, dass das Kriterium für die Bildung von KH-Wellen  $Ri < Ri_c$  sein muss.
- Dies führt offensichtlich zu einer Hysterese:  $Ri$  eines nicht-turbulenten Flusses muss kleiner sein als  $Ri_c$  bevor Turbulenz einsetzt, aber wenn Turbulenz einmal existiert, dann kann sie solange bestehen, bis  $Ri > Ri_T$ .

# Die "Bulk" Richardsonzahl

- Theoretische Arbeiten die ergeben, dass  $Ri_c = 0.25$  ist, basieren auf lokalen Messungen der Windscherung und des Temperaturgradienten.
- Die aktuellen lokalen Temperaturgradienten kennt man nur selten, aber man kann sie aus einer Reihe von Beobachtungen in verschiedenen Höhenintervallen approximieren:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \approx \frac{\Delta \bar{\theta}_v}{\Delta z} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \approx \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z} \quad \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta z} \approx \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

- Definiere die "Bulk" Richardsonzahl  $Ri_b$ :

$$Ri_b = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \frac{\Delta \bar{\theta}_v \Delta z}{\left[ (\Delta \bar{u})^2 + (\Delta \bar{v})^2 \right]}$$

- Dies ist die gebräuchlichste Form, da die Berechnung mit diskreten Daten geschieht.

- Leider gilt der kritische Wert von 0.25 nur für lokale Gradienten und nicht für finite Differenzen über dickere Schichten.
- Tatsächlich ist es so, dass je dicker eine Schicht ist es, desto wahrscheinlicher ist, dass große Gradienten herausgemittelt werden, die möglicherweise in einer dünneren Schicht dazwischen liegen; diese sind aber gerade von besonderem Interesse.
- Das Ergebnis ist, dass
  - 1) eine große Unsicherheit in die Bestimmung des Vorkommens von Turbulenz eingeführt wird und
  - 2) man unnatürlich große und theoretisch nicht gerechtfertigte Werte für  $Ri_c$  benutzen müsste, damit man akzeptable Ergebnisse für die geglätteten Gradienten bekommt.

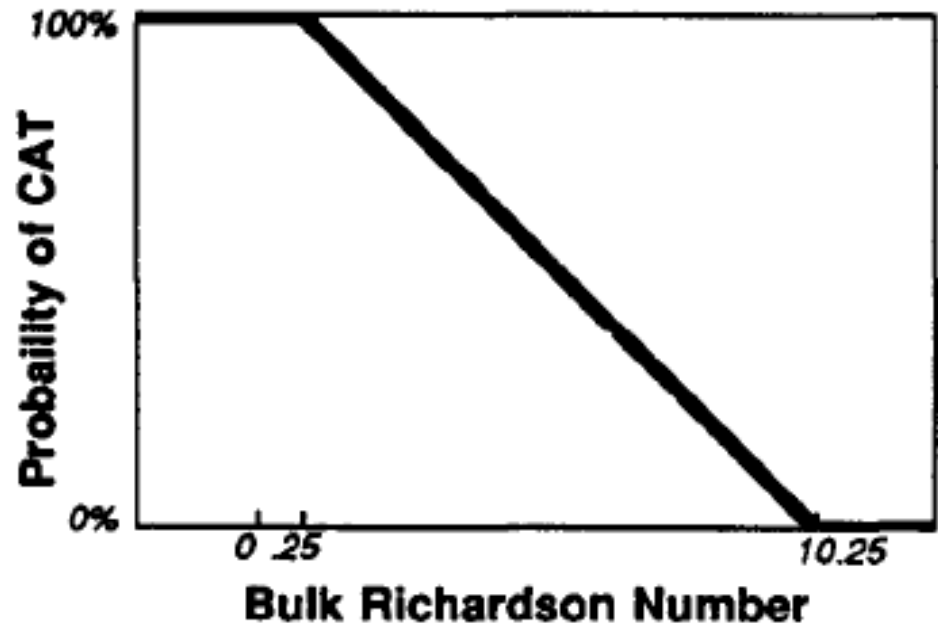


- Je dünner die betrachtete Schicht ist, desto näher liegt die kritische Richardsonzahl am Wert 0.25!
- Da Datenpunkte bei Beobachtungen in der Vertikalen oft weit auseinander liegen, werden Approximationen, wie im folgenden gezeigt, benutzt, um die Wahrscheinlichkeit und Intensität von Turbulenz abzuschätzen.



**Fig. 5.19**

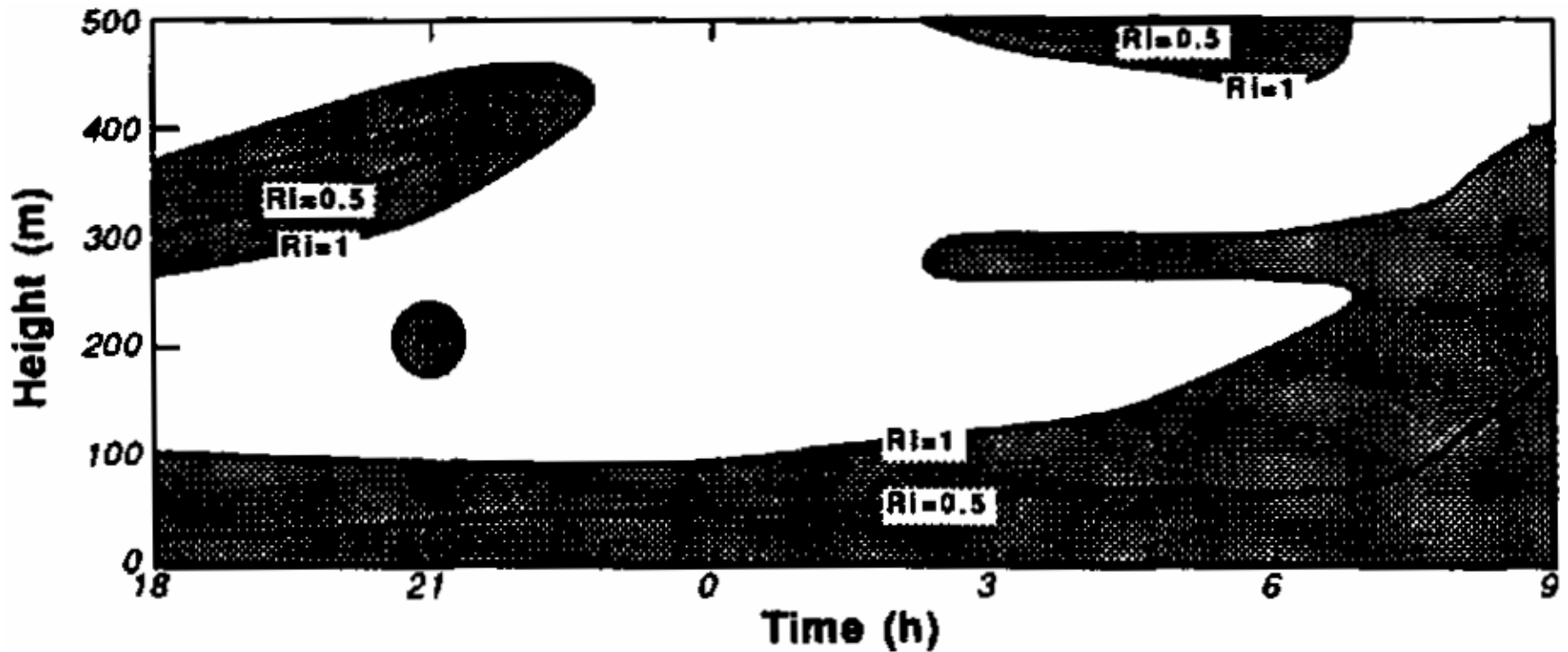
(a) Relationship between the bulk Richardson number,  $Ri$ , over a layer and the probability of turbulence within that layer. This curve was developed empirically. (b) Empirically derived relationship between turbulence intensity and the wind speed and shear. "N" indicates none, "L" is light, "M" is moderate, "S" is severe, and "X" is extreme turbulence.



(a)

Wind Speed m/s (kt)	Vector wind shear $s^{-1}$ (kt/1000 feet)					
	.0084-.0118 (5-7)	.0118-.0169 (7-10)	.0169-.0338 (10-20)	.0338-.0506 (20-30)	.0506-.0844 (30-50)	.0844+ (50+)
20-30 (40-60)	N	L	L-M	M	M-S	S
30-60 (60-120)	L	L-M	M	M-S	S	S-X
60+ (120+)	L	L-M	M	M-S	S	X

(b)



Beispiel für die Entwicklung der Richardsonzahl in der Höhe und mit der Zeit, hier während einer Nacht. Bereiche mit  $Ri < 1$  sind dunkel unterlegt und kennzeichnen Regionen, die wahrscheinlich turbulent sind.

# Die Obukhov Länge

- Die Obukhov Länge ( $L$ ) ist ein Skalierungsparameter, der bei der Betrachtung der Bodenschicht hilfreich ist.  $L$  ist eine charakteristische Höhe (Höhenskala) einer Teilschicht mit dynamischer Turbulenz.
- Um zu zeigen, wie dieser Parameter in Bezug zur TKE Gleichung steht, muss man sich zuerst an eine Definition der Bodenschicht erinnern: Sie ist die Region, wo die turbulenten Flüsse in der Höhe um weniger als 10% ihrer Größe variieren.
- Unter der Annahme, dass ein Fluss konstant mit der Höhe ist, kann man Bodenwerte des Wärme- und Impulsflusses benutzen, um Skalen der Turbulenz zu definieren und die TKE Gleichung dimensionslos zu machen.

# Die Obukhov-Länge

- Beginne mit der TKE Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

- Multipliziere die gesamte Gleichung mit  $-kz/u_*^3$ ; ferner nehme man an, dass alle turbulenten Flüsse gleich ihrer entsprechenden Bodenwerte sind; betrachte nur die Terme III, IV and VII:

$$\dots = - \underbrace{\frac{kz g \left( \overline{w'_i \theta'_v} \right)_s}{\bar{\theta}_v u_*^3}}_{\text{III}} \mp \underbrace{\frac{kz \left( \overline{u'_i u'_j} \right)_s}{u_*^3}}_{\text{IV}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \dots - \underbrace{\frac{kz \varepsilon_s}{u_*^3}}_{\text{VII}}$$

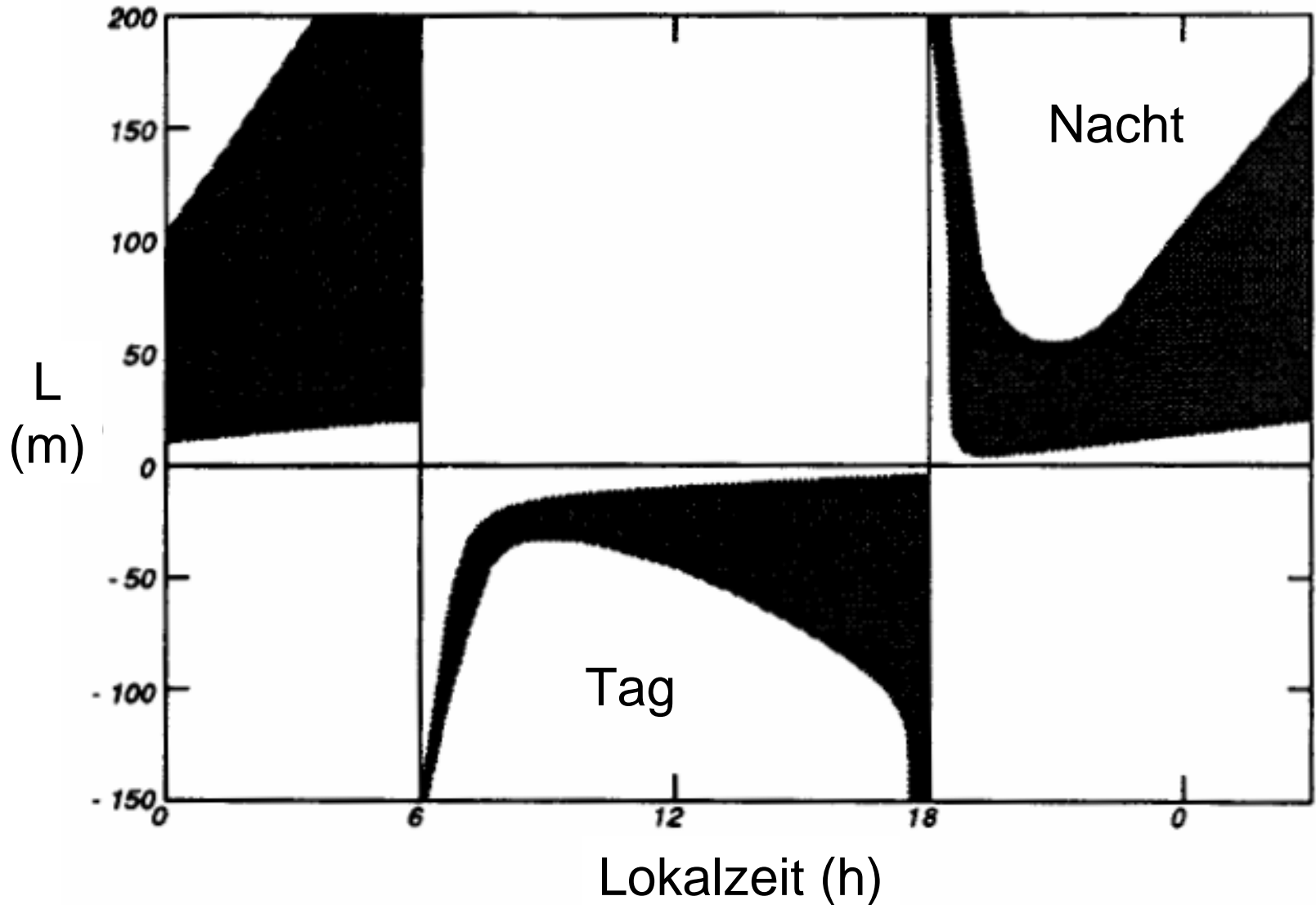
- Term III wird mit dem Symbol  $\zeta$  bezeichnet und wird weiter definiert als  $\zeta \equiv z/L$ , wobei L die Obukhov-Länge ist.

Damit ist

$$\zeta = \frac{z}{L} = \frac{-kz g \left( \overline{w'\theta'_v} \right)_s}{\bar{\theta}_v u_*^3}$$

$$L = \frac{-\bar{\theta}_v u_*^3}{kg \left( \overline{w'\theta'_v} \right)_s} \quad \text{wird die Obukhov-Länge genannt.}$$

- Eine physikalische Interpretation der Obukhov-Länge ist, dass sie proportional zu der Höhe oberhalb der Oberfläche ist, in der Auftriebsfaktoren erstmals über die mechanische (Scher-) Produktion von Turbulenz dominieren. Anders:  $L$  ist die charakteristische Höhe der Teilschicht, in der dynamische Turbulenz vorherrscht.
- Für konvektive Situationen gilt: Auftriebs- und Scherproduktionsterme sind etwa gleich in  $z = -0.5L$ .



Tagesgang (mit typischem Wertebereich) der Obukhov-Länge während einer Schönwettersituation über Land.

- Es zeigt sich, dass der Parameter  $\zeta$  für die Skalierung und Ähnlichkeitsbetrachtungen in der Bodenschicht sehr wichtig ist.
- Manchmal wird er 'Stabilitätsparameter' genannt, obwohl seine Größe nicht direkt mit der statischen oder dynamischen Stabilität zusammenhängt.
- Nur sein Vorzeichen kann mit der statischen Stabilität in Verbindung gebracht werden: negativ bedeutet statisch instabil, positiv bedeutet statisch stabil.
- Eine bessere Bezeichnung für  $\zeta$  ist: Ein "Skalierungsparameter für die Bodenschicht".



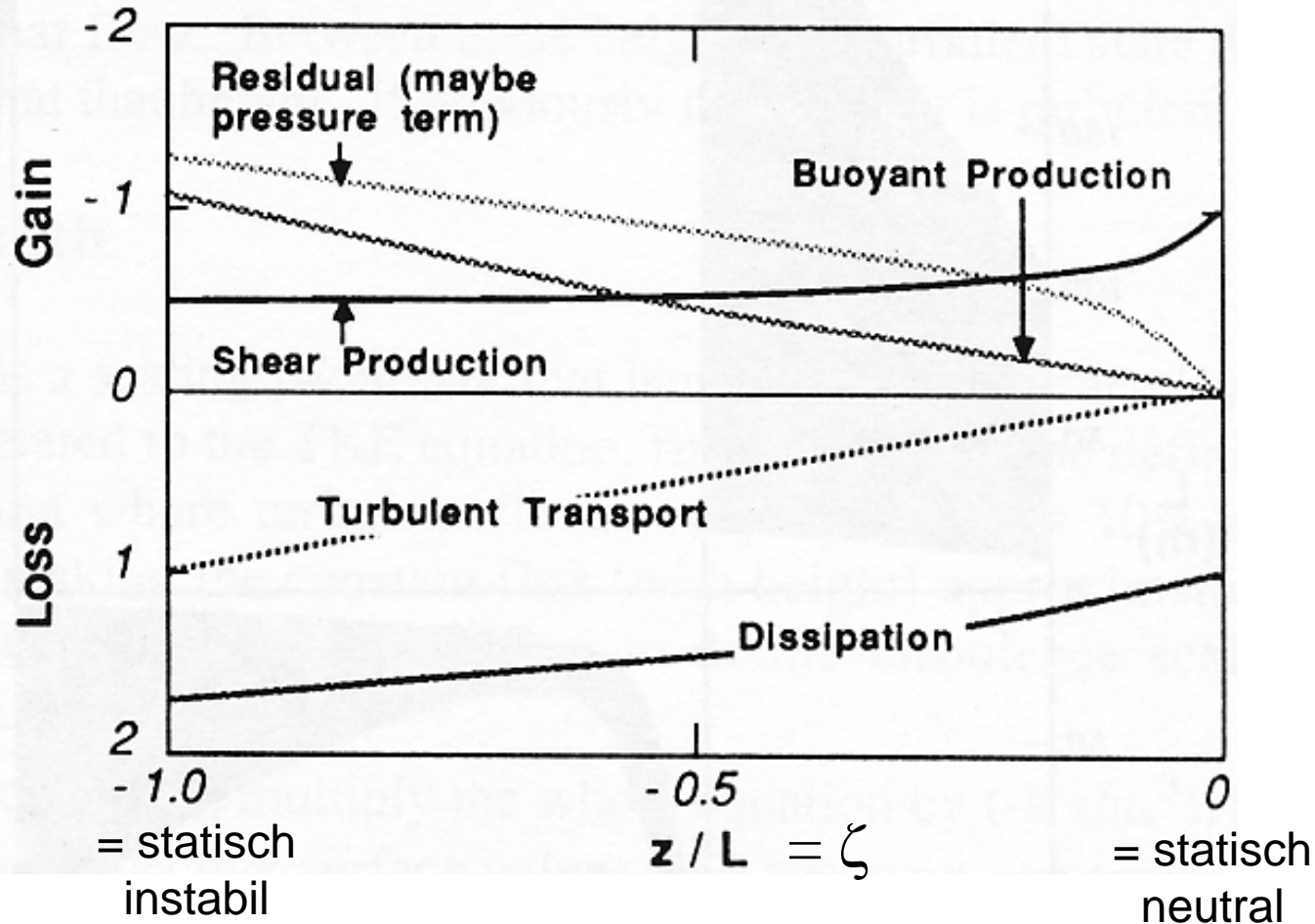
- Wenn man die Definition von  $w_*$  verwendet, kann man für  $\zeta$  alternativ schreiben:

$$\zeta = \frac{z}{L} = \frac{-kzw_*^3}{z_i u_*^3}$$

- Die folgende Abbildung zeigt die Variation der TKE Budgetterme mit  $\zeta$ , wobei  $\zeta$  zwischen 0 (statisch neutral) und  $-1$  (leicht instabil) variiert.

**Fig. 5.22**

Behavior of the terms (made dimensionless with  $kz/u_*^3$ ) in the unstable surface-layer turbulence kinetic energy budget. After Wyngaard (1973).



- Besonders auffällig ist die zurückgehende Bedeutung des Scherterms und die zunehmende Bedeutung des Auftriebterms, wenn man von  $\zeta = 0$  (statisch neutral) nach  $-1$  (statisch instabil) geht.



**Ende Kapitel 5 (2)**

## Kapitel 6:

# Schließungsansatz für turbulente Strömungen



# Schließungsansatz

- Die große Zahl von Gleichungen die bisher (Kap. 3-5) entwickelt wurden deuten an, dass eine mehr oder weniger vollständige Beschreibung turbulenter Flüsse (Bewegungen) möglich ist.
- Eine nähere Betrachtung zeigt aber, dass es eine große Anzahl von Unbekannten gibt. Eine Unbekannte ist hier eine Größe, für die wir keine Bestimmungsgleichung haben.
- Tatsächlich ist die Anzahl der Unbekannten in dem Satz von Gleichungen zur Beschreibung turbulenter Flüsse immer größer als die Zahl der Gleichungen, so dass das Problem nicht geschlossen ist.
- Um weiter zu kommen, müssen wir die Unbekannten parametrisieren.
- Dies nennt man das Schließungsproblem für die Turbulenz.

# Eigenschaften des Schließungsproblems

- Betrachte die Bestimmungsgleichung für die mittlere potentielle Temperatur:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{LE}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

Dieser Term wird zweifache Korrelation oder zweites statistisches Moment genannt.

- Um diese Unbekannte zu entfernen entwickelt man eine "Vorhersage-Gleichung". Leider enthält diese (neue) Bestimmungsgleichung eine dreifache Korrelation (bzw. drittes statistisches Moment) wie  $\overline{\theta' u'_i u'_j}$ .
- Die Gleichung für das dritte Moment enthält aber ein Term mit einem vierten Moment, u.s.w.

- Tatsächlich ist die Sache noch schlimmer, weil  $\overline{\theta' u'_i u'_j}$  insgesamt 9 Terme repräsentiert, einen für jeden Wert von  $i$  und  $j$ . Wegen der Symmetrie des Tensors verbleiben von diesen 9 Termen 6 als Unbekannte, da z.B.

$$\overline{\theta' u'_1 u'_2} = \overline{\theta' u'_2 u'_1}$$

- Ähnliche Probleme treten bei den Impulsgleichungen turbulenter Bewegungen auf.



Beispiel für eine gewisse Anzahl von Gleichungen und Unbekannten für verschiedene statistische Momente des Impulses, um das Schließungsproblem für turbulente Flüsse zu verdeutlichen:

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
$\bar{u}_i$	<b>erstes</b>	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	<b>3</b>	<b>6</b>
$\overline{u'_i u'_j}$	<b>zweites</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>6</b>	<b>10</b>
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>drittes</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	<b>10</b>	<b>15</b>

- Der vollständig Satz von Gleichungen enthält sogar noch mehr Unbekannte.



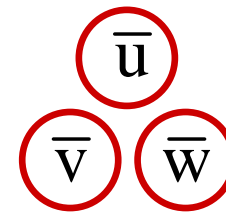
- Es gibt einen einfachen Weg, um zu erahnen, welche Unbekannten auf jedem Niveau der Schließung nach Berücksichtigung der Symmetrien erhalten bleiben (siehe nachfolgende Tabelle für die Impulskorrelationen).
- Im vollständigen Satz der Bewegungsgleichungen gibt es weitere Unbekannte, wie die Druckkorrelationen und die Terme, in denen Viskosität berücksichtigt wird.

- Korrelationsdreiecke zeigen die Unbekannten für verschiedene Niveaus des Schließungsansatzes für Turbulenz (aber nur für die Impulsgleichungen). Beachte das Muster in den Dreiecken, mit den  $u$ ,  $v$  und  $w$  Statistiken jeweils an den entsprechenden Scheitelpunkten und den Kreuzkorrelationen dazwischen.

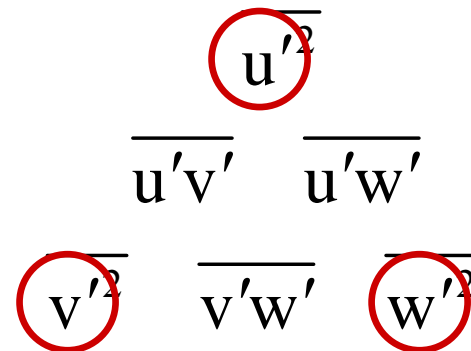
## Ordnung der Schließung

## Korrelationsdreieck der Unbek.

null



erster



## Ordnung der Schließung

## Korrelationsdreieck der Unbek.

zweiter

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \overline{u'^3} \\ & & & & & \overline{u'^2 v'} & \overline{u'^2 w'} \\ & & & & & \overline{u' v'^2} & \overline{u' v' w'} & \overline{u' w'^2} \\ & & & & \overline{v'^3} & \overline{v'^2 w'} & \overline{v' w'^2} & \overline{w'^3} \end{array}$$

- Um die mathematische/statistische Beschreibung von Turbulenz handhabbar zu machen ist ein Ansatz, nur eine endliche Anzahl von Gleichungen aufzustellen und dann die verbleibenden Unbekannten in Termen bekannter Größen zu approximieren.
- Solche Schließungsapproximationen oder Schließungsannahmen werden nach der höchsten Ordnung der Bestimmungsgleichung benannt, die zurück behalten wird.



- Nimmt man die Gleichungen in der Tabelle als Beispiel, wird die erste Gleichung für die Schließung 1. Ordnung benutzt und die zweiten Momente approximiert.
- Genauso: Schließung 2. Ordnung nutzt die zweite Gleichung und die dritten Momente werden approximiert.

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
$\bar{u}_i$	<b>erstes</b>	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	<b>3</b>	<b>6</b>
$\overline{u'_i u'_j}$	<b>zweites</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>6</b>	<b>10</b>
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>drittes</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	<b>10</b>	<b>15</b>

- Einige Schließungsannahmen verwenden nur einem Teil der verfügbaren Gleichungen innerhalb einer speziellen Momentkategorie.
- Ein Beispiel: Wenn die Gleichungen für TKE-, Temperatur- und Feuchtevarianzen zusammen mit den Impulsgleichungen für das erste Moment (siehe vorherige Tabelle) verwendet werden, kann das Ergebnis als Schließung 1.5-ter Ordnung eingestuft werden.
- Es handelt sich offensichtlich nicht um eine vollständig Schließung 2. Ordnung, weil nicht alle Bestimmungsgleichungen für die zweiten Momente (mit anderen Worten für die Flüsse) verwendet werden, aber der Ansatz ist sicherlich von höherer Ordnung als die Schließung 1. Ordnung.
- Ganz ähnlich kann man Methoden zur Schließung 0. Ordnung und 0.5-ter Ordnung definieren.

# Lokale und nicht-lokale Schließungen

- Es gibt zwei Methoden der Behandlung von Turbulenz: Lokale und nicht-lokale Schließungen.
- Weder die eine noch die andere Methode ist exakt, aber beide scheinen gut geeignet zu sein für die physikalische Situationen, für die die Parametrisierungen entwickelt wurden.
- Für lokale Schließungen wird eine unbekannte Größe an jedem Punkt im Raum durch Werte und/oder Gradienten von bekannten Größen am gleichen Punkt parametrisiert.
- Lokale Schließungen nehmen daher an, dass Turbulenz analog zur molekularen Diffusion ist.
- Das Beispiel von Donaldson (siehe unten) verdeutlicht das Vorgehen für eine lokale Schließung 2. Ordnung. In der Literatur findet man Beispiele bis zu lokalen Schließungen 3. Ordnung.

# Lokale und nicht-lokale Schließungen

- Für nicht-lokale Schließungen wird die unbekannte Größe an einem Punkt durch Werte von bekannten Größen an verschiedenen Punkten im Raum parametrisiert.
- Dies setzt voraus, dass Turbulenz eine Überlagerung von verschiedenen Eddies darstellt, von der ein jeder ein Fluid transportiert, wie etwa bei der Advektion.
- Nicht-lokale Methoden werden meist im Zusammenhang mit Schließungen 1. Ordnung verwendet.
- Die folgende Tabelle fasst die enorm große Anzahl von Schließungsmethoden zusammen, die in der Fachliteratur gefunden werden.
- Generell kann man sagen, dass lokale und nicht-lokale Schließungen höherer Ordnung genauere Ergebnisse liefern als Schließungen niedrigerer Ordnung, aber dies geht zu Lasten von Kosten und Komplexität.



Klassifikation von Schließungstechniken, die in der Literatur häufig zur Anwendung kommen (sogenannte Bulk- oder Ähnlichkeitsmethoden werden später diskutiert):

Ordnung der Schließung	lokal	nicht- lokal	Andere (Bulk- und Ähnlichkeitsmethoden)
0			X
0.5	X	X	X
1	X	X	
1.5	X		
2	X		
3	X		

# Regeln für Parametrisierungen

- Ungeachtet welcher Ordnung der verwendete Schließungsansatz auch ist, es bleiben unbekannte Turbulenzterme, die als Funktion bekannter Größen und Parameter parametrisiert werden müssen.
- Eine bekannte Größe ist jede Größe, die durch eine prognostische oder diagnostische Gleichung bestimmt ist.



- Ein Beispiel: Wenn eine Schließung 2. Ordnung verwendet wird, kann die unbekannte Größe  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  als Funktion von  $\bar{u}_i$  und  $\overline{u'_i u'_j}$  parametrisiert werden, da wir prognostische Gleichungen für diese Größen haben.

Budgetgl. für	Moment	Gleichung	Zahl der Gleichungen	Zahl der Unbek.
$\bar{u}_i$	<b>erstes</b>	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}$	<b>3</b>	<b>6</b>
$\overline{u'_i u'_j}$	<b>zweites</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>6</b>	<b>10</b>
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	<b>drittes</b>	$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j u'_k} = \dots - \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u'_i u'_j u'_k u'_m}$	<b>10</b>	<b>15</b>

- Ein Parameter ist für gewöhnlich eine Konstante, deren Wert empirisch bestimmt wird. Ein Parameter kann zum Beispiel ein separater Term sein, ein konstanter Faktor oder ein Exponent.
- Per Definition ist eine Parametrisierung eine Approximation der Realität. Mit anderen Worten, man ersetzt die "wahre" (natürliche) Gleichung, die einen Wert beschreibt, durch eine künstlich erzeugten Approximation.
- Manchmal werden Parametrisierung auch verwendet, da die wahre Physik nicht (vollständig) erforscht ist.
- Manchmal ist die bekannte Physik aber auch zu kompliziert, um sie in bestimmten Anwendungen zu benutzen (z.B. Einschränkung durch Computerleistung).
- Parametrisierungen werden selten perfekt sein - man hofft, dass sie angemessen sind.

- Parametrisierungen setzen menschliches Interpretationsvermögen und Kreativität voraus. D.h., dass verschiedene Personen unter Umständen zu unterschiedlichen Parametrisierungen der gleichen Unbekannten kommen.
- Schon 1973 erkannte Donaldson: "*There are more models for closure of the equations of motion at the second-order correlation level than there are principal investigators working on the problem*".
- Obwohl es wahrscheinlich ist, dass es für jede Größe einen unendlichen Satz von Parametrisierungen gibt, müssen alle Parametrisierungen bestimmten, allgemein akzeptablen Regeln folgen.
- Am wichtigsten dabei ist, dass die Parametrisierung für eine unbekannte Größe physikalisch vernünftig sein sollte.

# Regeln für Parametrisierungen

- Eine Parametrisierung muss folgende Regeln erfüllen:
  - gleiche Dimension wie die Unbekannte,
  - gleiche Tensoreigenschaften,
  - gleiche Symmetrien,
  - unveränderlich bei einer beliebigen Transformation des Koordinatensystems,
  - unveränderlich bei einer Galilei-Transformation (Änderung des Inertialsystems),
  - gleiche Budgetgleichungen und Randbedingungen.
- Diese Regeln gelten für Schließungen aller Ordnungen!

- Beispiel: Donaldson (1973) schlug vor, die unbekannte Größe  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  wie folgt zu parametrisieren:

$$-\Lambda \bar{e}^{1/2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_j u'_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} \right]$$

wobei  $\Lambda$  ein Parameter mit der Dimension einer Länge (m) ist und die Bekannten  $\bar{e}$  (TKE pro Einheitsmasse in  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ) und  $\overline{u'_i u'_j}$  (Impulsfluss in  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ).

(Siehe Stull, Seite 202: Dort wird gezeigt und diskutiert, dass alle soeben aufgestellten Regeln eingehalten werden.)

- Im folgenden werden einige gängige Parametrisierung kurz vorgestellt, die auch in der Literatur besprochen werden.
- Die Beispiele dienen der Demonstration verschiedener Typen der Schließung und ihrer jeweiligen Merkmale.
- Ungeachtet des Typs der verwendeten Parametrisierung schließt das Ergebnis die Bewegungsgleichung für turbulente Flüsse und erlaubt daher die Lösung für verschiedene Vorhersagen, Diagnostiken oder andere praktische Anwendungen.



# Lokale Schließungen 0-ter Ordnung

- Schließung 0-ter Ordnung bedeutet, dass keine prognostische Gleichungen vorhanden sind, noch nicht einmal Gleichungen für mittlere Größen.
- Mit anderen Worten, der mittlere Wind, Temperatur, Feuchte und andere mittlere Größen sind direkt als Funktion von Raum und Zeit parametrisiert.
- Offensichtlich handelt es sich dabei weder um eine lokale oder nicht-lokale Schließung, da die Behandlung (Parametrisierung) von Turbulenz insgesamt vernachlässigt wird.
- Aus diesem Grund beschäftigen wir uns im folgenden nicht weiter mit Schließungen 0-ter Ordnung, werden aber später bei der Behandlung von Ähnlichkeitstheorien darauf zurück kommen (nächstes Kapitel).

# Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Schließungen 0.5-ter Ordnung benutzen eine Untermenge der Gleichungen der 1. Momente.
- Eine Variante dieses Ansatzes ist die Bulk-Methode (ebenfalls ein Schließungsansatz für Turbulenz): Bei dieser Methode wird eine Profilform für Wind oder Temperatur angenommen, wobei das resultierende Wind- oder Temperaturprofil verschoben sein kann, abhängig von dem Mittelwert ("Bulk-Mittel")\* des Hintergrundwindes bzw. der Hintergrundtemperatur.

---

\* Bulk-Mittel: Eine meteorologische Variable gemittelt über eine vertikale Strecke einer Schicht, wie z.B. die konvektive ML.

# Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Beispiel: Ein Bulk-Mittel der GS  $\langle \bar{\theta}(t) \rangle$  wird vorhergesagt mittels Gleichungen wie:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial \bar{Q}_j^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{L_v E}{\bar{\rho} c_p} - \frac{\overline{\partial(u'_j \theta')}}{\partial x_j}$$

- Dann wird eine Form für das Profil  $\Delta \bar{\theta}(z)$  angenommen und die Werte von  $\bar{\theta}(z,t)$  können bestimmt werden durch:

$$\bar{\theta}(z, t) = \langle \bar{\theta}(t) \rangle + \Delta \bar{\theta}(z)$$

# Lokale Schließungen 0.5-ter Ordnung

- Solche Schemata werden verwendet für:
- 1) sog. Bulk oder "slab"\* ML Modelle mit  $\Delta\bar{\theta}(z) = 0$  in allen Höhen;
  - 2) für Wolkenmodelle, wobei  $\Delta\bar{\theta}(z)$  linear mit der Höhe modelliert wird, mit separaten Wolkenschichten und Zwischenschichten ohne Wolken; und
  - 3) für eine stabile GS, wobei  $\Delta\bar{\theta}(z)$  entweder linear, als Polynom oder durch ein Profil mit exponentieller Form, approximiert wird. (Siehe nächste Kapitel.)

---

\*slab = Platte; 'slab model': Modell einer gut durchmischten Oberflächen- oder Bodenschicht.

# (Lokale) Schließung 1. Ordnung

- Schließungen 1. Ordnung verwenden die prognostischen Gleichungen nur für die mittleren Variablen 0-ter Ordnung wie Wind, Temperatur und Feuchte.
- Man betrachte ein idealisiertes Szenario in einer trockenen Atmosphäre (Vernachlässigung der Feuchte), horizontaler Homogenität und keinem Absinken.
- Ferner wird angenommen, dass der geostrophische Wind bekannt ist.

# (Lokale) Schließung 1. Ordnung

- Die grundlegenden prognostischen Gleichungen für die Variablen 0-ter Ordnung reduzieren sich somit zu:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'}$$

- Die Unbekannten in diesem Satz von Gleichungen sind die zweiten Momente:  $\overline{u'w'}$   $\overline{v'w'}$   $\overline{w'\theta'}$
- Um diesen Satz Gleichungen (Ekman Gleichungen) zu schließen, müssen die turbulenten Flüsse parametrisiert werden.

- Wenn  $\xi$  eine beliebige Variable sei, dann ist eine mögliche Schließung 1. Ordnung für den Fluss  $\overline{u'_j \xi'}$  gegeben durch:

$$\overline{u'_j \xi'} = -K_\xi \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial x_j}$$

wobei der Parameter  $K_\xi$  ein Skalar ist (in  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ).

- Für positive  $K_\xi$  legt der obige Ausdruck nahe, dass der Fluss  $\overline{u'_j \xi'}$  abwärts zum lokalen Gradienten von  $\overline{\xi}$  fließt.

- Diese Schließungsapproximation wird oft die "Gradienten-Transport Theorie" oder K-Theorie genannt.
- Obwohl es sich hierbei um eine der einfachsten Parametrisierungen handelt, verfehlt sie oft ihren Zweck, wenn z.B. großskalige Eddies in der Strömung vorkommen.
- Daher kann man diesen Ansatz als Schließungstechnik für kleine Eddies klassifizieren.



# Lokale Schließung

- $K$  (= skalare Größe) hat verschiedene Namen:
  - Eddy Viskosität,
  - Eddy Diffusivität,
  - Eddy-Transferkoeffizient,
  - turbulenter Transferkoeffizient,
  - Gradienten-Transferkoeffizient.
- Letztere Bezeichnung wird gewählt, da (wie oben gezeigt) durch  $K$  die Beziehung zwischen dem turbulenten Fluss und dem Gradienten der entsprechenden mittleren Variablen hergestellt wird.
- Manchmal werden verschiedene  $K$ -Werte für verschiedene Variable verwendet. Ein Index "M" wird z.B. für den Impuls (engl. momentum) eingesetzt und somit ergibt sich  $K_M$  als Eddy Viskosität.

# Lokale Schließung

- Für Wärme und Feuchte benutzt man  $K_H$  und  $K_E$  für die entsprechenden Eddy-Diffusivitätskoeffizienten.
- In einigen Experimenten findet man, dass sich für statisch neutrale Bedingungen ergibt:

$$K_H = K_E = 1.35K_M$$

- Es ist nach wie vor nicht klar, warum  $K_M$  kleiner sein sollte als andere  $K$  Werte.
- Möglicherweise haben Effekte der Druckkorrelation die Messungen beeinflusst, worauf der Ausdruck ja basiert.

# Beispiel 1

- Gegeben  $K_H = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  für Turbulenz in einer stabilen Umgebung, mit einem lokalen Temperaturgradienten  $\partial \bar{\theta} / \partial z = 0.01 \text{ K/m}$ . Finde  $\overline{w'\theta'}$ .

Lösung: nehme  $\overline{u'_j \xi'} = -K_\xi \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_j}$  mit  $\bar{\xi} = \bar{\theta} \quad j = 3$

$$\overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \times 0.01 \text{ K m}^{-1} = -0.05 \text{ K m s}^{-1}$$

## Diskussion:

Normalerweise würde man in einem stabil geschichteten Umfeld einen negativen Wärmefluss erwarten, wenn man nur kleine Eddies annimmt. Mit anderen Worten: In einer Umgebung mit warmer Luft über kalter Luft verfrachtet Turbulenz warme Luft in kältere Gebiete, was in diesem Fall einen abwärtsgerichteten (oder negativen) Wärmefluss darstellt.

## Beispiel 2

- Entwickle einen Satz von Parametrisierung, um die Ekman Gleichungen zu schließen.

Lösung:

$$\overline{u'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\overline{v'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$\overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Diskussion: Wenn diese Gleichungen in die Ekman-Gleichungen eingesetzt werden, dann erhält man drei Gleichungen mit drei Unbekannten  $\bar{q}$ ,  $\bar{u}$ , und  $\bar{v}$ . Dies ist ein geschlossener Satz der analytisch gelöst werden kann, wenn die K-Werte bekannt sind.

## Beispiel 3

- Gegeben  $K_H = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  für Turbulenz in einem horizontal homogenen Hintergrund, bestimme  $\overline{u'\theta'}$ .

Lösung:

$$\overline{u'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$$

Horizontal homogen  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \overline{u'\theta'} = 0$

Diskussion: Es macht keinen Unterschied ob  $K_H$  positiv, negativ oder außergewöhnlich groß ist – die K-Theorie führt in einer gleichförmigen Umgebung (Hintergrund) immer dazu, dass der Fluss gleich Null ist.

# Analogie mit der Viskosität

- Für ein Newton'sches Fluid kann die molekulare Spannung  $\tau_{\text{mol}}$  approximiert werden durch (siehe Kapitel 2):

$$\tau_{\text{mol}} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

- Durch Vergleich kann man erwarten, dass die turbulente Reynolds Spannung durch Terme der mittleren Scherung ausgedrückt werden kann, wobei  $\nu$  ersetzt wird durch die Eddy Viskosität  $K_M$ :

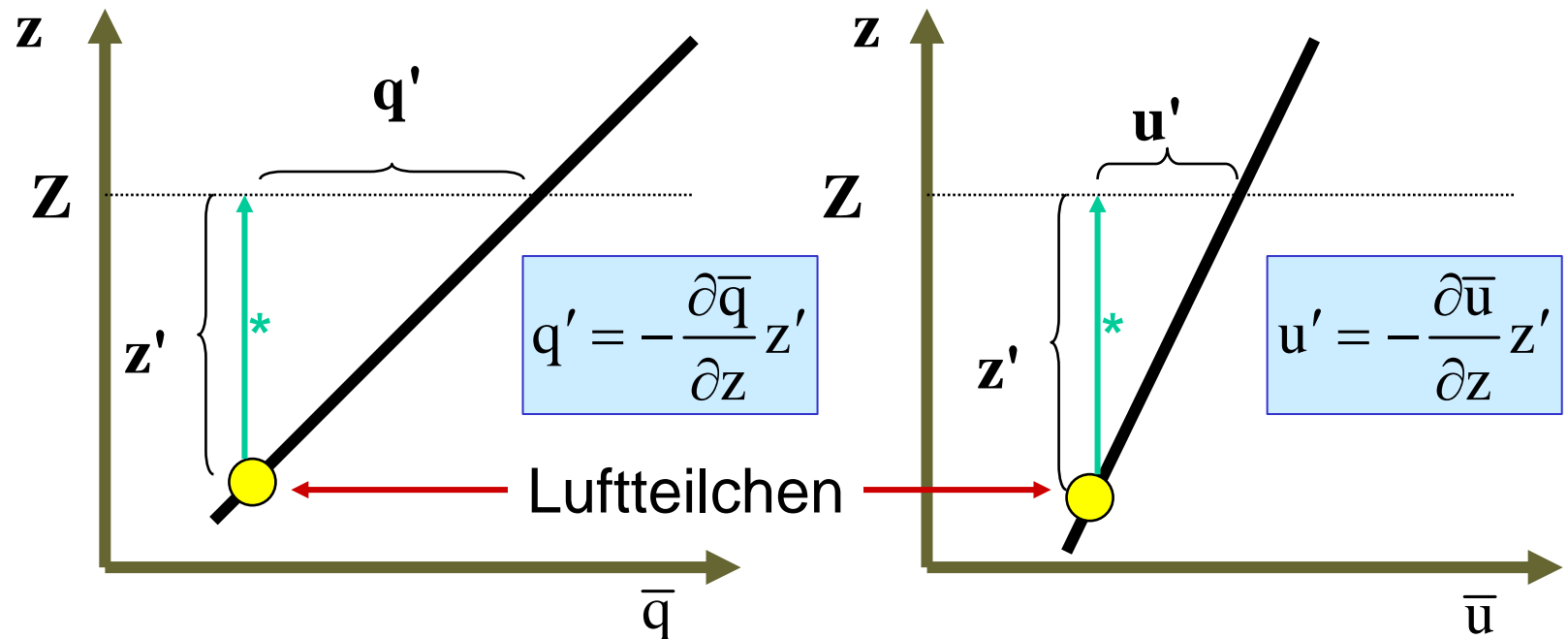
$$\tau_{\text{Reynolds}} = \rho K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

- Division durch  $\rho$  ergibt die gebräuchliche kinematische Form.
- $\rho K_M$  wird manchmal auch Austauschkoefizient genannt.

- Da Turbulenz bei der Erzeugung von Mischung effektiver ist als Viskosität, würde man erwarten, dass  $K_M > \nu$ .
- Werte von  $K_M$ , die man in der Literatur findet, variieren von  $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  bis  $2000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , mit typischen Werten von  $\approx 1$  to  $10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .
- Werte von  $\nu$  sind viel kleiner:  $\approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .
- Die Größe ist nicht der einzige Unterschied zwischen molekularer und Eddy Viskosität: Ein weiterer wichtiger Unterschied ist, dass  $\nu$  eine Funktion des Fluids ist,  $K_M$  aber eine Funktion des Flusses.
- Während  $\nu$  einzig durch die chemische Zusammensetzung des Fluids und seinen Zustand (Temperatur, Druck, etc.) bestimmt ist, variiert  $K_M$  in dem Maß, wie die Turbulenz variiert.
- Daher muss man  $K_M$  als Funktion anderer Variable wie z.B.  $z/L$  (Richardsonzahl) oder die Stabilität  $\partial\theta_v / \partial z$ , parametrisieren.

# Theorie der Mischungslänge (Prandtl, 1925)

- Angenommen, es existiere Turbulenz in einer statisch neutralen Umgebung mit einem linearen mittleren Feuchtegradienten in vertikaler Richtung.



\*: Bewegung des Luftpartikels



- Wenn ein Partikel über eine Distanz  $z'$  nach oben wandert, muss es eine Geschwindigkeit  $w'$  haben.
- Wenn die Natur der Turbulenz so ist, dass  $w'$  proportional zu  $u'$  ist, dann erwartet man  $w' = -cu'$  für die lineare Windscherung, wie in der vorherigen Abbildung angedeutet (d.h. für  $\partial u/\partial z > 0$ ) und  $w' = cu'$  für  $\partial u/\partial z < 0$ , wobei  $c$  eine Proportionalitätskonstante ist.

$$u' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} z' \quad \longrightarrow \quad w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z' \quad (6.4.4c)$$

Daraus ergibt sich, dass die Größe der Scherung wichtig ist!

➤ Kapitel 2: Der kinematische Eddy Feuchtefluss ist  $R = \overline{w'q'}$

➤ Wir wissen, dass  $q' = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} z'$  und  $w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z'$ .

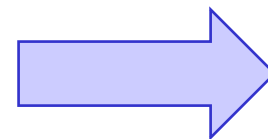
➤ Multiplikation der beiden Gleichungen und Mittelung über das Spektrum der verschiedenen Eddy-Größen  $z'$ , um den mittleren Fluss  $R$  zu erhalten:

$$R = -c \overline{(z')^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

$\overline{(z')^2}$  ist die Varianz der Abstandverschiebung des Teilchens.

$\sqrt{\overline{(z')^2}}$  ist ein Maß der mittleren Strecke, die sich ein Teilchen während eines Mischungsprozesses, der den Fluss  $R$  erzeugt, bewegt.

➤ Auf diese Weise kann man eine Mischungslänge  $l$  definieren durch  $l^2 = c \overline{(z')^2}$



$$R = -l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

- Hierbei handelt es sich um eine direkte Analogie zur K-Theorie, wenn

$$\underline{K_E = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|} \quad \text{mit} \quad R = -K_E \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

Angenommen, dass  $|K_E|$  anwächst, so wie die Scherung zunimmt (d.h. als ein Maß für die Turbulenzintensität) und auch wie die Mischungslänge zunimmt (d.h. als ein Maß der Turbulenz, Mischung zu erzeugen).

- In der Bodenschicht ist die Größe der turbulenten Eddies durch die Erdoberfläche begrenzt. Deshalb wird manchmal angenommen, dass  $l^2 = k^2 z^2$ ,  $k =$  von Kármán Konstante  $\Rightarrow$  die Eddy Viskosität in der Bodenschicht:

$$K_E = k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$$

- Delage schlug 1974 eine Parametrisierung für die Mischungslänge in stabilen Grenzschichten vor, die seitdem als Startpunkt für andere Parametrisierungen verwendet wird:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{kz} + \frac{1}{0.0004U_g / f} + \frac{\beta}{kL_L}$$

wobei  $L_L$  eine lokale Obukhov Länge darstellt, die auf lokalen Werten der Scherspannung und des Wärmeflusses oberhalb der Erdoberfläche basiert;  $U_g$  ist die geostrophische Windgeschwindigkeit und  $\beta$  ist eine empirische Konstante.

# Einschränkungen der Theorie der Mischungslänge

- Die Beziehung  $w' = c \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| z'$  ist nur dann gültig, wenn Turbulenz mechanisch erzeugt ist.
- Deshalb ist die Herleitung einer Mischungslänge nur für statisch neutrale Bedingungen gültig, obwohl die K-Theorie auf statisch stabile Bedingungen angewendet wird.
- Ferner werden lineare Gradienten für Wind und Feuchte angenommen, was aus  $q' = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} z'$  abgeleitet wird.
- In der realen Atmosphäre können Gradienten nur über kleine Entfernungen linear approximiert werden (d.h. der Term 1. Ordnung in einer Taylorreihenentwicklung)  $\Rightarrow$  Die Theorie der Mischungslänge gilt nur für kleine Eddies.

# Annahmen bei der Parametrisierung von $K$

- Am besten wird die Eddy Viskosität als nicht konstant angenommen, sondern als Funktion des Flusses (der Bewegung) parametrisiert.
- Eine Parametrisierung für  $K$  sollte folgende Bedingungen erfüllen:
  - $K = 0$ , wo es keine Turbulenz gibt;
  - $K = 0$  am Erdboden ( $z = 0$ );
  - $K$  wächst in gleichem Maße, wie die TKE;
  - $K$  variiert mit der statischen Stabilität (tatsächlich sollte man erwarten, dass in jeder Koordinatenrichtung bei anisotroper Turbulenz ein anderer Wert für  $K$  verwendet wird);
  - $K$  ist positiv (wenn man die Analogie mit der Viskosität verwendet).
- Die letzte Randbedingung wird zuweilen ignoriert.

# Bemerkungen zur Eddy Viskosität

- Das gängige Konzept der Eddy Viskosität oder der Theorie für kleine Eddies ist, dass ein turbulenter Fluss hin zu kleineren Werten gerichtet ist.
- Solch ein "Gradienten-abwärts" (engl. down-gradient) gerichteter Transport bedeutet, dass Wärme von warm nach kalt geht, Feuchte von feucht zu trocken, u.s.w.
- Dieser Transport ist mit positiven Werten für  $K$  verbunden und ist konsistent mit der Analogie zur molekularen Viskosität.
- In der Atmosphäre gibt es aber auch Situationen, wo der Transport in entgegengesetzter Richtung geht (engl. counter-gradient).
- Dies kann physikalisch so erklärt werden, dass große (überlagerte) Eddies den Transport bestimmen, egal wie der lokale Gradient des Hintergrundes ist.

- Um die K-Theorie (die für kleine Eddies gilt) auch für größere Eddies in einer konvektiven GS anwendbar zu machen, muss man von negativen K-Werten Gebrauch machen.
- Da dies dazu führt, dass Wärme auch von kalt nach warm fließen kann, ist dies nicht in Übereinstimmung mit unserem allgemeinen Verständnis des Diffusionskonzeptes.
- Aus diesem Grund ist die K-Theorie nicht in konvektiven ML zu verwenden.
- Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten K zu parametrisieren.
- Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht von verschiedenen Parametrisierungen für K.
- Dabei werden auch Variationen von K in der Horizontalen vorgeschlagen, um z.B. das Phänomen der mesoskaligen, zellenförmigen Konvektion zu erklären.



# Beispiele von Parametrisierungen für K in der GS

## Neutrale Bodenschicht:

$$K = \text{constant}$$

not the best parameterization

$$K = u_*^2 T_0$$

where  $u_*$  is the friction velocity

$$K = U^2 T_0$$

where  $T_0$  is a timescale

$$K = k z u_*$$

where  $k$  is von Karman's constant

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z)^2 + (\partial \bar{v} / \partial z)^2]^{1/2}$$

from mixing-length theory

$$K = l^2 (\partial \bar{u} / \partial z)^2$$

where  $l = k(z+z_0) / \{1 + [k(z+z_0)/\Lambda]\}$ ,  $\Lambda$  = length scale

## Diabatische Bodenschicht: $K_{\text{statically unstable}} > K_{\text{neutral}} > K_{\text{statically stable}}$

$$K = k z u_* / \phi_M(z/L)$$

where  $\phi_M$  a dimensionless shear (see appendix A),

and  $L$  is the Obukhov length (appendix A)

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z) + \{(g / \bar{\theta}_v) \cdot |\partial \bar{\theta}_v / \partial z|\}]^{1/2} \text{ for statically unstable conditions}$$

$$K = k^2 z^2 [(\partial \bar{u} / \partial z) - (L_* / z)^{1/6} \{(15g / \bar{\theta}_v) \cdot |\partial \bar{\theta}_v / \partial z|\}]^{1/2} \text{ for statically stable conditions, where}$$

$$L_* = -\theta u_*^2 / (15 k g \theta_*)$$

# Beispiele von Parametrisierungen für K in der GS

Neutral oder stabile GS:

$K = \text{constant}$

see Ekman Spiral derivation in next subsection

$$K = K(h) + [(h-z)/(h-z_{SL})]^2 \{K(z_{SL}) - K(h) + (z-z_{SL})[\partial K/\partial z]_{z_{SL}} + 2(K(z_{SL})-K(h))/(h-z_{SL})\}$$

this is known as the O'Brien cubic polynomial approximation (O'Brien, 1970), see Fig 6-2, where  $z_{SL}$  represents the surface layer depth.

Instabile (konvektive) GS:

$$K = 1.1 [(R_c - Ri) / Ri]^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$$

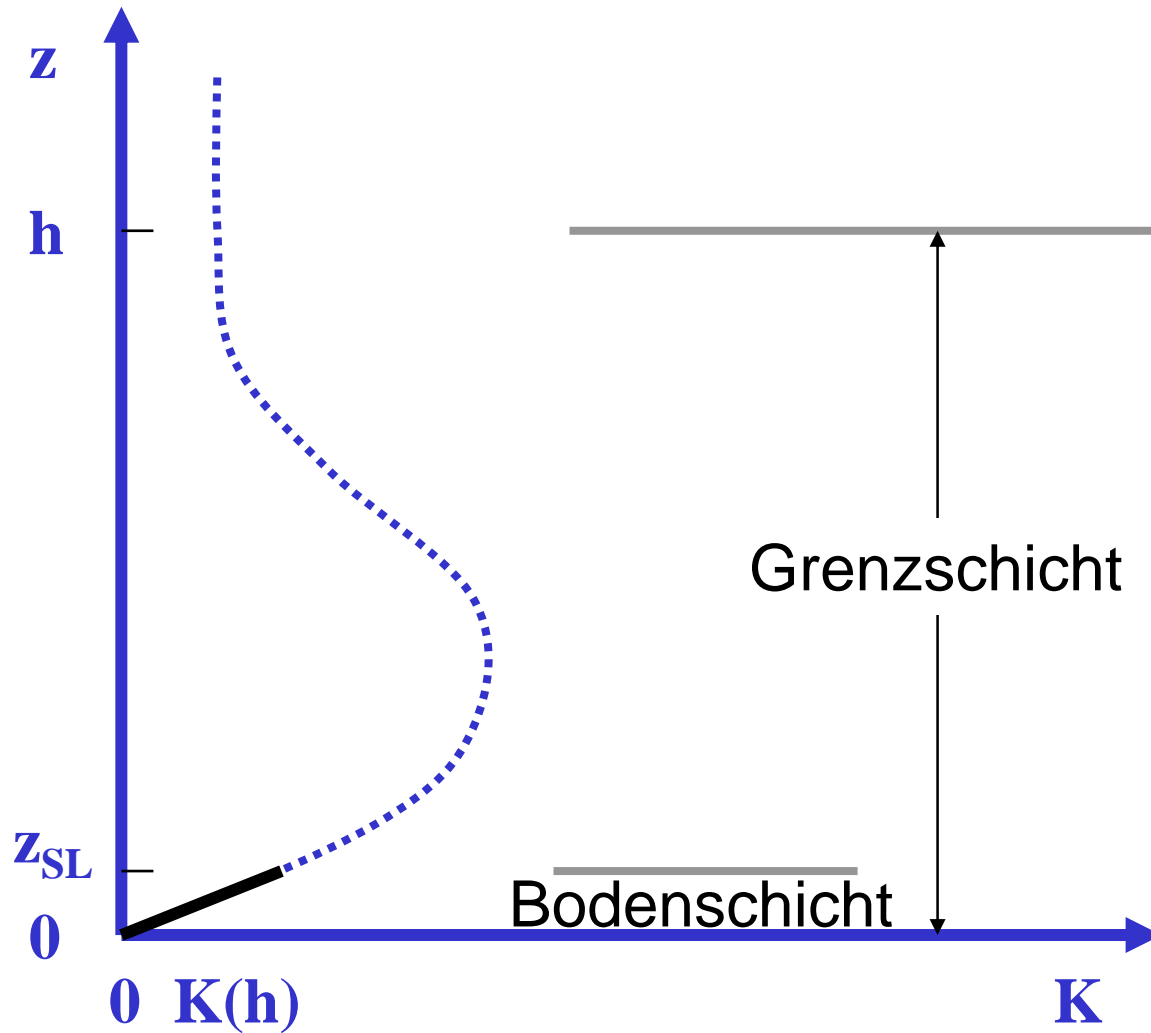
for  $\partial \bar{\theta}_v / \partial z > 0$  where  $l = kz$  for  $z < 200$  m and

$$K = (1 - 18 Ri)^{-1/2} l^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$$

for  $\partial \bar{\theta}_v / \partial z < 0$   $l = 70$  m for  $z > 200$  m.

Numerische Approximation für einen unelastischen 3D Fluss:

$$K = (0.25 \Delta)^2 \cdot |0.5 \sum_j \sum_j [\partial \bar{u}_j / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_j - (2/3) \delta_{ij} \sum_k (\partial \bar{u}_k / \partial x_k)]^2|^{1/2} \quad \text{where } \Delta = \text{grid size}$$



Typische Variation der Eddy Viskosität  $K$  mit der Höhe in der GS.

# Die Ekmanspirale

- Selbst mit einem Schließungsansatz 1. Ordnung ist eine analytische Lösung der Ekmangleichungen zu schwierig.
- Eine Ausnahme ist der Fall einer stationären ( $\partial(-)/\partial t = 0$ ), horizontal homogenen ( $\partial(-)/\partial x = 0, \partial(-)/\partial y = 0$ ), statisch neutralen ( $\partial\bar{\theta}_v/\partial z = 0$ ), barotropen Atmosphäre ( $\bar{u}_g, \bar{v}_g$  konstant mit der Höhe) ohne Absinken ( $\bar{w} = 0$ ).

$$-f(\bar{v} - \bar{v}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$f(\bar{u} - \bar{u}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

vereinfachte  
Ekman

- Ekman fand 1905 eine analytische Lösung dieser Gleichungen für den Ozean; kurz danach wurde sie für die Atmosphäre modifiziert.

- Ausrichtung der x-Achse mit dem geostrophischen Wind (d.h. wähle  $v_g = 0$ ).
- Nutzung einer lokalen Schließung 1. Ordnung mit konstanten  $K_M$ . Da

$$\overline{u'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad , \quad \overline{v'w'} = -K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad \text{folgt:}$$

$$f\bar{v} = -K_M \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

$$f(\bar{u} - \bar{u}_g) = K_M \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}$$

- Die Randbedingungen sind:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ in } z = 0 \text{ und } (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (\bar{u}_g, 0) \text{ für } z \rightarrow \infty$$

- Lösung:

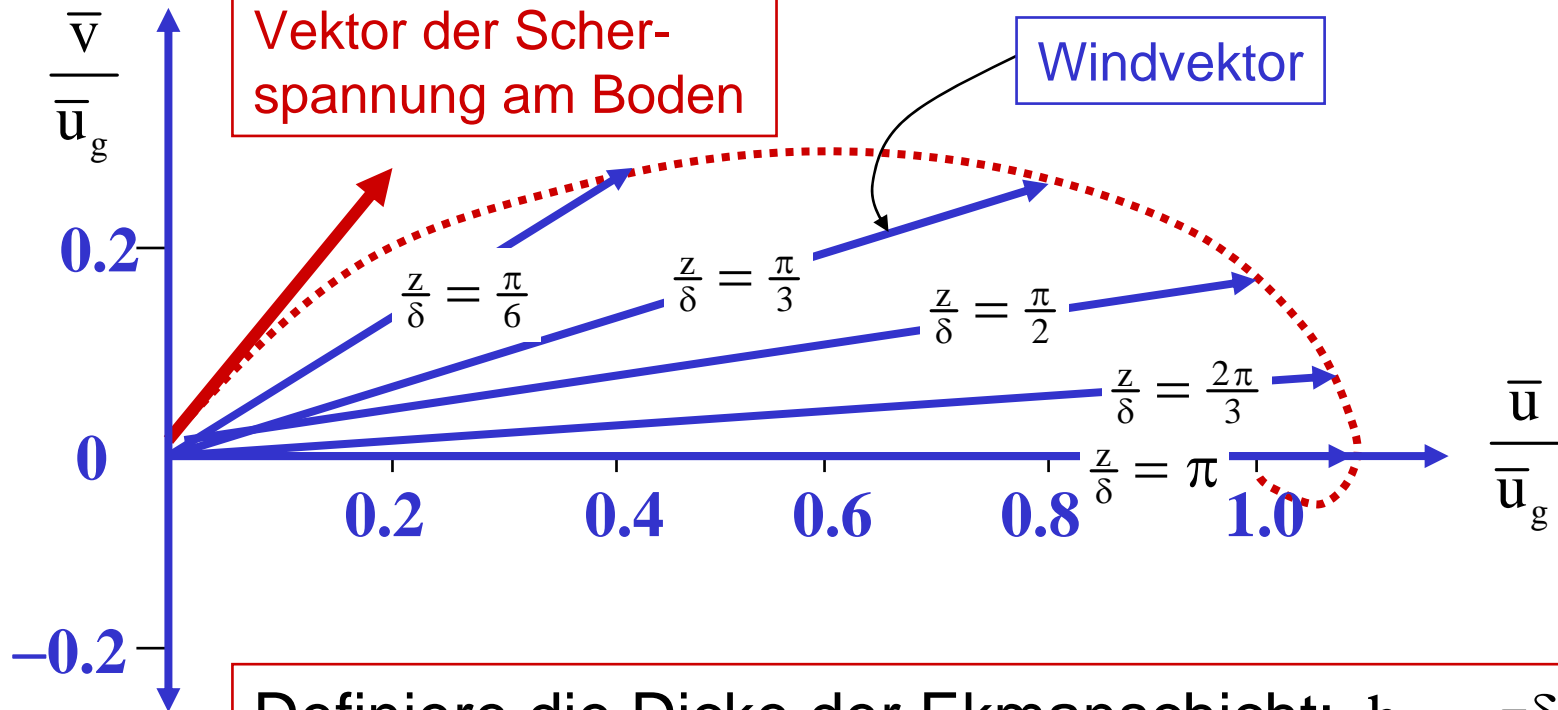


# Lösung für die Ekman'schicht

$$\bar{u} = \bar{u}_g [1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)] \quad \bar{v} = \bar{u}_g [e^{-z/\delta} \sin(z/\delta)]$$

$$1/\delta = (f / 2K_M)^{1/2} = \gamma_E$$

Atmosphäre



Vektor der Scher-  
spannung am Boden

Windvektor

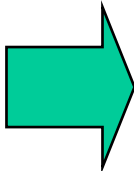
Definiere die Dicke der Ekman'schicht:  $h_E = \pi\delta$ .

# Scherspannung am Boden

- Verwende  $u_*^2$  als Maß für die Scherspannung am Boden

$$u_*^2 = \sqrt{\left(\overline{u'w'}\right)_s^2 + \left(\overline{v'w'}\right)_s^2} = K_M \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_s^2}$$

- Nehme  $\bar{u} = \bar{u}_g [1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)]$        $\bar{v} = \bar{u}_g [e^{-z/\delta} \sin(z/\delta)]$

- Setze  $z = 0$    $u_*^2 = \bar{u}_g \sqrt{K_M f}$

# Dicke der Ekman-schicht

- Bei  $z = \pi\delta = \pi/\gamma_E$  wird die Windgeschwindigkeit supergeostrophisch; es ist ebenso die niedrigste Höhe, wo der Wind parallel zum geostrophischen Wind ist.
- Manchmal wird diese Höhe auch als Abschätzung für die Dicke der neutralen GS verwendet.
- Daher ist die Dicke der Ekman-schicht definiert durch  $h_E = \pi\delta = \pi/\gamma_E$ .
- Angenommen, dass  $K_M = (ck) u_* h_E$ , wobei  $c$  eine Proportionalitätskonstante  $\approx 0.1$  und  $k$  die von Kármán Konstante ist, dann folgt

$$h_E = 2ck\pi^2 u_* / f \quad [ = 2 \pi^2 (u_* / f) ]$$



## Ekman Pumpe (engl. Ekman pumping)

- Die wichtigste Schlussfolgerung aus der Lösung der Ekmangleichungen ist, dass Reibung die Windgeschwindigkeit in der GS auf Werte unterhalb der geostrophischen Geschwindigkeit reduziert und somit der Wind hier die Isobaren von hohem zu niedrigen Drucken kreuzt.
- In einer synoptischen Situation, in der die Isobaren gekrümmt sind, so wie in einem Tief- oder Hochdruckgebiet, begründet dieser Fluss nahe der Oberfläche quer zu den Isobaren entweder eine Konvergenz oder eine Divergenz.
- Aus Gründen der Masseerhaltung muss daher in einem Tiefdruckgebiet Luft aufsteigen und in einem Hochdruckgebiet absinken.
- Dieser Prozess der Berücksichtigung von vertikaler Bewegung, verursacht durch Reibung in der GS, wird Ekman Pumpe genannt.

# Die ozeanische Ekman-schicht

- Ozeanische Ströme werden durch Scherspannungen des Windes an der Oberfläche angetrieben; unter Vernachlässigung des Druckgradienten im Ozean ergibt sich

$$f\bar{v} = -K_M \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad f\bar{u} = K_M \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}$$

- Wähle das Koordinatensystem mit der x-Achse in Richtung der Scherspannung am Boden sowie die z-Achse positiv nach oben.
- Die Randbedingungen sind:

$$K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad \text{in } z = 0 \quad \text{und } (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (0, 0) \quad \text{für } z \rightarrow -\infty$$

$K_M$  und  $u_*$  beziehen sich auf entsprechende Ozeanwerte

$$\rho u_*^2 \Big|_{\text{water}} = \text{surface stress} = \rho u_*^2 \Big|_{\text{air}}$$

➤ Lösung:

$$\bar{u} = \bar{u}_o e^{z/\delta_E} \cos(z/\delta_E - \pi/4)$$

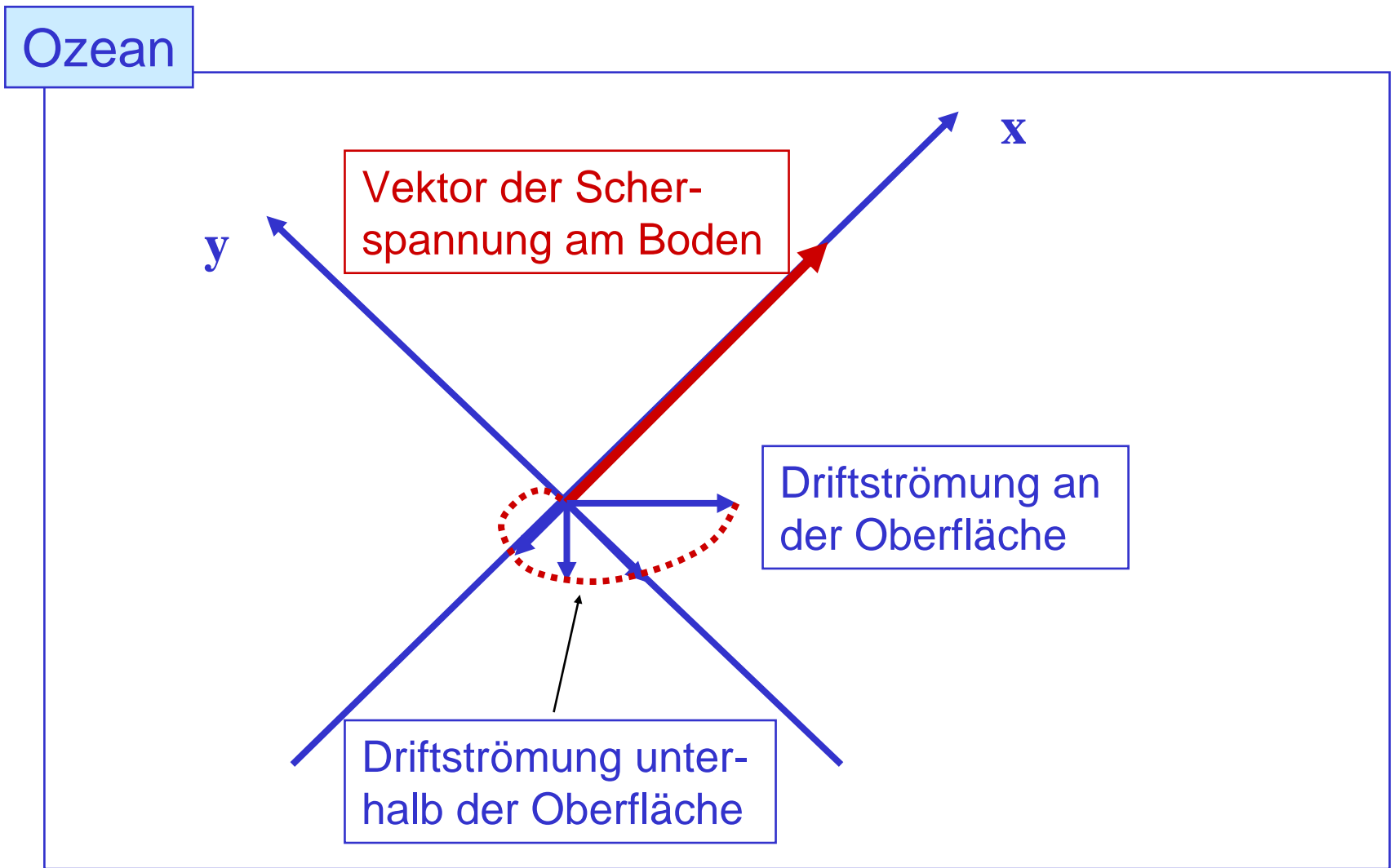
$$\bar{v} = \bar{u}_o e^{z/\delta_E} \sin(z/\delta_E - \pi/4)$$

$$\bar{u}_o = \frac{u_*^2}{\sqrt{K_M f}}$$

➤  $K_M$  und  $\delta_E$  entsprechen Werten für den Ozean.



Abbildung



Die Oberflächenströmung ist, bezogen auf die Scherspannung am Boden, um  $45^\circ$  nach rechts gedreht in Richtung von  $u_g$ . Die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist  $\approx |u_g|/30$ .

# Diskussion

- Obwohl eine analytische Lösung der Ekman Gleichungen existiert, gibt es entsprechende Situationen (mit den so gewählten Randbedingungen) in der Atmosphäre äußerst selten.
- Bestenfalls ergibt sie eine quantitative Abschätzung für eine statisch neutrale GS, d.h. mechanische Erzeugung von Turbulenz durch starke Winde ohne Auftriebseffekte.
- In konvektiven ML kann man die Form des Ekmanprofils nicht beobachten, obwohl es qualitativ mit beobachteten Winden übereinstimmt, die subgeostrophisch sind und die Isobaren kreuzen.
- Beobachtete stabile GS können in geringer Höhe supergeostrophische Windgeschwindigkeiten aufweisen und somit die Lösung der Ekman Gleichungen auch qualitativ falsch werden lassen.

# Lokaler Schließungsansatz 1.5-ter Ordnung

- Schließungen 1.5-ter Ordnung verwenden die Bestimmungsgleichungen für statistische Größen 0-ter Ordnung wie mittlerer Wind, Temperatur, Feuchte und sie verwenden ferner die Gleichungen für die entsprechenden Varianzen dieser Größen.
- Die TKE Gleichung wird für gewöhnlich anstelle der Gleichungen für die Geschwindigkeitsvarianzen benutzt.
- Das nun folgende Beispiel betrachtet eine horizontal homogene, trockene Atmosphäre ohne Absinken (wie auch schon zuvor).
- Die Bestimmungsgleichungen sind:

Impuls

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f(\bar{v} - \bar{v}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + f(\bar{u} - \bar{u}_g) = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}$$

Wärme

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'}$$

TKE

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{w' \left( \frac{p'}{\bar{\rho}} + e \right)} \right] - \varepsilon$$

Temperaturvarianz

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} = -2\overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w'\theta'^2}}{\partial z} - 2\varepsilon_\theta - \varepsilon_R$$

Unbekannte

<u><math>\overline{u'w'}, \overline{v'w'}, \overline{w'\theta'}, \overline{w'p'}/\bar{\rho}</math></u>	<u><math>\overline{w'e}, \overline{w'\theta'^2}</math></u>	<u><math>\varepsilon, \varepsilon_\theta, \varepsilon_R</math></u>
--	--	--

2. Momente (Flüsse)

3. Momente

Dissipations-  
terme

# Diskussion

- Auf den ersten Blick scheint die Hinzunahme von den Varianzgleichungen eher zu schaden als zu nutzen.
- Mit dem Schließungsansatz 1. Ordnung hatte man 3 unbekannte Flüsse:  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$ ,  $\overline{w'\theta'}$
- Nun hat man zusätzlich 6 Unbekannte! Warum?
- Der Grund ist, dass die Kenntnis der Varianzen von TKE und Temperatur ein Maß für die Intensität und Effektivität der Turbulenz geben.
- Diese Information kann man nutzen, um eine verbesserte Parametrisierung der Eddy Diffusivität  $K_M(\bar{e}, \theta'^2)$  zu erhalten.
- Es folgt ein möglicher Satz von Parametrisierungen für die Unbekannten:



$$\begin{aligned}
\overline{u'w'} &= -K_M(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\
\overline{v'w'} &= -K_M(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
\overline{w'\theta'} &= -K_H(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \gamma_c(\bar{e}, \overline{\theta'^2}) \\
\overline{w' \left( \frac{p'}{\bar{\rho}} + e \right)} &= \frac{5}{3} \Lambda_4 e^{-1/2} \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} \\
\overline{w'\theta'^2} &= \Lambda_3 e^{-1/2} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial z} \\
\varepsilon_R &= 0 \quad \varepsilon = \frac{\bar{e}^{3/2}}{\Lambda_1} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\bar{e}^{1/2} \overline{\theta'^2}}{\Lambda_2}
\end{aligned}$$

$\Lambda_n$  ist ein empirischer Parameter für die Längenskala. Diese werden häufig in einer Weise gewählt, dass Modellergebnisse am besten mit Beobachtungen übereinstimmen.

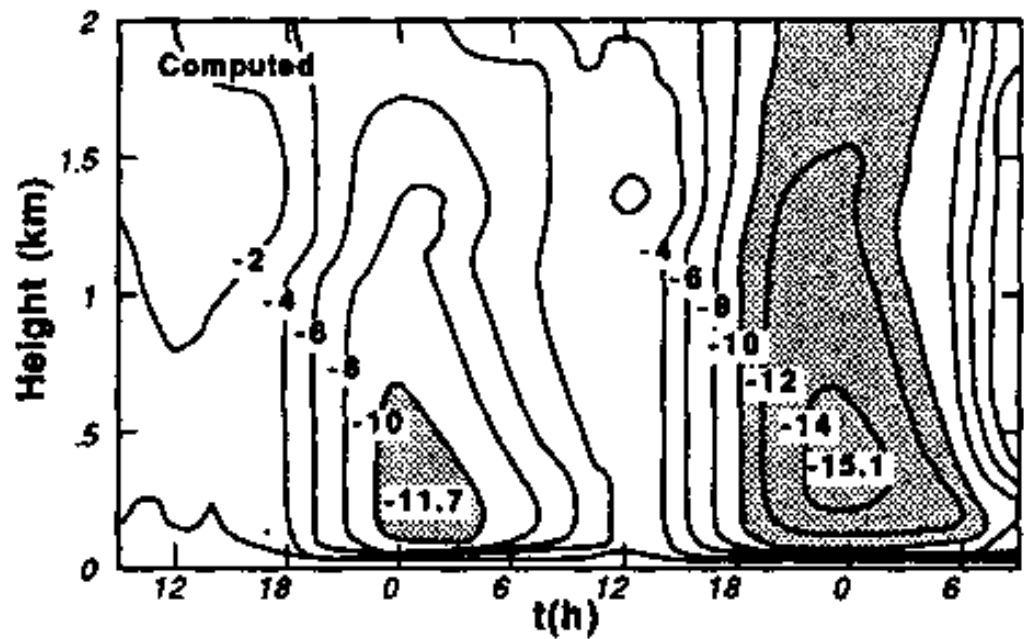
- Ein wesentliches Problem mit dem diskutierten Schließungsansatz ist, dass die Wahl der Längenskala recht willkürlich ist.
- Die Ausdrücke für  $K$  sind ebenfalls sehr komplex, sie können jedoch approximiert werden durch:

$$K = \Lambda \bar{e}^{1/2}$$

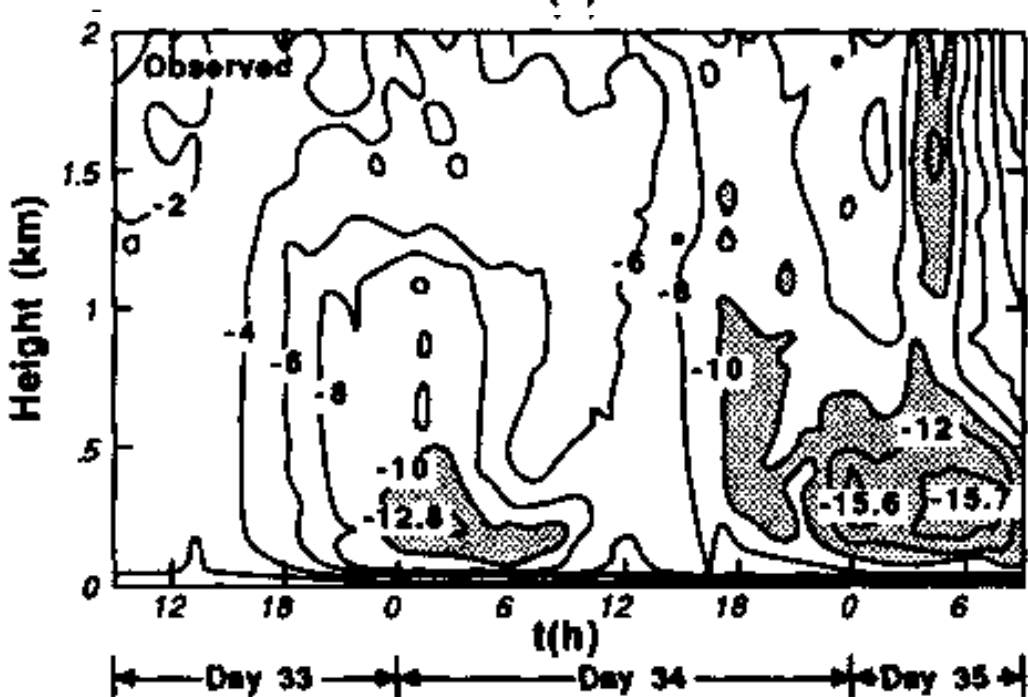
$\Lambda$  entspricht einer der empirischen Längenskalen.

# Eine numerische Berechnung

- Der obige Satz von Gleichungen ist viel zu komplex, um ihn analytisch zu lösen.
- Deswegen werden die Gleichungen numerisch, unter Zuhilfenahme der Methode der finiten Differenzen, gelöst.
- In den nachfolgenden Abbildungen wird die numerische Simulation der GS für eine 2-tägige Episode gezeigt (das Wangara Feldexperiment) unter Verwendung einer Schließung 1.5-ter Ordnung (nach Yamada-Mellor, 1975).

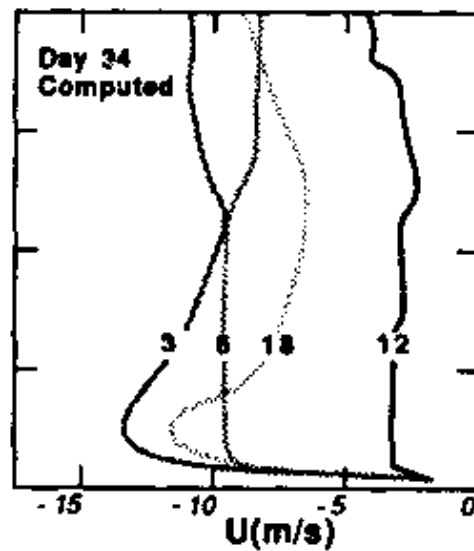
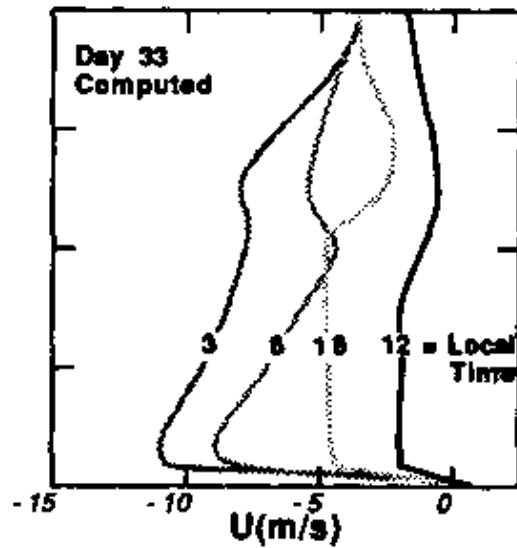


⇐ numerisch simuliert  
unter Verwendung einer  
Schließung 1.5-ter Ord-  
nung



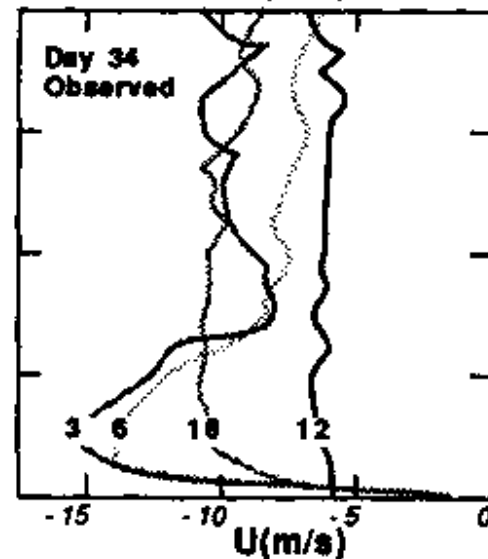
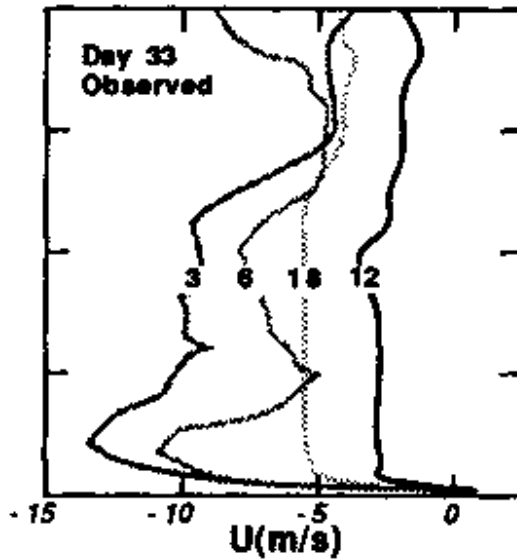
Windgeschwindigkeit  
(nach Osten)

⇐ Beobachtungen  
Wangara, Tage 33-35

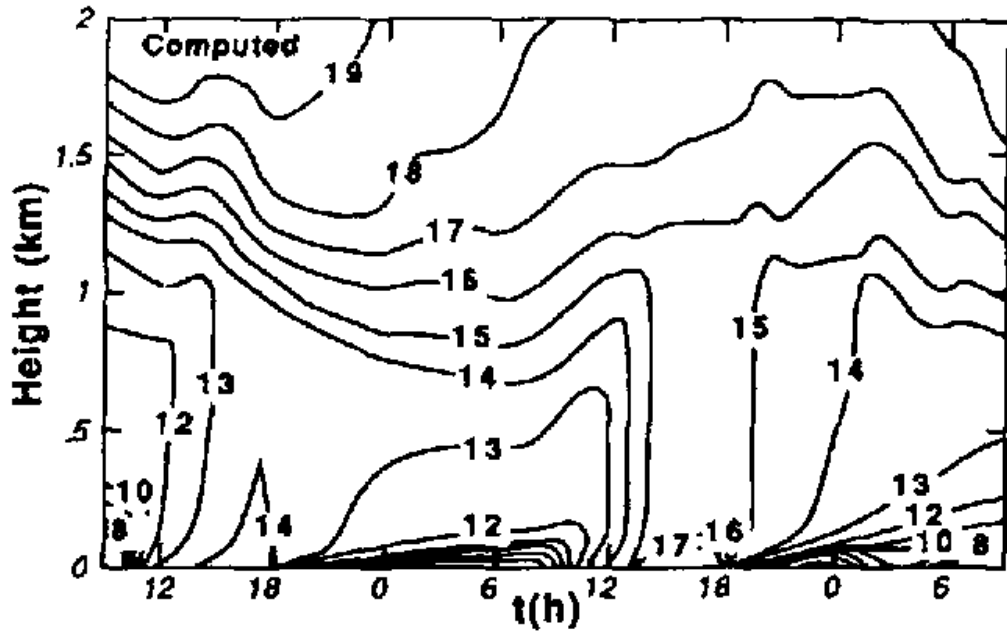


⇐ numerisch simuliert  
unter Verwendung einer  
Schließung 1.5-ter Ord-  
nung

Windgeschwindigkeits-  
profile (nach Osten)

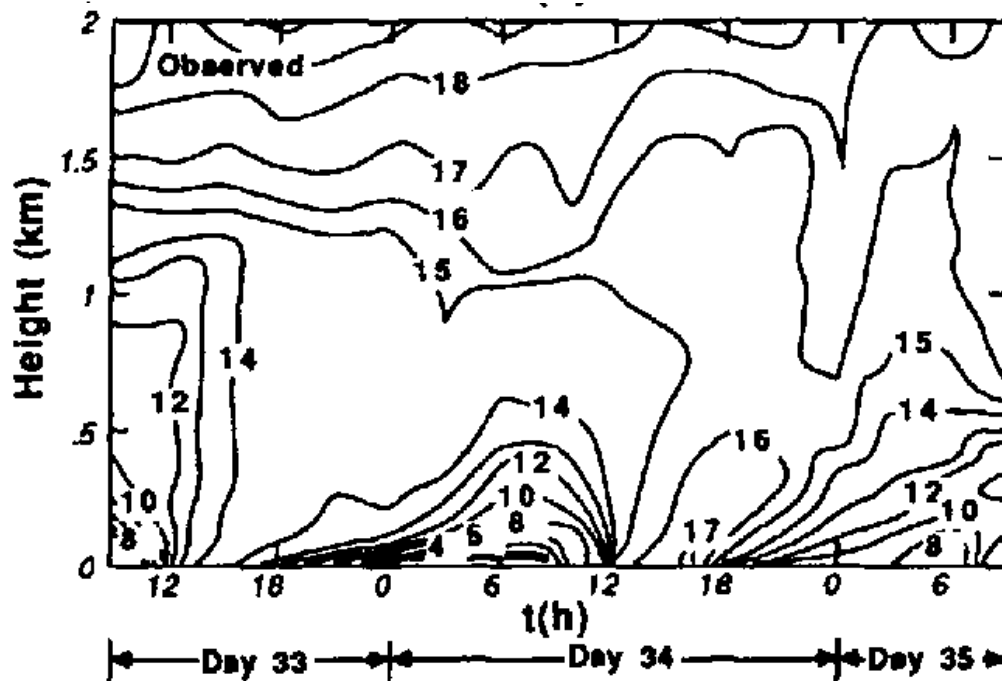


⇐ Beobachtungen  
Wangara, Tage 33-35

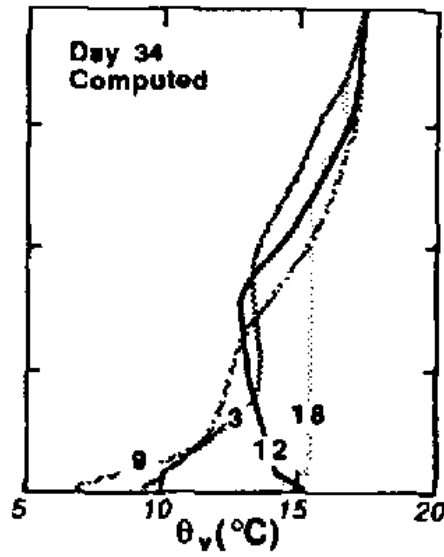
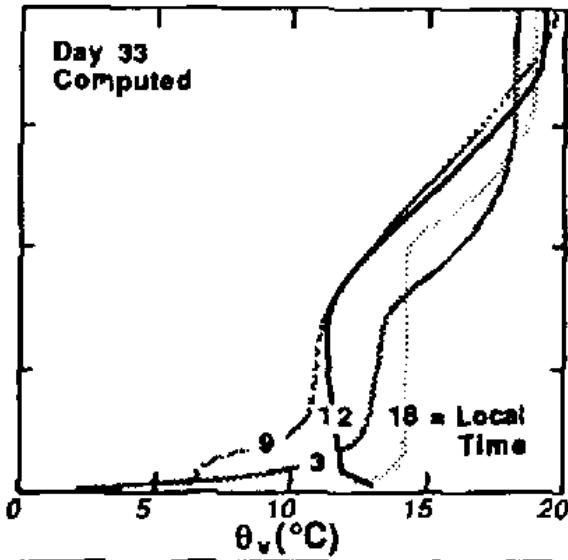


⇐ numerisch simuliert  
unter Verwendung einer  
Schließung 1.5-ter Ord-  
nung

Mittlere virtuelle  
potentielle Temperatur

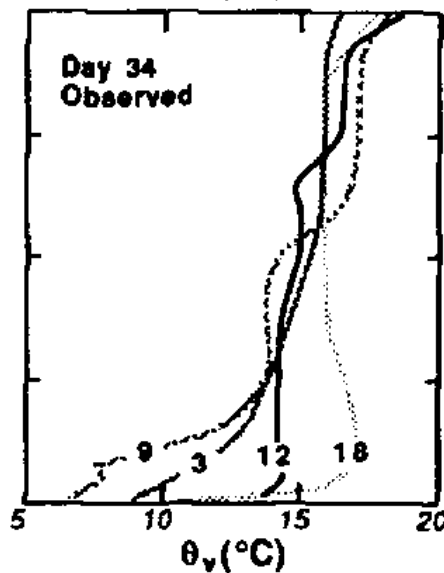
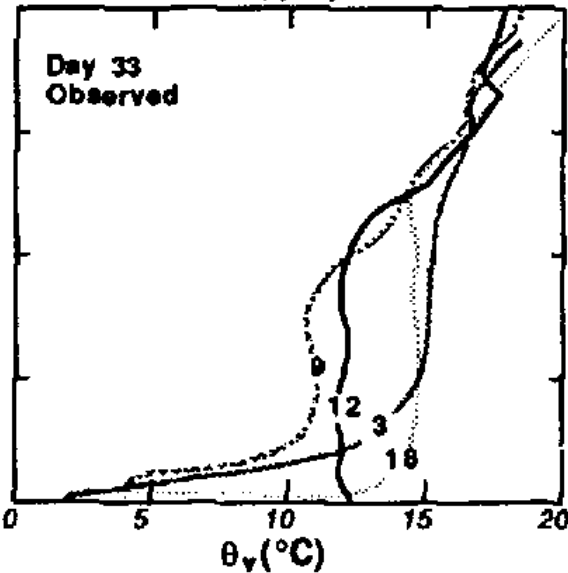


⇐ Beobachtungen  
Wangara, Tage 33-35

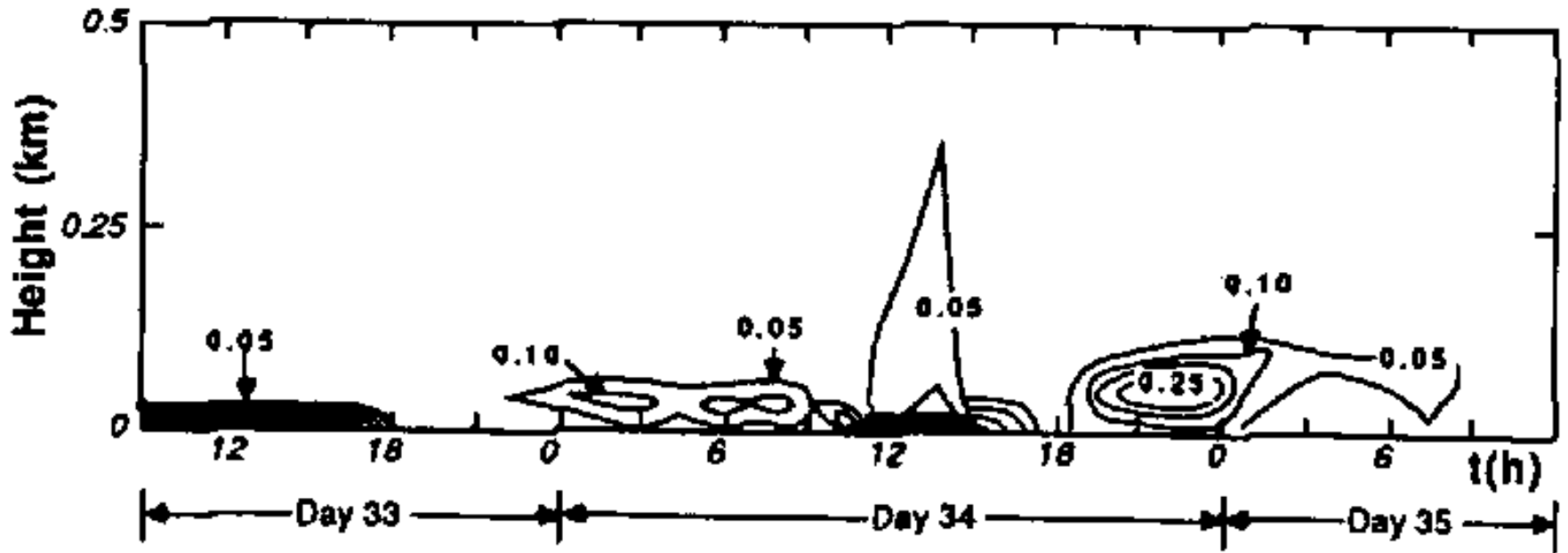


← numerisch simuliert  
unter Verwendung einer  
Schließung 1.5-ter Ord-  
nung

Profile der virtuellen  
potentiellen Temperatur



← Beobachtungen  
Wangara, Tage 33-35



Änderung der Varianz der virtuellen potentiellen Temperatur ( $\theta'_V{}^2$ ) simuliert mit einem Schließungsansatz 1.5-ter Ordnung (Einheiten in  $K^2$ ) für das Wangara Feldexperiment.



# Diskussion

- Durch diese numerischen Studien kann man einiges über die Vorteile von Schließungen höherer Ordnung lernen:
  - 1) Die Schemata höherer Ordnung liefern gut durchmischte Schichten am Tage und ein Anwachsen ihrer Mächtigkeit mit der Zeit.
  - 2) In der Nacht gibt es Anzeichen für die Bildung eines "Jets" nebst der Entwicklung einer statisch stabilen Schicht nahe der Erdoberfläche.
  - 3) Die Turbulenzintensität wächst am Tage deutlich an, aber in der Nacht werden in der GS (engl. nocturnal boundary layer) deutlich kleinere Werte gefunden.

# Diskussion

- Auf der anderen Seite geben Schließungen 1. Ordnung keine Information über die Turbulenzintensität oder die Temperaturvarianz.
- Des Weiteren haben diese Schließungsansätze Schwierigkeiten in gut durchmischten Schichten, in denen mittlere Variable keine Gradienten aufweisen.
- Der Vorteil der Schließungsansätze höherer Ordnung geht immer zu Lasten von höheren Kosten (z.B. mehr Computerzeit).

## Lokale Schließungsansätze 2. Ordnung

- Die Entwicklung von Schließungen höherer Ordnung (d.h. höher als die 1. Ordnung) war eng verbunden mit der Entwicklung von Computern.
- Obwohl bereits in den frühen 40-er Jahren des letzten Jahrhunderts die Verwendung von Gleichungen höherer Momente zur Bestimmung von Turbulenz vorgeschlagen wurde, war es die große Anzahl von unbekanntem Variablen, die sich als Stolperstein für die Lösung der Gleichungen erwiesen.
- Etwa um 1950 wurden erste Parametrisierungen für unbekanntem Größen vorgeschlagen (Rotta und Chou).
- Ende der 60-er Jahre war die verfügbare Computerleistung bereits so groß, dass Schließungen 2. Ordnung, z.B. zur Bestimmung von CAT, versucht wurden.

## Lokale Schließungsansätze 2. Ordnung

- Mitte der 70-er Jahre wurden bereits eine Reihe von solchen Modellen (z.B. Dispersionsmodelle zur Berechnung der Schadstoffausbreitung) verwendet.
- In den späten 70-er Jahren und vor allem in den 80-er Jahren gab es eine Vielzahl von Publikationen, die sich bereits mit Schließungsansätzen 3. Ordnung befassten.

- Der Satz von Turbulenzgleichungen 2. Ordnung beinhaltet nicht nur die der 1.5-ten Ordnung, sondern ebenso die Terme der 2. Momente.
- Es werden wieder die gleichen Annahmen wie vorher gemacht: trockene und horizontal homogene Atmosphäre, ohne großräumiges Absinken.
- Die zusätzlichen Bestimmungsgleichungen sind die für  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{u'_i \theta'}$ .
- Daraus ergibt sich folgender Satz von gekoppelten Gleichungen:



$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} = -f_c \epsilon_{ij3} (\bar{U}_{gj} - \bar{U}_j) - \frac{\partial (\overline{u_i'w'})}{\partial z} \quad (\text{for } i \neq 3) \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial (\overline{w'\theta'})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \left(\frac{g}{\bar{\theta}}\right) \overline{w'\theta'} - \frac{\partial [\overline{w'((p'/\bar{\rho}) + e)}]}{\partial z} - e$$

$$\frac{\partial (\overline{\theta'^2})}{\partial t} = -2 \overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{w'\theta'^2})}{\partial z} - 2\epsilon_\theta - \epsilon_R$$

$$\bullet \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial t} = -\overline{u_i'w'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \overline{u_j'w'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j' w'})}{\partial z} + \left(\frac{g}{\bar{\theta}}\right) [\delta_{i3} \overline{u_j'\theta'} + \delta_{j3} \overline{u_i'\theta'}] \\ + \left(\frac{p'}{\bar{\rho}}\right) \left[ \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right] - 2\epsilon_{u_i u_j}$$

$$\bullet \frac{\partial (\overline{u_i'\theta'})}{\partial t} = -\overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z} - \overline{u_i'w'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{u_i'w'\theta'})}{\partial z} + \delta_{i3} g \frac{\overline{\theta'^2}}{\bar{\theta}} + \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \left[ p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right] - \epsilon_{u\theta}$$

Die Unbekannten in diesem Satz von Gleichungen schließen die Druckkorrelationsterme mit ein:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}}, \quad \overline{\frac{p'}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}, \quad \overline{\frac{w' p'}{\bar{\rho}}}$$

Dritte Momente:

$$\overline{w' e}, \quad \overline{w' \theta'^2}, \quad \overline{u'_j w' \theta'}, \quad \overline{u'_i u'_j w'}$$

und Dissipationsterme:

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_R, \quad \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_{u\theta}, \quad \varepsilon_{u_i u_j}$$

**Table 6-5.** Sample second-order closure parameterizations suggested by (A) Donaldson, and (B) Deardorff. (Reference: Workshop on Micrometeorology, 1973). The  $\Lambda_i$  are length scales, which are either held constant or based on mixing-length arguments.

1

$$\overline{u_i' u_j' u_k'} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[ \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_k' u_j'}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$

$$= -\frac{3}{2} \left( \frac{\Lambda_2}{\bar{e}^{-1/2}} \right) \left[ \overline{u_k' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} + \overline{u_j' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_m} + \overline{u_i' u_m'} \frac{\partial \overline{u_k' u_j'}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

2

$$\overline{u_i' u_j' \theta'} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[ \frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$

$$= -\frac{3}{2} \left( \frac{\Lambda_2}{\bar{e}^{-1/2}} \right) \left[ \overline{\theta' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} + \overline{u_j' u_m'} \frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_m} + \overline{u_i' u_m'} \frac{\partial \overline{\theta' u_j'}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

3

$$\overline{u_i' \theta'^2} = -\Lambda_2 \bar{e}^{-1/2} \left[ \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A})$$



$$= -\frac{3}{2} \left( \frac{\Lambda_2}{\bar{\theta}^{-1/2}} \right) \left[ 2 \overline{\theta' u'_m} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_m} + \overline{u'_i u'_m} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{B})$$

4

$$\left( \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}} \right) \left[ \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_j} \right] = - \left( \frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \left[ \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\theta} \right] \quad (\text{Rotta, 1951}) \quad (\text{A})$$

$$= - \left( \frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \left[ \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\theta} \right] + \frac{2}{5} \bar{\theta} \left[ \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{B})$$

5

$$\left( \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \left[ \overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} \right] = - \left( \frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \overline{u'_i \theta'} \quad (\text{A})$$

$$= - \left( \frac{\bar{\theta}^{-1/2}}{\Lambda_1} \right) \overline{u'_i \theta'} - \frac{1}{3} \delta_{i3} \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}} \overline{\theta'^2} \quad (\text{B})$$

6

$$\frac{1}{\rho} (\overline{p' u_i'}) = - \left( \frac{-1/2}{e} \right) \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \quad (\text{A,B})$$

7

$$\epsilon = \frac{-3/2}{e} \quad (\text{A,B})$$

8

$$\epsilon_\theta = \frac{-1/2 \overline{\theta'^2}}{e} \quad (\text{A,B})$$

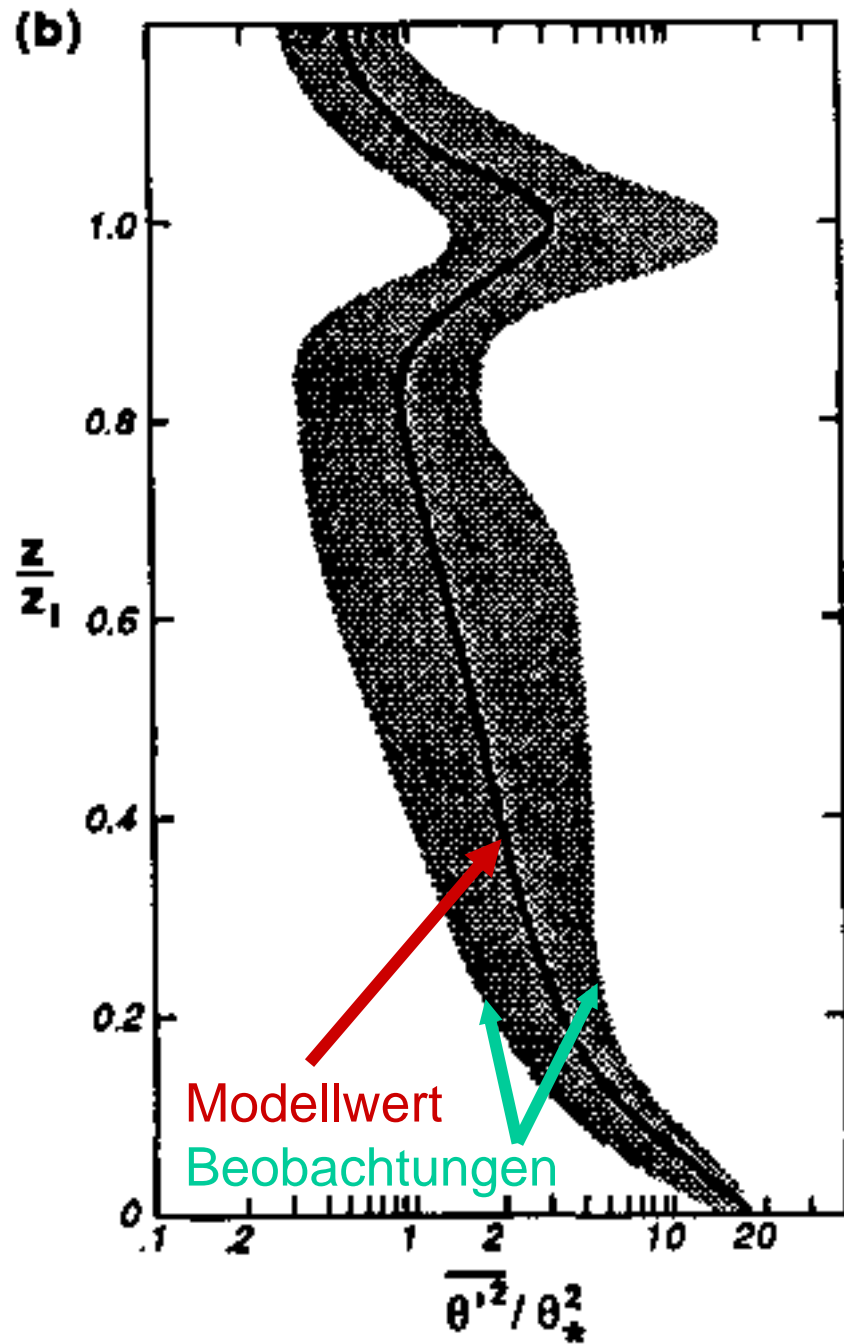
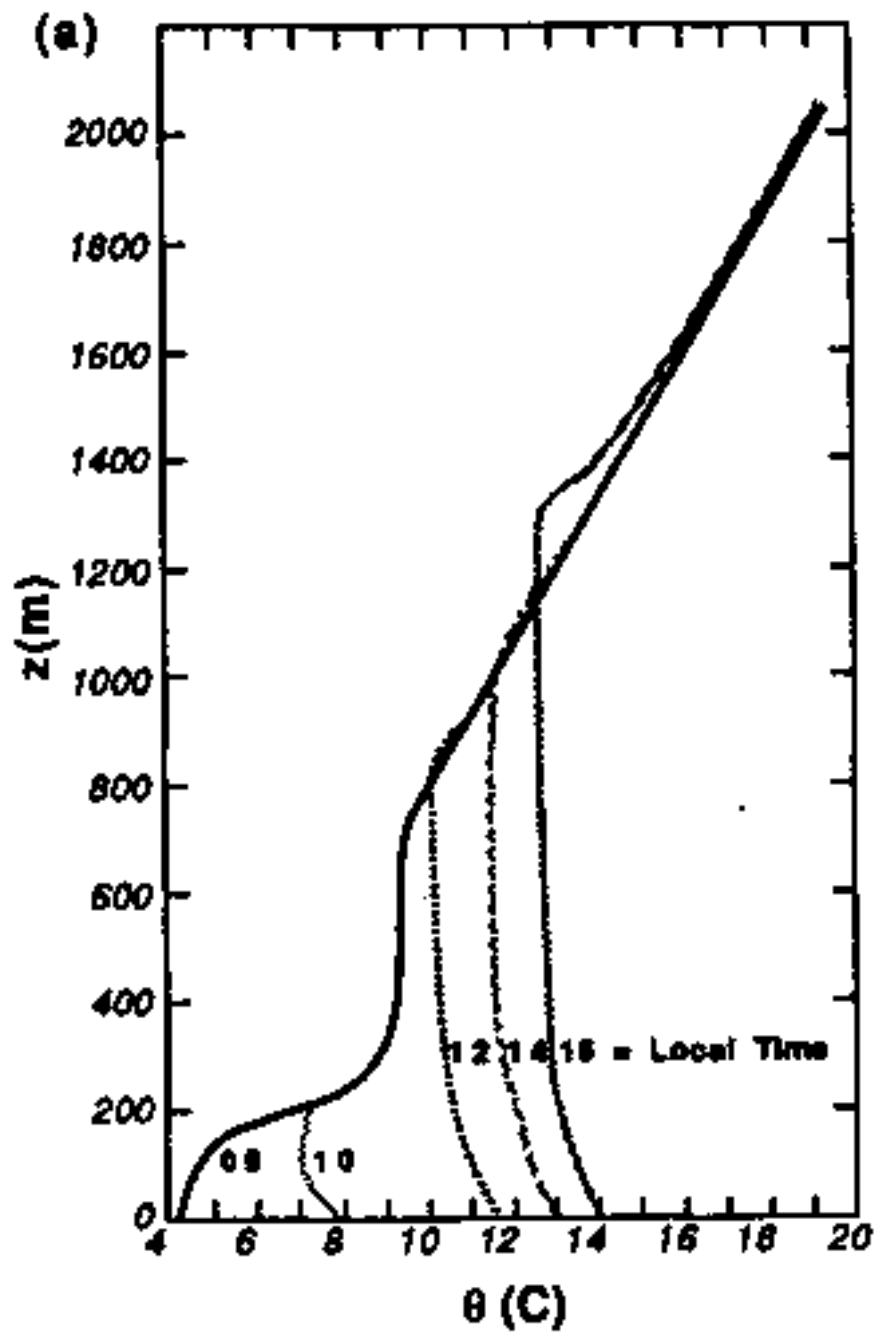
Note: the  $\overline{w'\theta}$  parameterization is the same as that for  $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ .

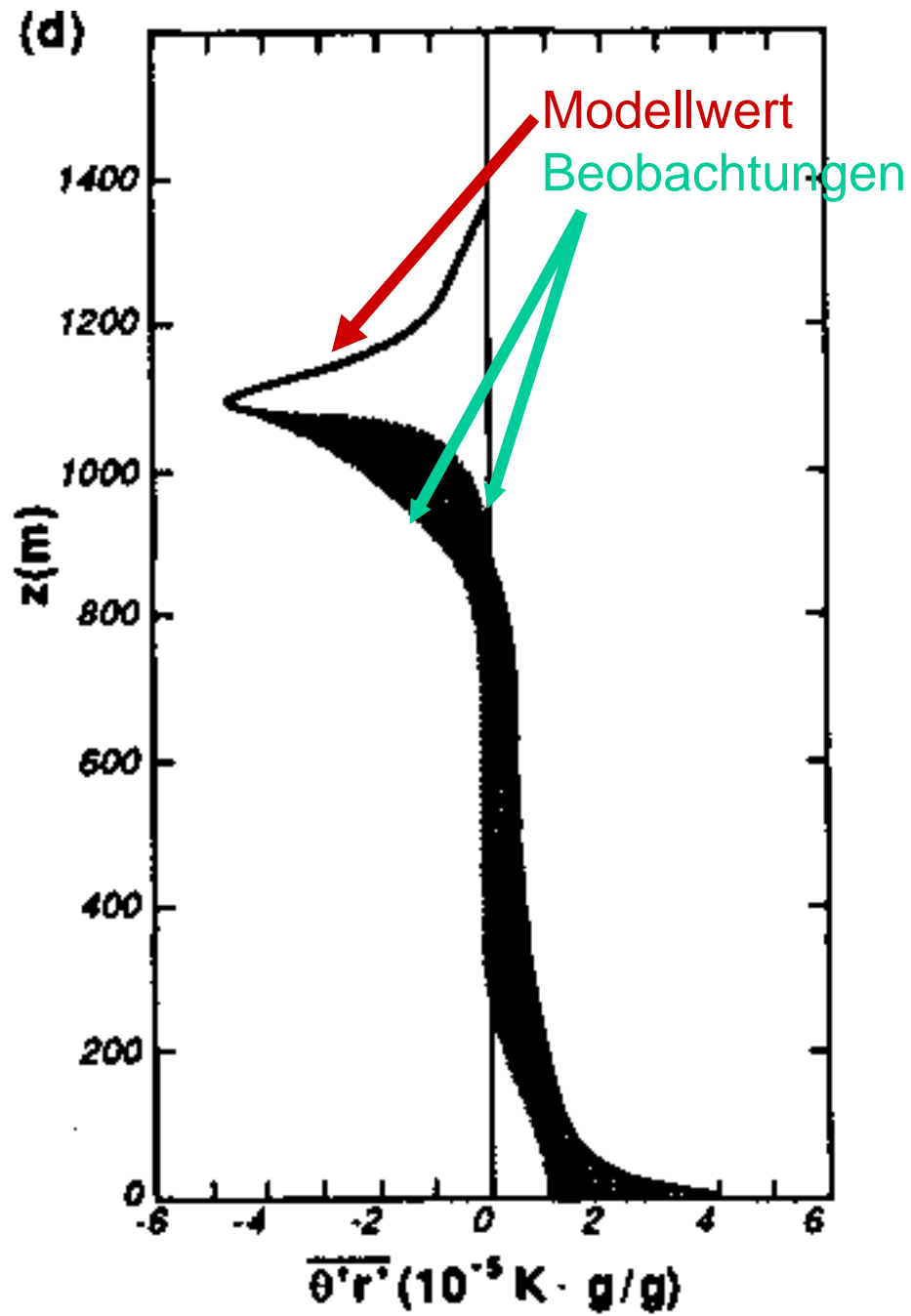
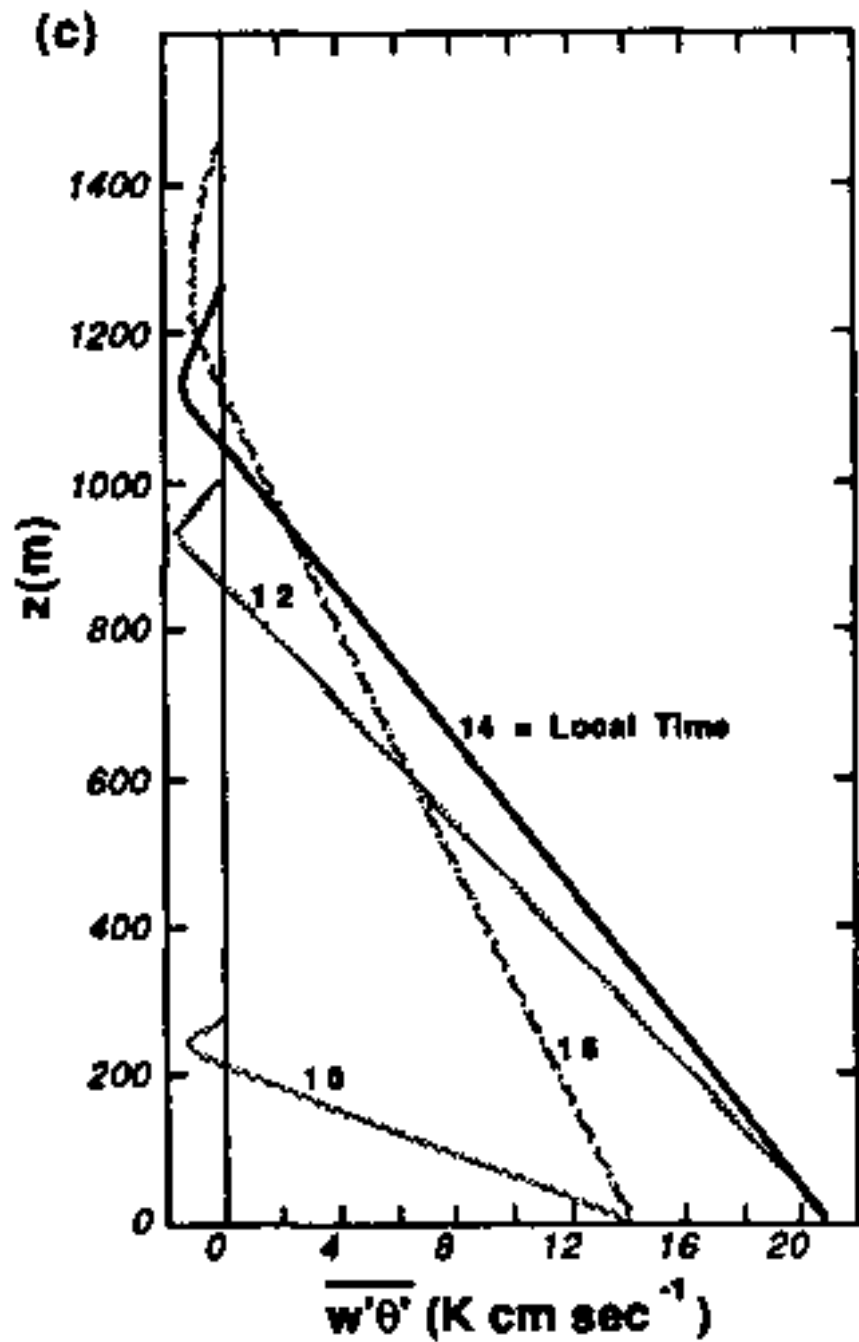
In vorheriger Tabelle findet man 3 grundlegende Ideen eines Schließungsansatzes:

1. Diffusion von höheren zu niedrigeren Werten (engl. down-gradient diffusion; Punkte 1-3 und 6 in der Tabelle), z.B. Diffusion von Statistiken 3. Ordnung hin zu Gradienten von Statistiken 2. Ordnung.
2. Rückkehr zu isotropen Bedingungen (Punkte 4 und 5), proportional zum Grad der Anisotropie.
3. Dissipation (Punkte 7 und 8), proportional zur Stärke (Größe) der Turbulenz.

- Es folgt ein Beispiel für eine Modellrechnung einer Schließung 2. Ordnung ("The moist convective boundary layer simulations" von Sun und Ogura, 1980).
- Zusätzlich zu den obigen Gleichungen führten sie prognostische Gleichungen für das Wasserdampf-mischungsverhältnis  $\bar{r}$ , die Feuchtevarianz  $\overline{r'^2}$ , den Feuchtefluss  $\overline{w'r'}$  sowie die Temperatur-Feuchte Kovarianz  $\overline{r'\theta'}$  ein.

- Durch den Gebrauch dieses Satzes von Gleichungen 2. Ordnung konnten sie Vorhersagen (Bestimmungen) für mittlere Variable erstellen, wie sie auch mit einem Schließungsansatz 1. Ordnung (allerdings geringerer Genauigkeit) möglich gewesen wäre (Abb. Teil a).
- Sie konnten Varianzen vorhersagen, die mit einer Schließung 1.5-ter Ordnung (allerdings geringerer Genauigkeit) möglich gewesen wäre (Abb. Teil b).
- Am wichtigsten aber ist, dass Vorhersagen von Flüssen (Abb. Teil c) und anderen Kovarianzen (Abb. Teil d) erstellt werden können, die mit anderen Schemata niedrigerer Ordnung nicht bestimmt (vorhergesagt) werden können.





# Lokale Schließungsansätze 3. Ordnung

- Es würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen Schließungsansätze 3. Ordnung im Detail zu besprechen.
- Generell werden dazu die prognostischen Gleichungen für Terme der dreifachen Korrelation benötigt, während Parametrisierungen entwickelt werden müssen für die Korrelationsterme 4. Ordnung, für die Druckkorrelationen und für die viskose Dissipation.
- In der Literatur findet man einige Parametrisierungen die annehmen, dass die Momente 4. Ordnung quasi Gauss verteilt sind und so als Funktion von Momenten 2. Ordnung approximiert werden können.
- Jeder unrealistische Wert von Momenten 3. Ordnung wird vernachlässigt oder vereinfacht, um physikalisch realistische Werte zu erhalten. Verschiedene "Dämpfungen" von Eddytermen werden verwendet, um negative Werte zu vermeiden.



- Generell wird angenommen, dass die Lösungen von Gleichungen für Variable geringerer Ordnung (wie z.B. Flüsse des mittleren Windes) genauer werden, wenn Schließungsansätze höherer Ordnung verwendet werden.
- Mit anderen Worten: Parametrisierungen für Terme 4. Ordnung können zwar sehr grob sein, aber sie enthalten genügend Physik (d.h. Terme, die nicht parametrisiert sind) in den Gleichungen für die 3. Momente, dass die 3. Momente wiederum weniger grob, d.h. genauer sind.
- Die Gleichungen für die 2. Momente enthalten "mehr" Physik und machen sie deshalb wiederum genauer, u.s.w., bis herunter zu den Gleichungen zur Beschreibung der mittleren Winde und Temperaturen, etc.
- Die Erfahrung lehrt, dass diese Vorgehensweise zu vernünftigen Ergebnisse führt.
- Momente höherer Ordnung sind in der realen Atmosphäre kaum zu messen.

- Messungen von Flüssen (2. Momente) streuen typischerweise sehr stark.
- Abschätzungen für Korrelationen von Eddytermen der 3. Momente sind noch schwieriger, wobei der Unsicherheits- (Fehler-) bereich häufig so groß ist, dass das Signal nicht vernünftig bestimmt werden kann.
- "Genaue" Messungen von Momenten 4. Ordnung gibt es nicht.
- Dies bedeutet, dass man über das Verhalten von Momenten 3. und 4. Ordnung nur sehr wenig weiß. Daher sind vernünftige Parametrisierungen für diese Momente nur schwer zu erzielen.
- Nun ist klar, warum für Schließungsmodelle der 3. Ordnung häufig nur grobe Approximationen gemacht werden.

- Schließungsmodelle höherer Ordnung haben viele Parameter die so vorteilhaft angepasst werden können, dass eine gute Vorhersage erzielt wird.
- Diese Parameter werden mittels spezieller Studien (z.B. Grenzwertbetrachtungen) oder Laboruntersuchungen (z.B. in Wassertanks) so justiert, dass durch Vereinfachungen einzelne Terme vernachlässigt werden können und somit verbleibende Terme besser bestimmt werden können.

# Nicht-lokale Schließungsansätze

- Nicht-lokale Schließungsansätze berücksichtigen, dass größere Eddies Fluide über begrenzte Entfernungen transportieren können, bevor kleinere Eddies die Möglichkeit haben, diese zu vermischen.
- Dieses Konzept (ähnlich wie das der Advektion) wird durch Beobachtungen gestützt: z.B. Thermals steigen auf, während ihr Kern "unverdünnt" bleibt; Existenz von kleinen Wirbeln in Bodennähe (aus Laub oder Schnee); oder aber auch gut organisierte Zirkulationsmuster, die in Fotografien von Wolken erkennbar sind.

# Nicht-lokale Schließungsansätze – "Transiliente" Turbulenz Theorie

- Stull präsentiert in seinem Buch zwei nicht-lokale Schließungsansätze 1. Ordnung (ab Seite 225):
  1. "Transilient turbulence theory", welche sich dem Problem aus der Sicht eines physikalischen Raumes nähert\*.
  2. Spektrale Diffusionstheorie, die einen spektralen oder Phasenraum-Ansatz verwendet.
- Beide erlauben einen Bereich (ein Spektrum) von Eddies verschiedener Größe, die am Mischungsprozess durch Turbulenz mitzuwirken.

\* Transilient turbulence theory:

"A method for parameterising turbulence that allows non-local vertical mixing between every pair of grid points in a vertical column, even between non-neighbouring points."



**Ende Kapitel 6**

# Kapitel 9: Ähnlichkeitstheorie



# Ähnlichkeitstheorie

- Für eine ganze Anzahl von Situationen in der GS ist die Kenntnis über die bestimmende Physik unzureichend, um grundlegende Gesetzmäßigkeiten abzuleiten.
- Dennoch zeigen Beobachtungen der GS häufig wiederkehrende Charakteristiken; man kann deshalb empirische Beziehungen für die Variablen, die von Interesse sind, ableiten.
- Die Ähnlichkeitstheorie bietet eine Möglichkeit Variable so zu ordnen und zu gruppieren, dass man den maximalen Nutzen daraus ziehen kann; damit erhält man z.B. Hinweise, wie Feldexperimente angelegt werden müssen, um die möglichst umfassende Informationen zu erhalten.
- Die Grundidee ist, Variable in dimensionslosen Gruppen zu organisieren (zusammen zu fassen).



- Ähnlichkeitstheorien liefern keine Informationen über die Form der Bestimmungsgleichungen oder die Beziehung zwischen den dimensionslosen Gruppen. Durch physikalische Betrachtungen, ausprobieren oder automatisierte Techniken versucht man ein Ergebnis zu erzielen, was in möglichst guter Übereinstimmung mit Beobachtungen ist.
- Ähnlichkeitsbeziehungen werden für gewöhnlich entwickelt, um sie für Gleichgewichtsbetrachtungen (stationäre Zustände) zu verwenden; z.B. Gleichgewichtsprofile mittlerer Variabler und/oder Turbulenzstatistiken.
- Es gibt aber Variable für die man keine Ähnlichkeitsbeziehungen entwickeln kann, z.B. die Dicke der GS, die sehr stark zeitabhängig ist.

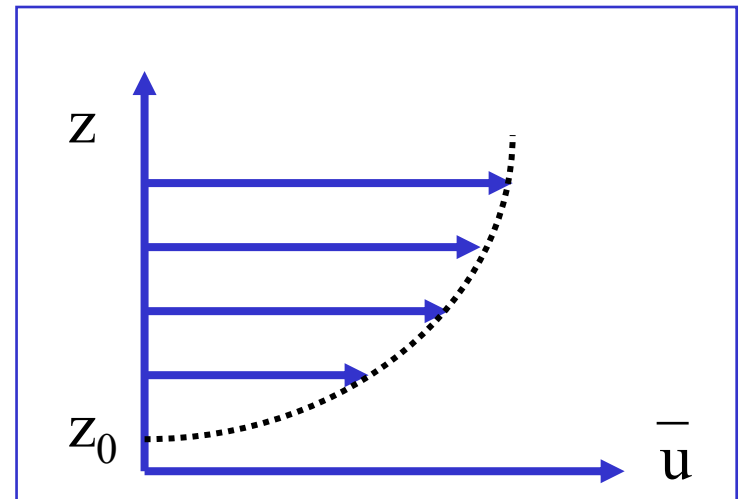
- Ähnlichkeitstheorien sind eine Art Schließung 0-ter Ordnung.
- Wenn erst einmal eine Ähnlichkeitsbeziehung gefunden wurde, kann man sie zur Untersuchung von Gleichgewichtswerten heranziehen (Profile des mittleren Winds, Temperatur, Feuchte), ohne eine Annahme über die Schließung für Turbulenz vorzunehmen.

# Buckingham Pi Theorie (1914)

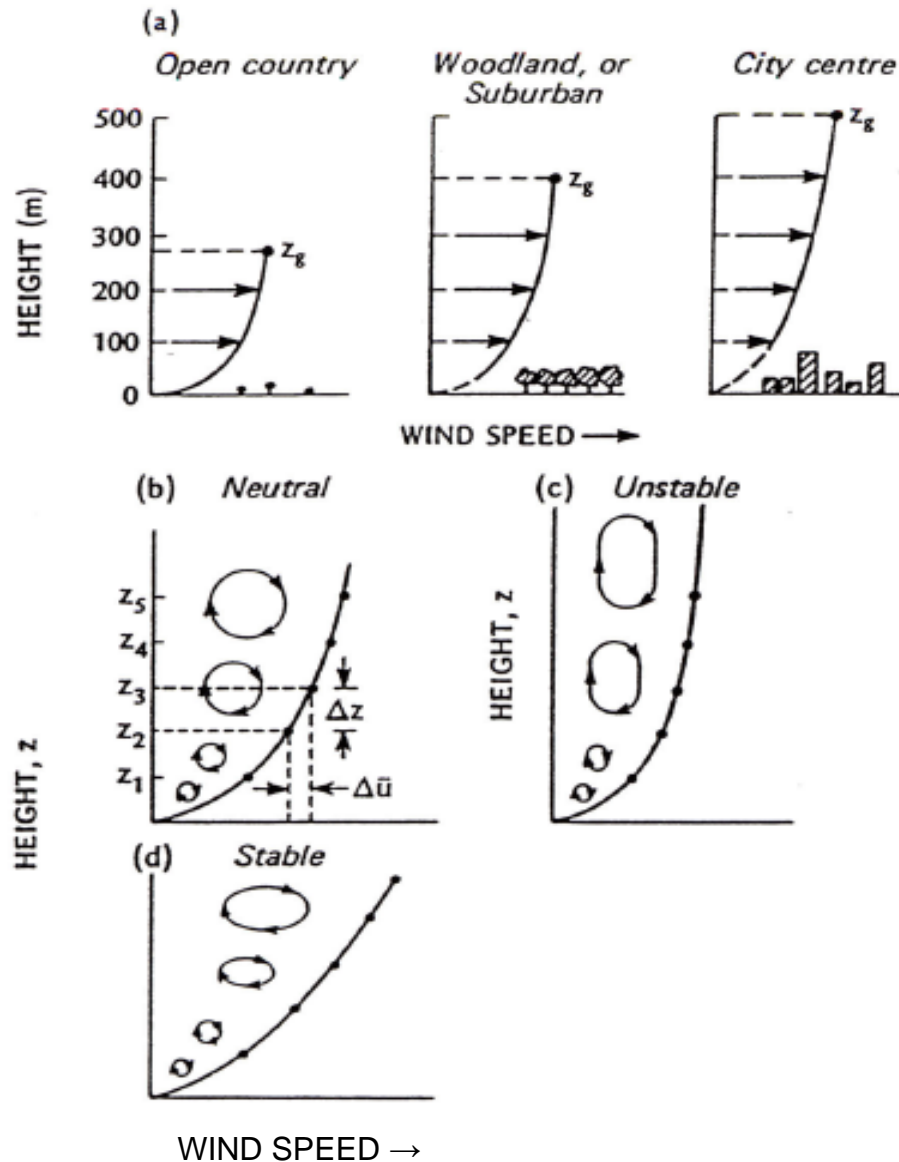
- Diese Theorie hilft dimensionslose Gruppen von ausgewählten Variablen zu bilden.
- Die Erwartung ist, dass die geeignete Wahl von Gruppen zu empirischen Beziehungen zwischen den Gruppen führt, die universell gelten, mit anderen Worten, dass sie überall und zu jeder Zeit in bestimmten Situationen gültig sind.
- Es gibt vier Schritte eine Ähnlichkeitstheorie zu entwickeln:
  - 1) Auswahl (Annahme), welche Variablen für die entsprechende Situation relevant sind;
  - 2) Ordnung der Variablen in dimensionslosen Gruppen;
  - 3) Nutzung von Messdaten, um die Werte der Gruppen zu bestimmen;
  - 4) Anpassung einer (empirischen) Kurve an die Daten. (Siehe Stull für einige Beispiele.)

# Das logarithmische Windprofil

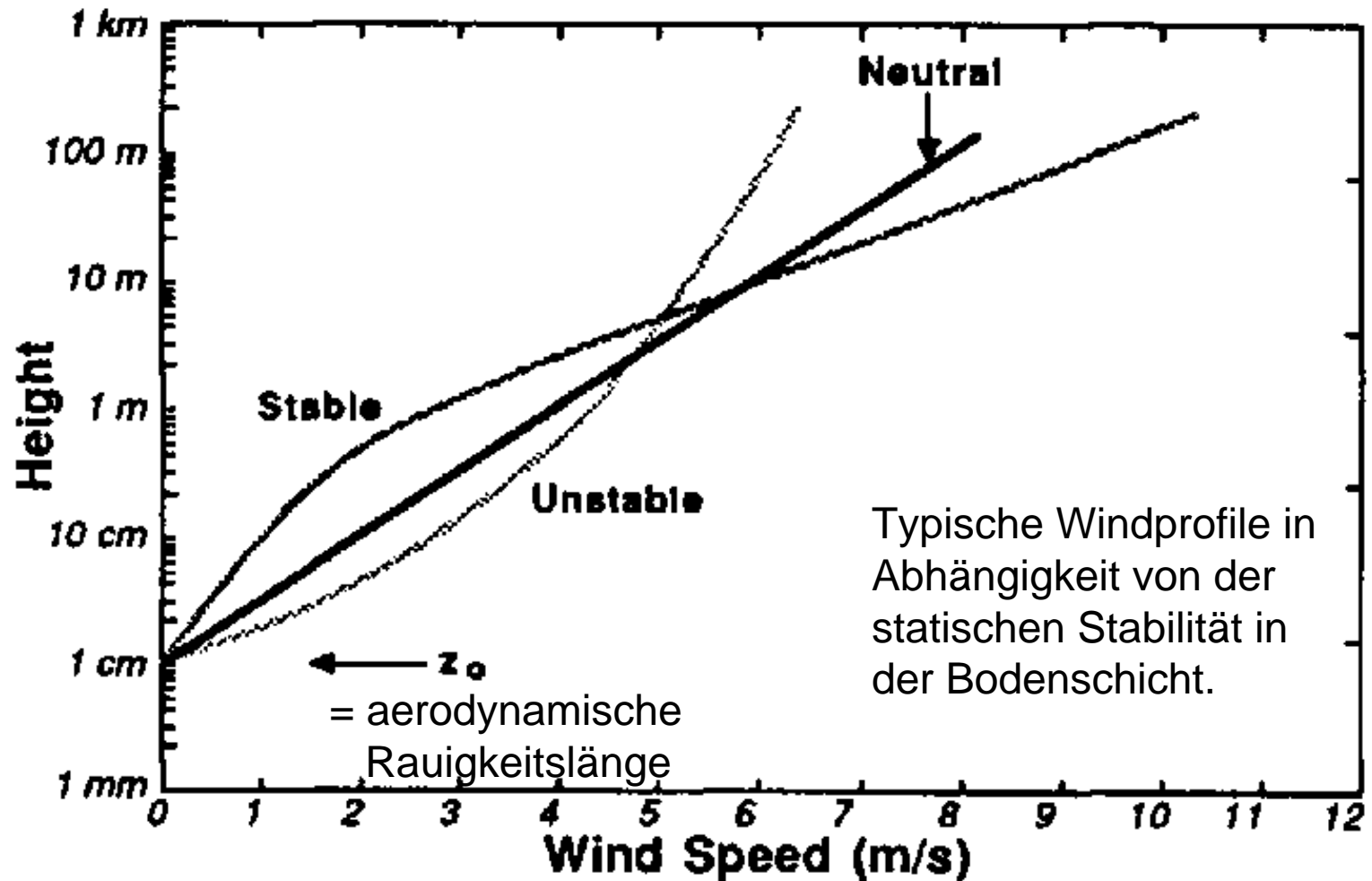
- Eine wichtige Anwendung der Ähnlichkeitstheorie ist bezogen auf das mittlere Windprofil in der Bodenschicht.
- Dieses Windprofil ist für viele Anwendung wichtig, z.B. Konstruktion von Gebäuden, Brücken und Windrädern, Ausbreitung von Schadstoffen.
- Über das Windprofil in der Bodenschicht hat man viele Informationen. Aufgrund der Vielzahl von Messdaten konnte man es ausgiebig untersuchen.
- In der Bodenschicht ändert sich das Windprofil für gewöhnlich logarithmisch mit der Höhe. Reibungskräfte führen dazu, dass die Windgeschwindigkeit am Boden gleich Null ist.



# Windprofile für verschiedene Stabilitäten und Oberflächen



- Wenn man die Daten in einem semi-logarithmischen Koordinatensystem darstellt, erscheint das Windprofil in einer statisch neutralen Atmosphäre als gerade Linie.



# Windprofile in statisch neutraler Umgebung

- Wir suchen eine Beziehung für den mittleren Wind  $\bar{U}(z)$ .
- Die relevanten Variablen sind:  
Scherspannung am Boden (repräsentiert durch  $u_*$ ) und Rauigkeit des Boden (gegeben durch die aerodynamische Rauigkeitslänge  $z_0$ ).

- Aus der Buckingham Pi Theorie ergeben sich zwei dimensionslose Gruppen:  $\bar{U}/u_*$  und  $z/z_0$ .

Aus dem vorherigen Bild ergibt sich:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right)$$

von Kármán Konstante  
= Proportionalitätskonstante

- Über den genauen Wert gibt es keine Einigkeit, in der neueren Literatur findet man  $k = 0.4 \pm 0.01$ .

# Alternative Herleitung des Windprofils

- Der Impulsfluss in der Bodenschicht ist gegeben durch:

$$\overline{u'w'} = -k^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$$

- Der Impulsfluss in der Bodenschicht ist aber ungefähr konstant mit der Höhe:

$$\overline{u'w'}(z) = \overline{u'w'}(0) = u_*^2$$

Einsetzen ergibt:  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$

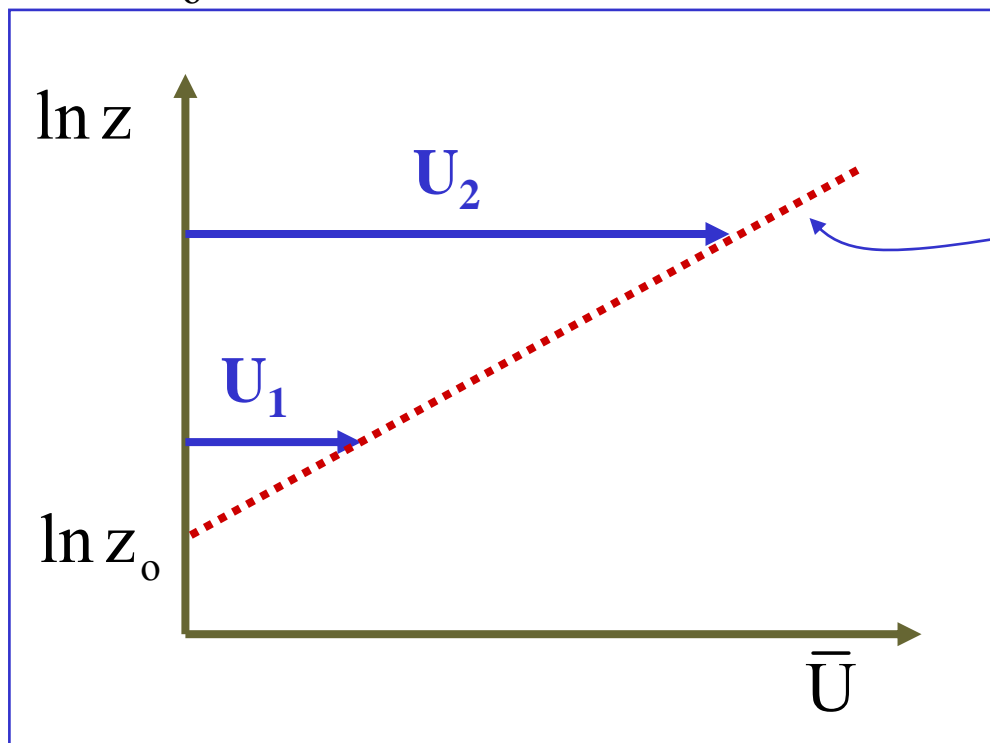
Integration von  $z_0$  hinsichtlich  $z$  ergibt:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right)$$



# Aerodynamische Rauigkeitslänge

- Die aerodynamische Rauigkeitslänge  $z_0$  ist definiert als die Höhe, in der die Windgeschwindigkeit Null wird.
- Wenn Beobachtungen der Windgeschwindigkeit in zwei oder mehr Höhen vorliegt, kann man einfach die Werte für  $z_0$  und  $u_*$  bestimmen:



$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} (\ln z - \ln z_0)$$



# Aerodynamische Rauigkeitslänge

- Die Rauigkeitslänge ist nicht gleich der Höhe von einzelnen "Hindernissen" am Erdboden! Aber es gibt eine eins-zu-eins Beziehung zwischen diesen Hindernissen und der aerodynamischen Rauigkeitslänge.
- Mit anderen Worten, wenn die Rauigkeitslänge  $z_0$  einmal für eine bestimmte Oberfläche ermittelt wurde, dann ist sie unabhängig von der Windgeschwindigkeit, der Stabilität oder der Scherspannung.
- Ändern kann sich  $z_0$  nur, wenn sich die Elemente, die die Rauigkeit bestimmen, verändern.

# Rauigkeitslänge über dem Ozean (Wasser)

- Beziehung für die Rauigkeit über Ozeanen nach Charnock:

$$z_0 = \frac{\alpha_c u_*^2}{g}$$

Für Wasseroberflächen gilt:  $\alpha_c = 0.016$ .

- Da die Rauigkeitslänge direkt im Zusammenhang mit der Höhe der Wellen steht, ist  $z_0$  eine Funktion der Scherspannung am Boden oder der Windgeschwindigkeit (siehe dazu Stull, Kapitel 7, Seite 265).

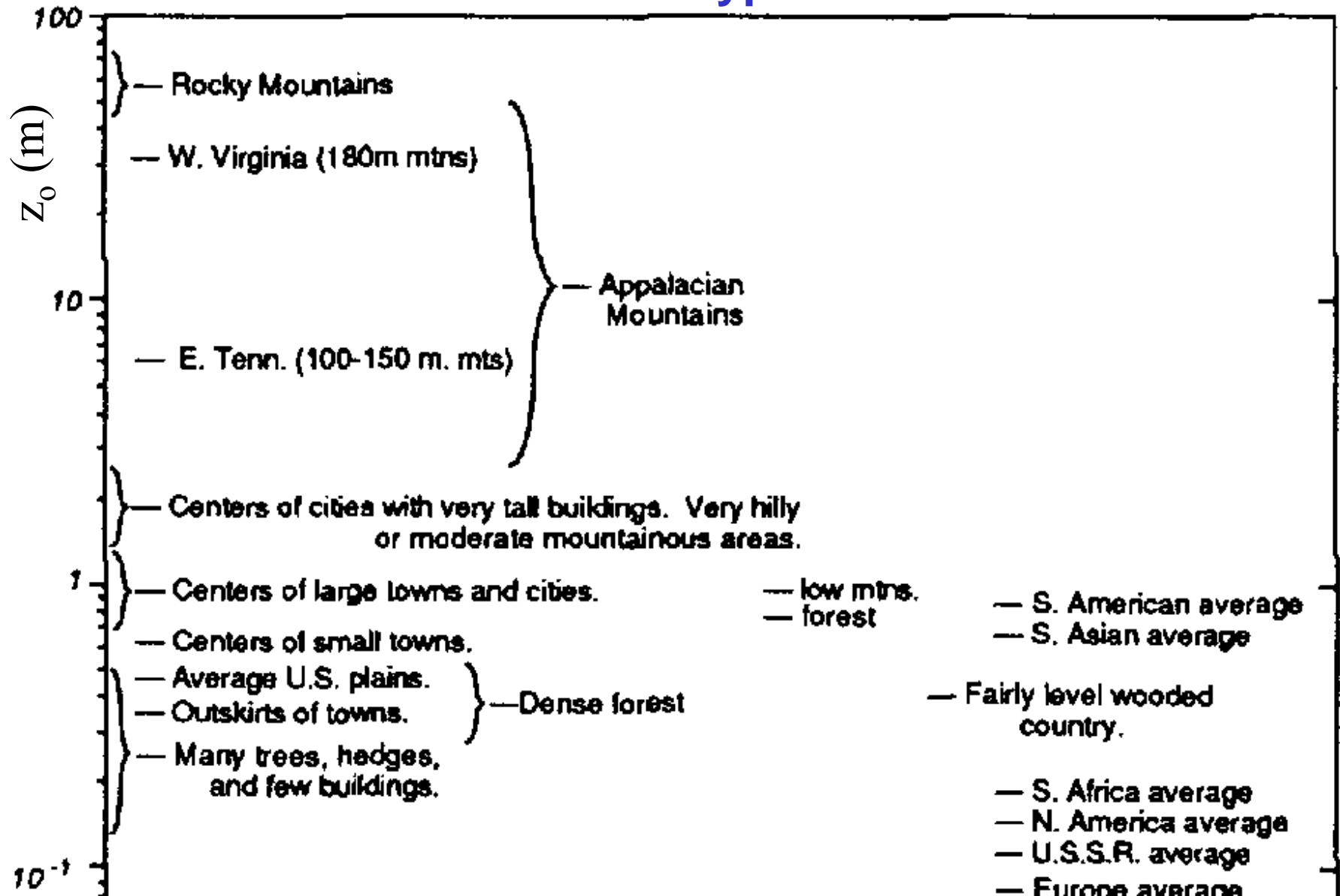
# Aerodynamische Rauigkeitslänge

- In vielen größerskaligen Wettervorhersagemodellen ist der niedrigste Modellgitterpunkt in einer Höhe  $z_1$  soweit oberhalb der Erdoberfläche, dass die Bodenschicht nicht aufgelöst ist.
- Trotzdem ist es aber wichtig, die sich verändernde Rauigkeit in Vorhersagemodellen zu berücksichtigen.
- André und Blondin (1986) schlugen die Einführung einer effektiven Rauigkeitslänge ( $z_{o\text{ eff}}$ ) vor, die in Modellen je kleiner ist, desto höher die unterste Modellschicht ist.

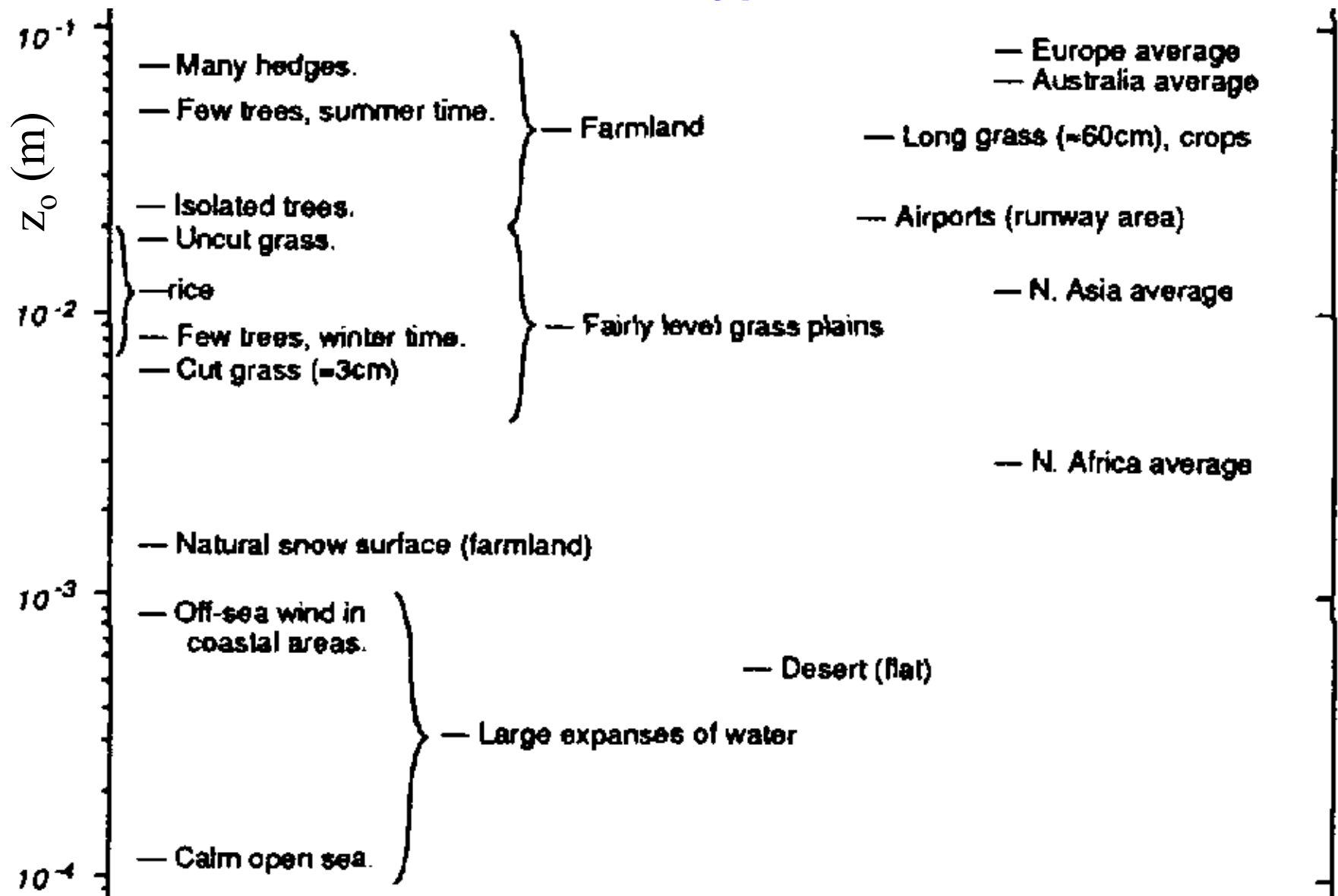
Die Rate von  $z_{o\text{ eff}}/h^*$  ( $h^*$ : mittlere vertikale Erstreckung der Rauigkeitselemente) nimmt von etwa 0.1 auf 0.01 ab, wenn  $z_1$  von 0.1 km auf 1 km ansteigt.

- Es gibt aber auch Vorschläge (z.B. Taylor, 1987), dass  $z_{o\text{ eff}}$  unabhängig von  $z_1$  ist.

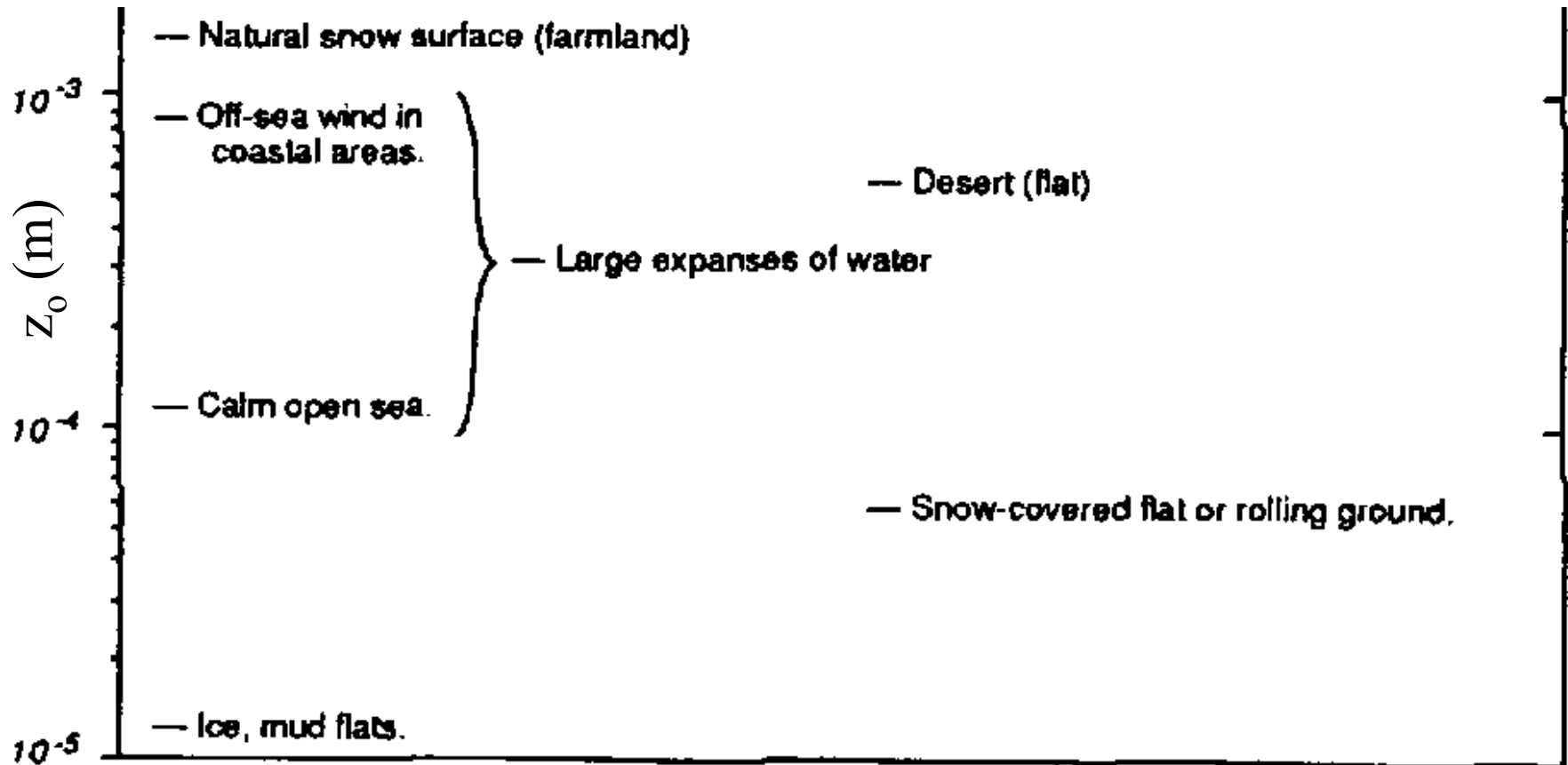
# Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen



# Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen

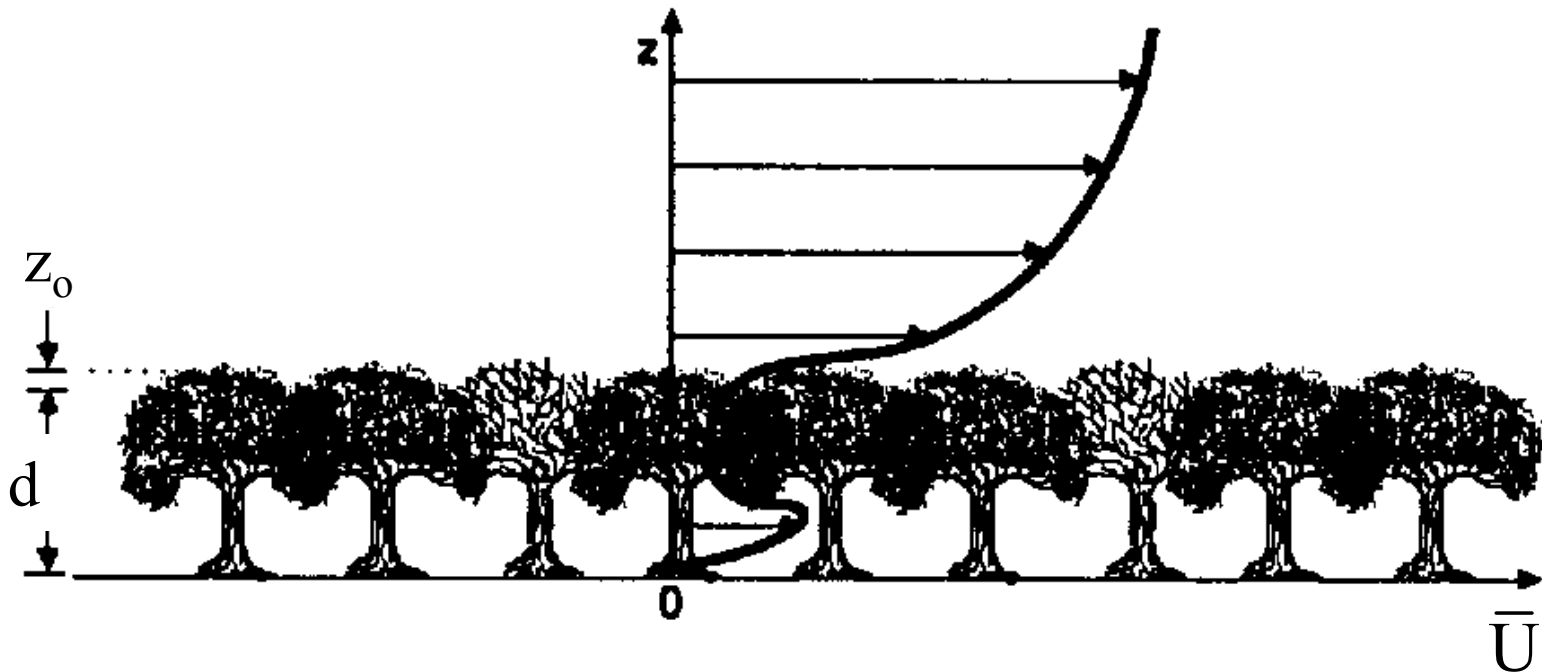


# Aerodynamische Rauigkeitslängen für typische Geländetypen



# Verschiebungsabstand (engl. displacement distance)

- Über Land können die individuellen Rauigkeitselemente (Hindernisse) so eng zusammenstehen, dass die Oberkante dieser Elemente wie eine verschobene Oberfläche wirkt (z.B. dichter Wald, enge bebaute Flächen).



Die Oberkante der Bäume wirkt wie eine Oberfläche, die um den Abstand  $d$  nach oben verschoben wurde.  $z_0$  = Rauigkeitslänge.



- Oberhalb dieser verschobenen, künstlichen Oberfläche wächst die Windgeschwindigkeit wieder logarithmisch mit der Höhe an.
- Man kann diesen Verschiebungsabstand  $d$  und die Rauigkeitslänge  $z_0$  so definieren, dass für statisch neutrale Bedingungen gilt:

$$\bar{U} = \frac{u_*}{k} \ln \left( \frac{z - d}{z_0} \right)$$

Definiere:  $\bar{U} = 0$  für  $z = d + z_0$  ( $z_0 = z - d$ ).

- Wenn bei statisch neutralen Bedingungen Beobachtungen der Windgeschwindigkeit in drei oder mehr Höhen vorliegen, ist es mittels nicht-linearer Regressionsmethoden (z.B. nach Marquardt oder Gauss-Newton) recht einfach, Lösungen für die drei Parameter  $u_*$ ,  $z_0$  und  $d$  zu finden.

# Dimensionslose Windscherung

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

- In einer neutralen Bodenschicht (und nur dafür) ist die dimensionslose Windscherung gegeben durch:

$$\phi_U = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 1$$

# Windprofile unter nicht-neutralen Bedingungen

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right)$$

Ausdrücke wie diese (für statisch neutrale Flüsse!) setzen den Impulsfluss, repräsentiert durch  $u_*^2$ , in Bezug zum Geschwindigkeitsprofil.

- Solche Formeln werden Fluss-Profil Beziehungen genannt.
- Diese Beziehungen können erweitert werden für nicht-neutrale (diabatische) Bodenschichten.
- Unter nicht-neutralen Bedingungen erwartet man, dass der Auftriebsterm und der Wärmefluss am Boden zusätzlich relevante Variable sind.
- Die Buckingham Pi Analyse ergibt drei dimensionslose Gruppen (unter Vernachlässigung des Verschiebungsabstandes) :

$L$  = Obukhov Länge

$$\frac{\bar{U}}{u_*} \quad \frac{z}{z_0} \quad \frac{z}{L}$$

- Wenn man alternativ die Scherung anstelle der Geschwindigkeit berücksichtigt, dann erhält man zwei dimensionslose Gruppen:  $\phi_U$  und  $z/L$ .
- Auf der Grundlage von Messdaten entwickelten Businger et al. (1971) und Dyer (1974) den funktionalen Zusammenhang ("Businger-Dyer Beziehung"):

$$\phi_U = \begin{cases} 1 + 4.7z/L & \text{for } z/L > 0 \quad (\text{stable}) \\ 1 & \text{for } z/L = 0 \quad (\text{neutral}) \\ [1 - (15z/L)]^{-1/4} & \text{for } z/L < 0 \quad (\text{unstable}) \end{cases}$$

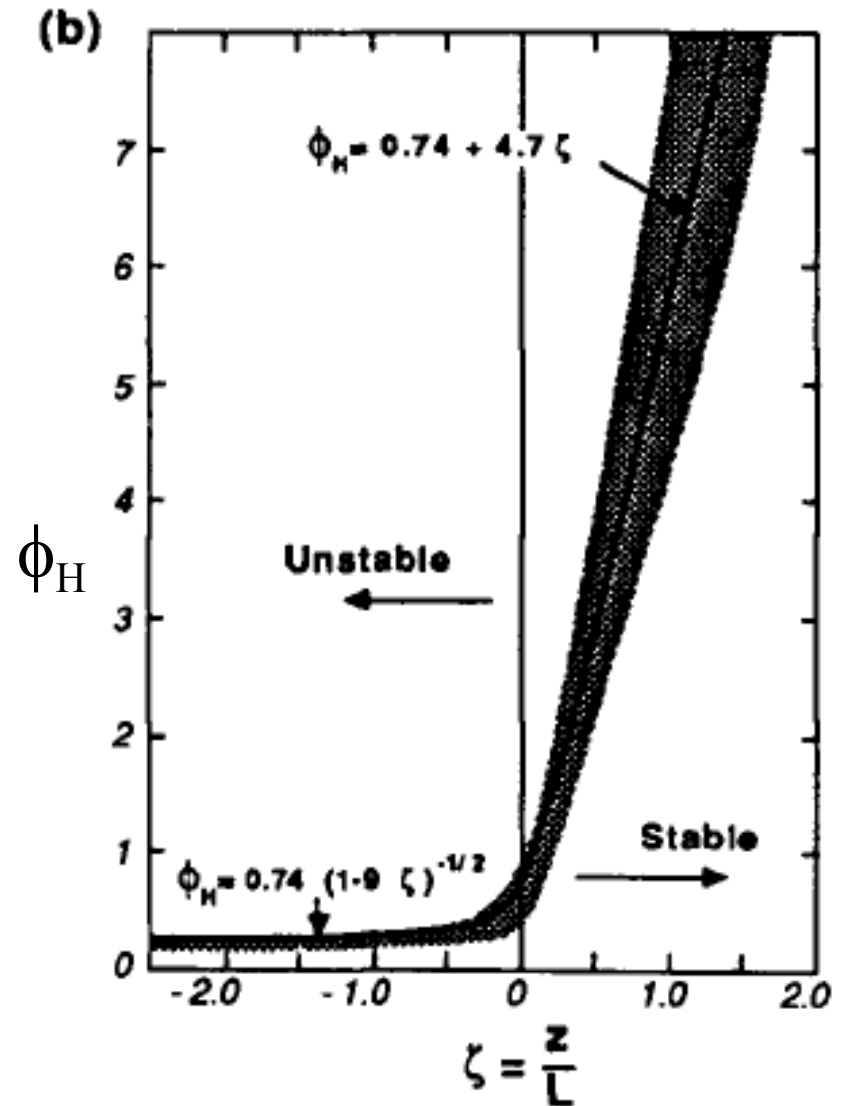
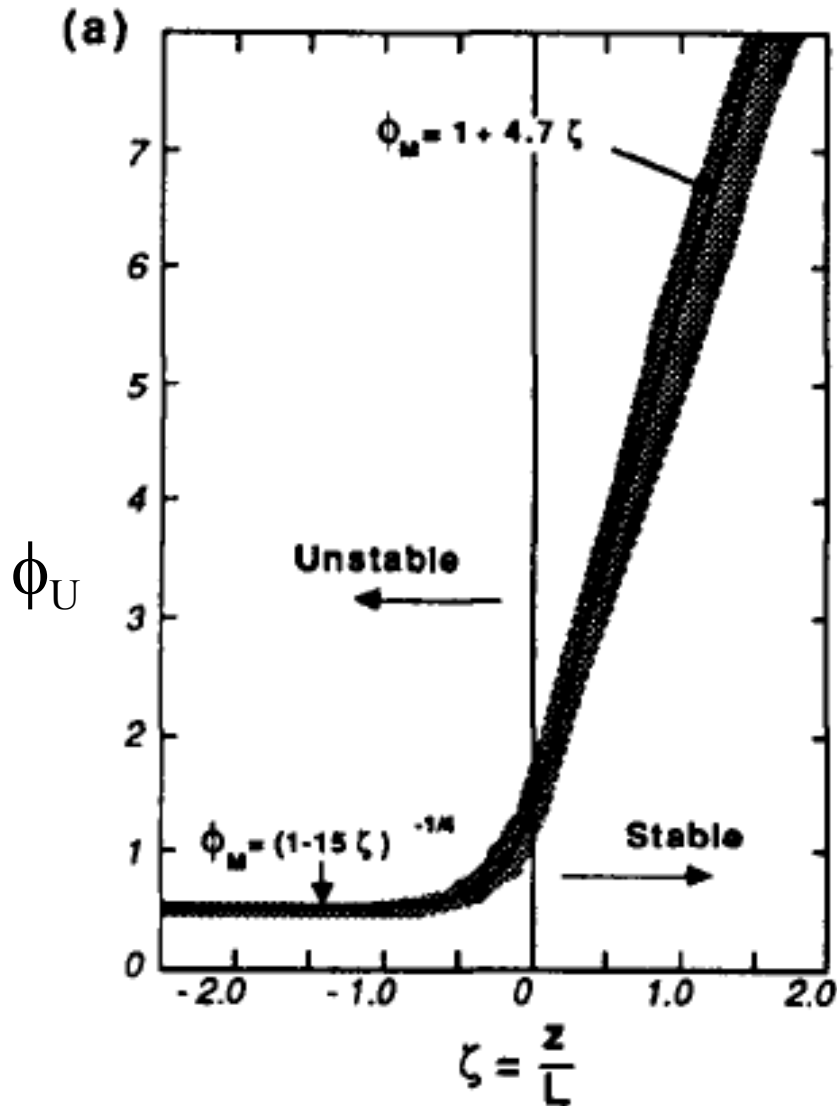
- Ähnliche Ausdrücke wurden für den Wärmefluss und Profile der potentiellen virtuellen Temperatur abgeleitet:



$$\phi_H = \begin{cases} \frac{K_M}{K_H} + \frac{4.7z}{L} & \text{for } \frac{z}{L} > 0 \quad (\text{stable}) \\ \frac{K_M}{K_H} & \text{for } \frac{z}{L} = 0 \quad (\text{neutral}) \\ \frac{K_M}{K_H} \left(1 - \frac{15z}{L}\right)^{-1/4} & \text{for } \frac{z}{L} < 0 \quad (\text{unstable}) \end{cases}$$

wobei  $K_M/K_H$  das Verhältnis der Eddy Diffusivität von Impuls und Wärme ist. Diese Verhältnis ist für neutrale Bedingungen gleich 0.74.

- Oft wird angenommen, dass diese Fluss-Profil Beziehungen für Feuchte oder Spurenstoffe gleich sind wie die für Wärme.



Wertebereich der dimensionslosen Windscherung (a) und des Temperaturgradienten (b) in der Bodenschicht, bestimmt mit den Interpolationsformeln.

# Diabatische Windprofile

- Die Businger-Dyer Beziehung kann man in der Höhe integrieren, um das Profil der Windgeschwindigkeit zu bestimmen:

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) + \psi_M \left( \frac{z}{L} \right) \right]$$

mit  $\psi_M \left( \frac{z}{L} \right) = \frac{4.7z}{L}$  für stabile Bedingungen, d.h.  $\frac{z}{L} > 0$ ,

und  $\psi_M \left( \frac{z}{L} \right) = -2 \ln \left( \frac{1+x}{2} \right) - \ln \left( \frac{1+x^2}{2} \right) + 2 \tan^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$

für instabile Bedingungen, d.h.  $\frac{z}{L} < 0$ , mit  $x = \left( 1 - \frac{15z}{L} \right)^{1/4}$

- Beide Ausdrücke reduzieren sich zum log. Windprofil, wenn  $z/L = 0$ .

# Spektrale Ähnlichkeit

- Die spektrale Analyse von Daten atmosphärischer Turbulenz ist eine effektive Methode, um tiefer in die Untersuchung der Wirkungsweise turbulenter Flüsse einzusteigen.
- Die Ähnlichkeitstheorie wird u.a. auch auf Spektren angewendet, um die Ergebnisse einer Spektralanalyse zur Verbesserung des Verständnisses von Turbulenz zu nutzen.
- So ist die Intensität (Amplitude) des Energiespektrums ein Maß für die Varianz des Signals bei einer bestimmten Frequenz (-bereich), d.h. z.B. proportional zur Größe (Intensität) eines Eddies (einer Größenklasse von Eddies).



# Zwischen- oder Übergangsbereich

- In vielen Situationen gibt es turbulente Eddies mittlerer Größe, die sich weder im Einflussbereich von molekularer Viskosität noch der Erzeugung von TKE befinden.
- Diese Eddies erhalten ihre Energie von größeren Eddies und geben ihre Energie an kleinere Eddies ab.
- Für stationäre turbulente Flüsse muss die Energiekaskade (hin zu höheren Frequenzen) die Dissipationsrate für die kleinsten Eddies balancieren.
- Daher gibt es nur drei Variable, die für die Bewegung (Flüsse) relevant sind:  $S$ , die spektrale Energiedichte;  $\kappa$ , die Wellenzahl;  $\varepsilon$ , die TKE Dissipationsrate (viskose Dissipationsrate der TKE).
- Diese Ähnlichkeitsbetrachtungen wurden erstmals von Kolmogorov (1941) und Obukhov (1941) vorgenommen.

# Zwischen- oder Übergangsbereich

- Durch Anwendung einer Buckingham Pi Analyse der Größen, kann man nur eine dimensionslose Gruppe für diese drei Variable entwickeln:

$$\pi_1 = \frac{S^3 \kappa^5}{\varepsilon^2}$$

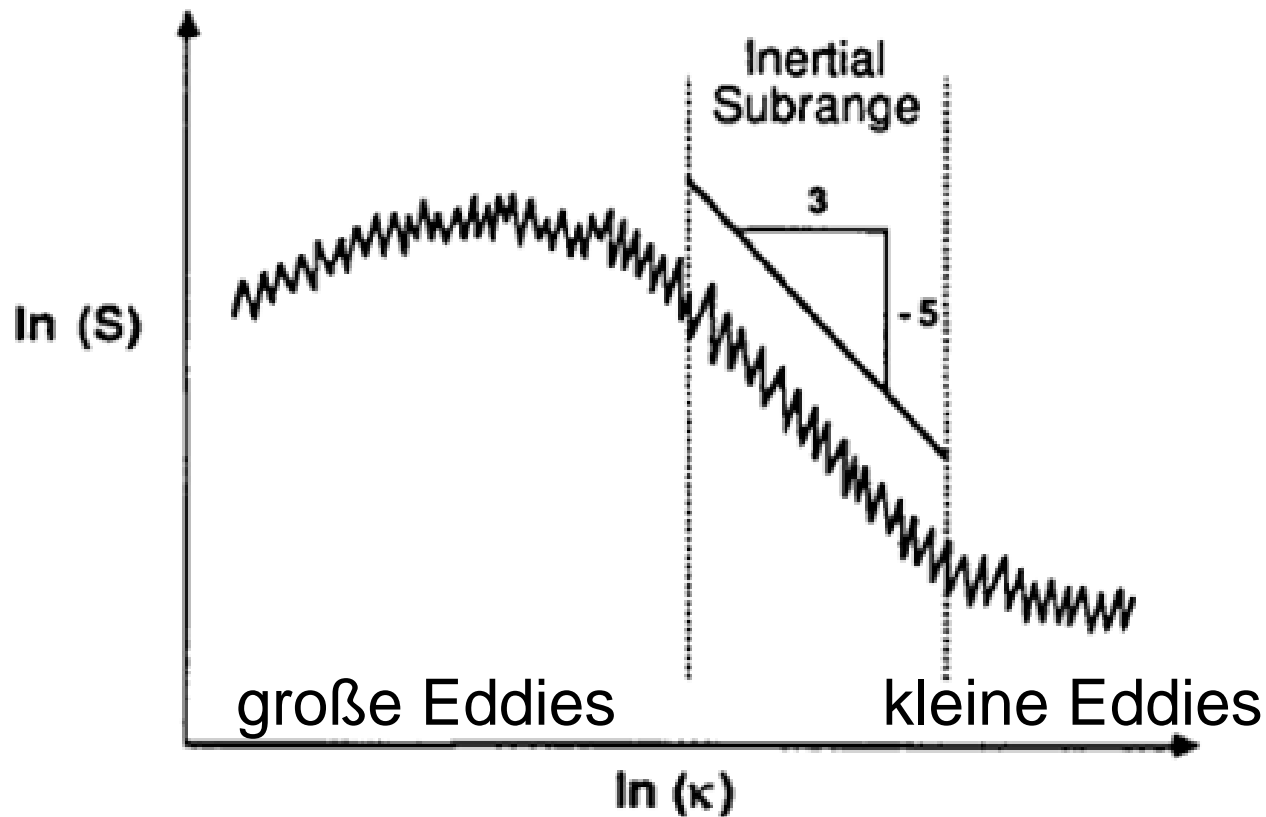
- Man weiß, dass diese Pi-Gruppe gleich einer Konstanten sein muss, da keine anderen Pi-Gruppen als Funktion von ihnen existieren.
- Lösung der obigen Gleichung für S ergibt:

$$S(\kappa) = \alpha_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$$

wobei  $\alpha_k$  bekannt ist als die Kolmogorov Konstante.

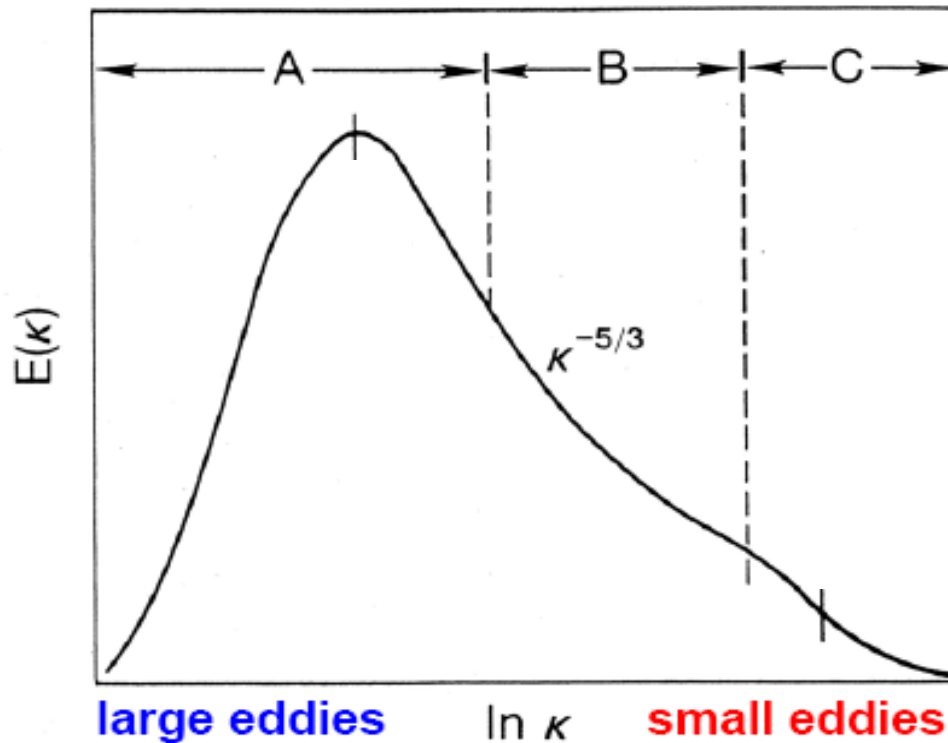
- Der in der Literatur für  $\alpha_k$  angegebene Wert variiert zwischen  $\alpha_k = 1.53$  und  $1.68$ .

# Zwischen- oder Übergangsbereich (engl. inertial subrange)



Um zu bestimmen, ob ein gemessenes Turbulenzspektrum (d.h. spektrale Energiedichte vs. Wellenlänge bzw. Frequenz) einen Übergangsbereich aufweist, schaut man sich das Spektrum in einem logarithmischen Koordinatensystem an: Der Übergangsbereich erscheint als gerade Linie mit einer Steigung von  $-5/3$ .

# Zwischen- oder Übergangsbereich (engl. inertial subrange)



- A. Energy containing range:** conversion of mean-flow kinetic energy to turbulence kinetic energy, TKE ( production of TKE)
- B. Inertial subrange:** spectral transfer of TKE to smaller scales (no production – no dissipation of TKE), spectral roll-off at  $-5/3$  power
- C. Dissipation range:** conversion of TKE to heat (by molecular interaction)



**Ende Kapitel 9**

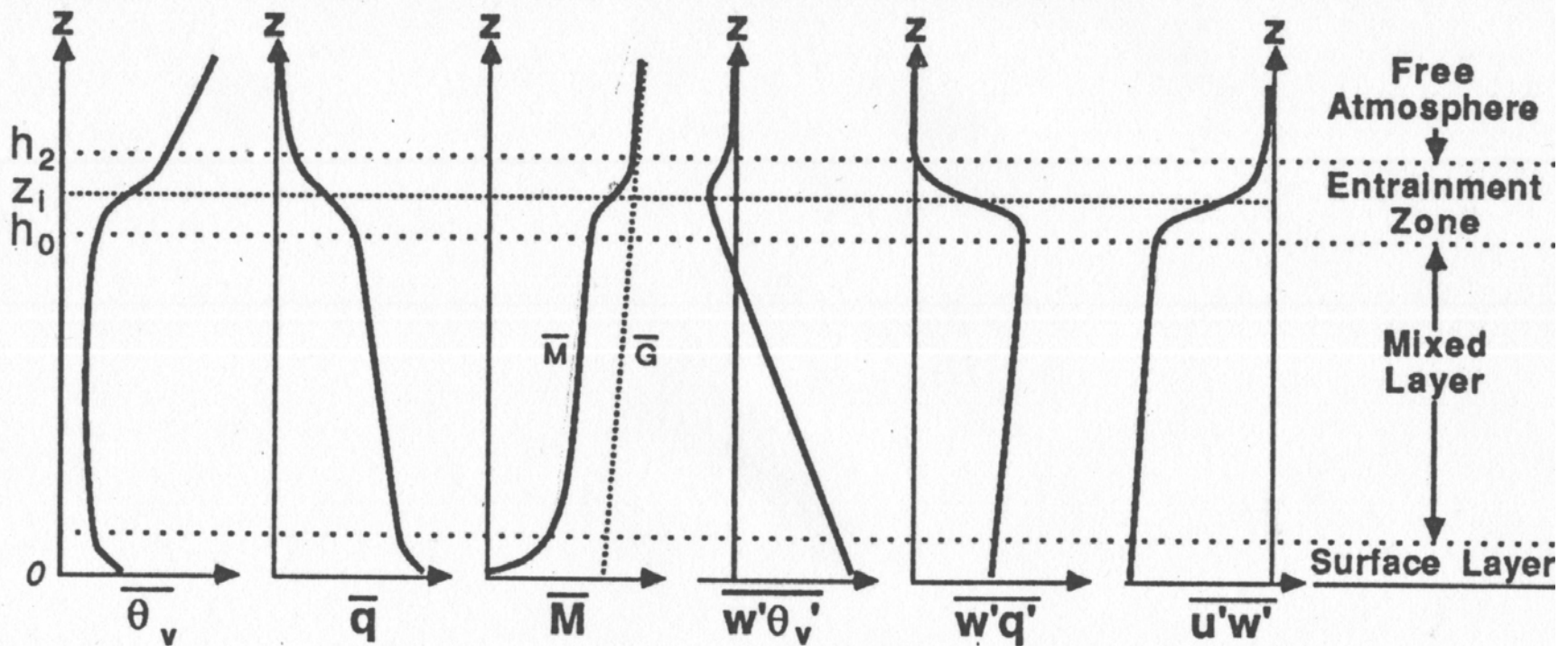
# Kapitel 11: Konvektiv durchmischte Schicht



# Konvektiv durchmischte Schicht

- Auftrieb ist der dominierende Mechanismus für den Antrieb von Turbulenz in einer konvektiven Grenzschicht.
- Wie schon vorher erwähnt ist Turbulenz nicht vollständig zufällig; sie ist oft "organisiert" in deutlich erkennbaren Strukturen, wie z.B. Thermals oder Rauch- (Abgas-) fahnen.

In diesem Kapitel wird die Struktur und die Entwicklung der Konvektion in der Grenzschicht sowie die Kräfte, die auf sie wirken, besprochen.



- Innerhalb der konvektiven Grenzschicht können 3 Schichten identifiziert werden:
  1. Bodenschicht (untere 5-10%);
  2. Mischungsschicht (mittlere 35-80%);
  3. Übergangsbereich (obere 10-60%).
- Oft wird die gesamte konvektive Grenzschicht auch Mischungsschicht genannt.



# Konvektiv durchmischte Schicht

- Die Mischungsschicht wird deshalb so genannt, da eine intensive Vermischung in der Vertikalen dazu führt, dass Größen, wie die potentielle Temperatur oder die spezifische Feuchte, nahezu konstant mit der Höhe sind.
- Auch die Windgeschwindigkeit und -richtung sind nahezu konstant über die Höhe der Mischungsschicht. Manchmal spricht man auch von einer gut durchmischten Schicht.
- Die Oberkante der konvektiv durchmischten Schicht ( $z_i$ ) wird oft dort definiert, wo der Wärmefluss negativ ist.
- Dieser Bereich ist etwa in der Mitte der Entrainmentzone, oft dort, wo die Inversion am stärksten ist.
- Eine andere Kenngröße für die mittlere Dicke der ML ist die Höhe, in der ein von der Oberfläche her aufsteigendes Luftpaket (-teichen) keinen weiteren Auftrieb erfährt.

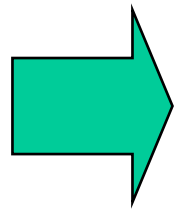
- Mischung kann sowohl mechanisch (durch Scherung) als auch konvektiv (durch Auftrieb) erzeugt werden.
- Auftrieb (Konvektion) erzeugt eine gleichmäßigere Durchmischung als mechanisch erzeugte Mischung, da bei der Konvektion die Anisotropie vertikale Bewegungen bevorzugt, während Scherung eher horizontale Bewegungen verursacht.
- Die Zeitskala für Konvektion  $t_*$  hat eine Größenordnung von 10-20 min.: Dies ist die Zeit, die typischerweise ein Luftpaket benötigt, um von der Oberfläche zur Oberkante der ML aufzusteigen.
  - ⇒ Änderungen, die in den Flüssen nahe der Oberfläche entstehen, können sich rasch auf die gesamte ML übertragen.

# Erhaltungsgleichungen

- Sei  $\langle \xi \rangle$  der Mittelwert einer beliebigen Größe  $\xi$  über die gesamte Höhe der Mischungsschicht:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{z_i} \int_0^{z_i} \xi dz$$

Man kann die Erhaltungsgl. (siehe Kap. 3) integrieren und erhält somit:



$$z_i \frac{d\langle \bar{\theta} \rangle}{dt} = \overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i}$$

$$z_i \frac{d\langle \bar{q} \rangle}{dt} = \overline{w'q'} \Big|_s - \overline{w'q'} \Big|_{z_i}$$

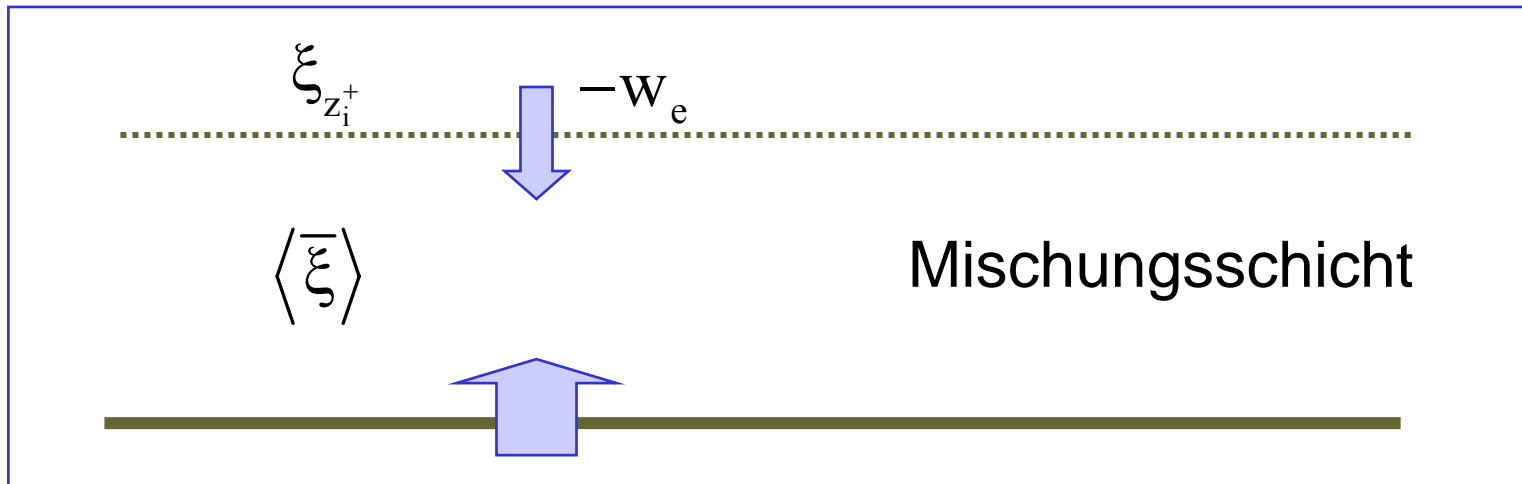
$$z_i \frac{d\langle \bar{u} \rangle}{dt} = \overline{w'u'} \Big|_s - \overline{w'u'} \Big|_{z_i} - f \langle \bar{v}_g - \bar{v} \rangle z_i$$

$$z_i \frac{d\langle \bar{v} \rangle}{dt} = \overline{w'v'} \Big|_s - \overline{w'v'} \Big|_{z_i} + f \langle \bar{u}_g - \bar{u} \rangle z_i$$

- Die Flüsse am Erdboden werden üblicherweise als Randbedingungen vorgegeben.
- Die Flüsse am Oberrand der ML werden normalerweise bestimmt durch (aber nur wenn  $w_e$  bekannt ist!):

$$\overline{w'\xi'} \Big|_{z_i} = -w_e (\xi_{z_i^+} - \langle \overline{\xi} \rangle)$$

"Entrainment" Geschwindigkeit



- Des weiteren benötigt man eine Kontinuitätsgleichung.  $\Rightarrow$

# Entwicklung der Mischungsschicht

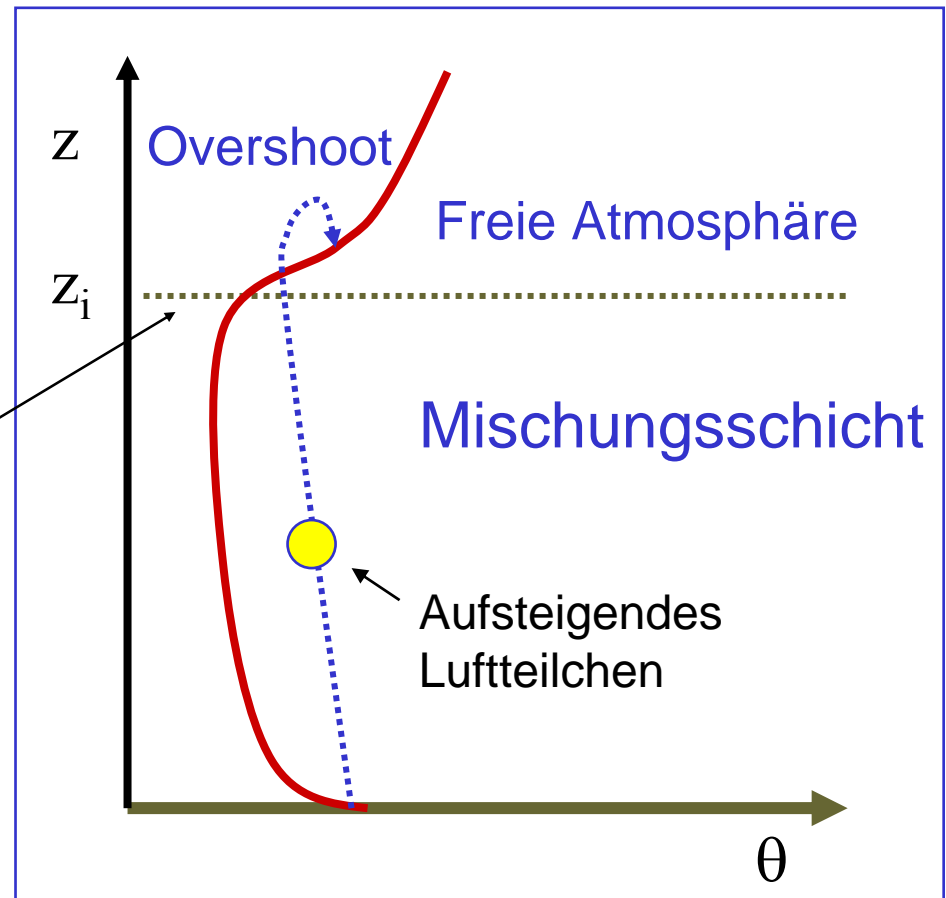
- Dies ist ein Prozess in vier Phasen:
  1. Bildung am frühen Morgen; anfänglich dünne ML, die in ihrer Dicke langsam zunimmt (the burning off phase),
  2. Schnelles Anwachsen der ML,
  3. Mächtige ML mit nahezu konstanter Dicke (Höhe),
  4. Zerfall der Turbulenz.
- Am späten Vormittag erreicht die Oberkante ML die Unterkante der RL, wonach die schnelle Zunahme der ML passiert.
- Nach Sonnenuntergang lässt die Erzeugung von konvektiver Turbulenz rasch nach bis zu dem Punkt, an dem Turbulenz nicht mehr aufrechterhalten wird und Dissipation dominiert.

# Turbulentes "Entrainment" und Wachstum der ML

- Bei freier Konvektion erfahren aufsteigende Thermals einen Impuls, während sie von der Bodenschicht durch die ML aufsteigen.

"Eindringende Konvektion ⇒

- Luft der freien Atmosphäre wird in die ML eingetragen: weniger turbulente Luft wird in turbulente Luft eingebracht (engl. entrain).



Modellierung von  
Entrainment:

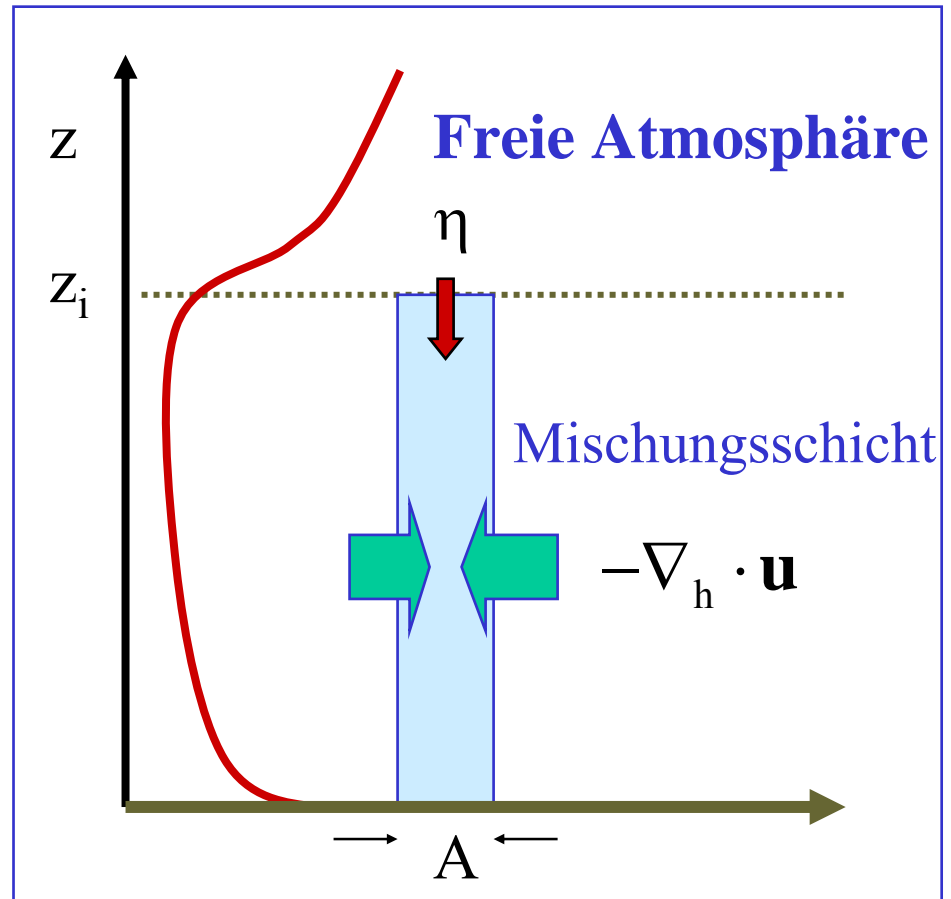
$$A \frac{dz_i}{dt} = \eta$$



Netto Flussrate in  
ein Volumen



$$\eta = w_e A - \int_0^{z_i} \int_A \nabla_h \cdot \mathbf{u} dx dy dz$$



$$\int_0^{z_i} \int_A \nabla_h \cdot \mathbf{u} dx dy dz = A w_L$$

Großskalige Vertikalgeschwindigkeit in  $z_i$

$$A \frac{dz_i}{dt} = \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{dz_i}{dt} = w_e + w_L$$

negativ für Absinken

Wenn (aktive) Wolken vorhanden sind, die dazu führen, dass an der Oberkante der ML Luft nach oben entweicht, folgt:

$$\frac{dz_i}{dt} = (1 - \sigma_c) w_e - \sigma_c w_c + w_L$$

Bedeckungsgrad

Mittleres Aufsteigen in der Wolke

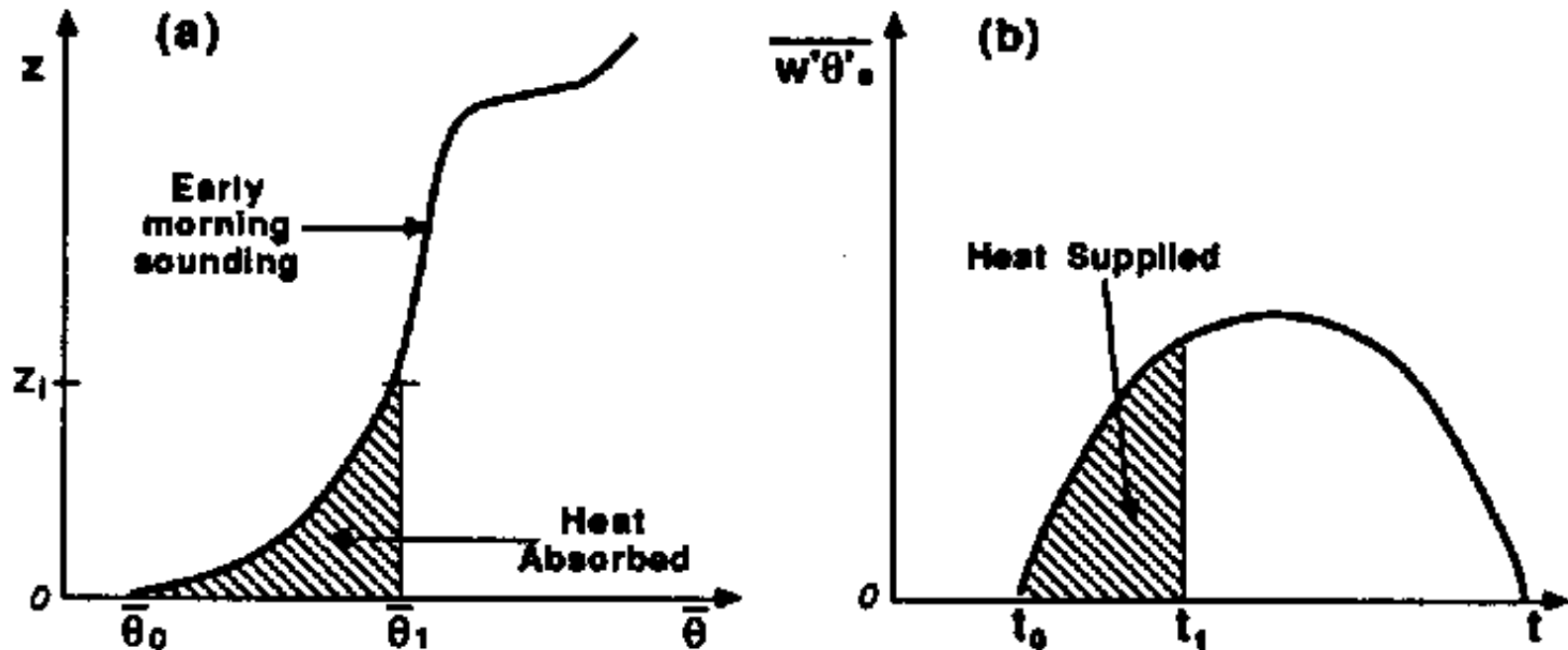


$$\frac{dz_i}{dt} = (1 - \cancel{\sigma_c})w_e - \cancel{\sigma_c}w_c + \cancel{w}_L$$

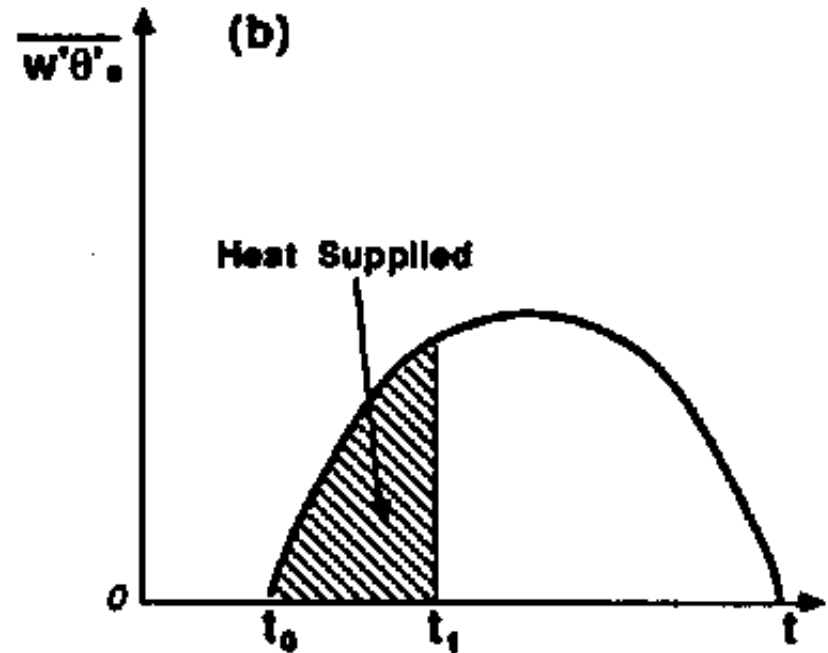
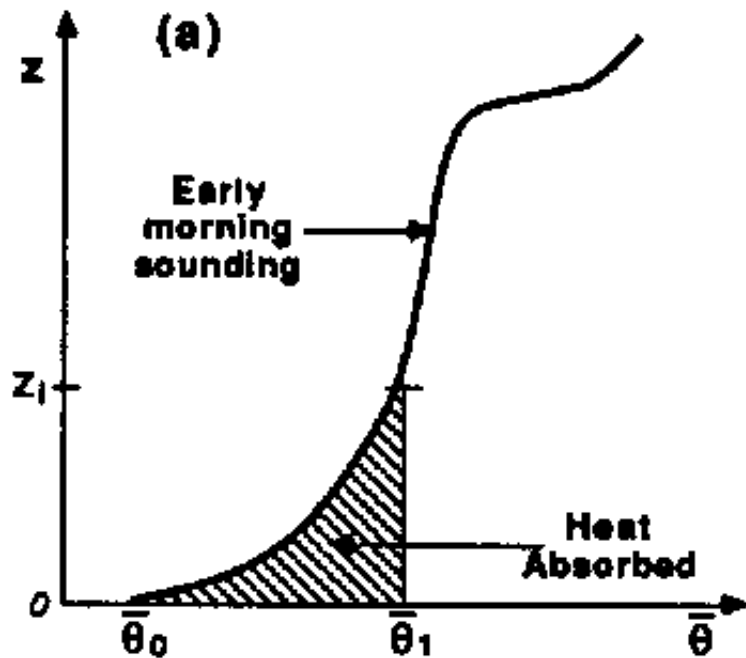
- Wenn es keine Wolken und kein Absinken gibt folgt, dass der Oberrand der ML ( $z_i$ ) entsprechend  $w_e$  ansteigt.
- Absinken ( $w_L < 0$ ) kann das Anwachsen der Dicke der ML mindern oder die Dicke der ML reduzieren.
- Beachte, dass Absinken aus der freien Atmosphäre keine Luft in die ML injiziert, da das "Entrainment" durch  $w_e$  bestimmt ist.
- Bei einer Konvergenz kann die Oberkante der ML mit einer viel höheren Geschwindigkeit aufsteigen, als  $w_e$ .
- Beachte, dass horizontale Advektion lokal für die Zunahme der Dicke der ML wichtig sein kann.

# Thermodynamisches Anwachsen der Mischungsschicht

- Ein recht einfacher Weg, die Dicke und Temperatur der ML zu bestimmen ist, sich auf thermodynamische Vorgänge zu beschränken und die Dynamik des turbulenten Eindringens (Entrainment) zu vernachlässigen.



**Fig. 11.12** Graphical approach to estimate mixed layer depth thermodynamically by equating heat supplied with heat absorbed.



Thermodynamische Methode zur Bestimmung der Dicke der ML:  
 Vernachlässigung Advektion, Strahlung und latenter Wärme.

$$\int_0^{t_1} \overline{w'\theta'_s} (t) dt = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta_1} z(\theta) d\theta$$

Messung am  
frühen Morgen

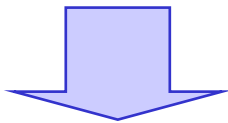
Lösen für  $\theta_1$  bei gegebenem  $t_1$

Alternativer Ansatz: Verwendung des lokalen Temperaturgradienten oberhalb ML am frühen Morgen:

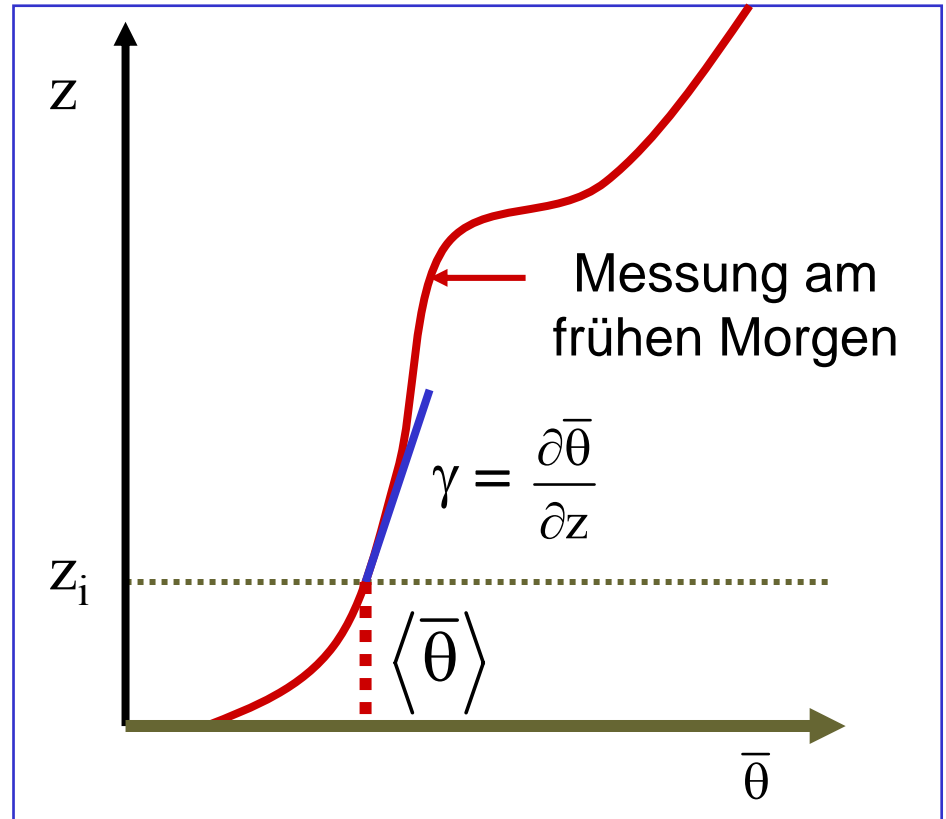
$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \langle \bar{\theta} \rangle}{\partial t}$$

Aber

$$z_i \frac{d \langle \bar{\theta} \rangle}{dt} = \overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i}$$



$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{\overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i}}{\gamma z_i}$$

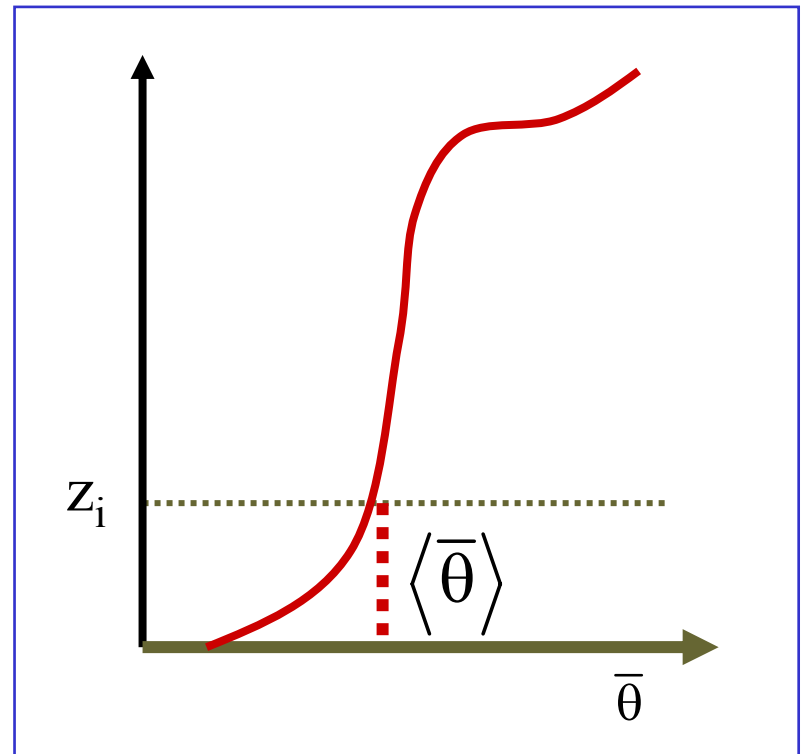


Annahme: Zeitlich konstanter Wärmefluss und in der Höhe konstanter Temperaturgradient:

$$z_i^2 - z_{i0}^2 = \frac{2}{\gamma} \left( \overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i} \right) (t - t_0)$$

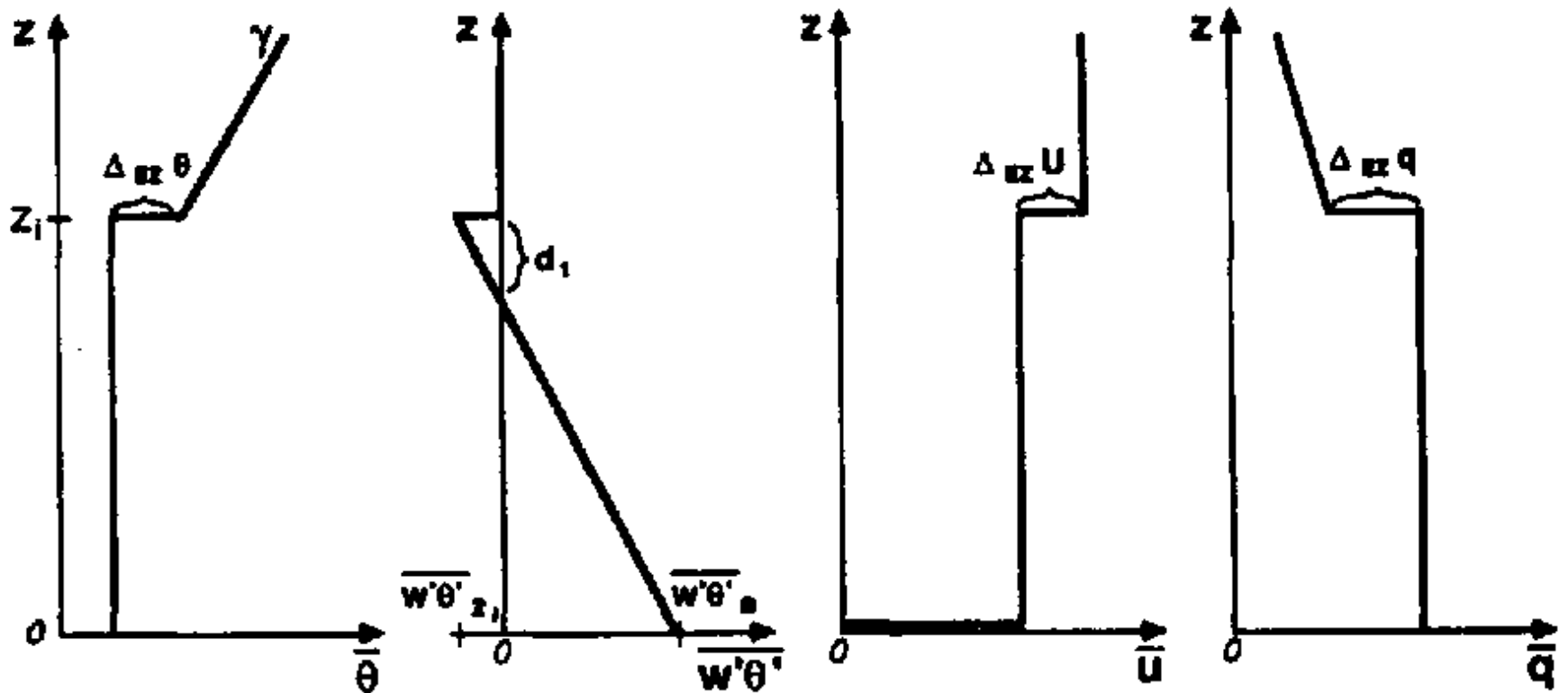
# Encroachment Methode

- Annahme: Der Wärmefluss an der Oberfläche sei die einzige Wärmequelle für die ML, d.h. der Wärmefluss am oberen Rand der ML wird Null gesetzt (siehe obige Formeln). Dieser Spezialfall wird "Encroachment" genannt.
- Die Mischungsschicht weitet sich (engl. encroach) nur in dem Maße nach oben aus, wie sich die ML erwärmt.
- Dieser thermodynamische Ansatz erklärt etwa 80-90% der beobachteten Variation der Dicke der ML.



# Bulk (Säulen) Modell

- Annahme: Die mittleren Variablen sind in der ML konstant und am Übergang zur freien Atmosphäre weisen sie eine scharfe Diskontinuität auf. (Einfachste Beschreibung der ML.)



**Fig. 11.13** Idealized slab mixed layer, with discontinuous jumps of variables at the mixed layer top.

# Erhaltungsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen sind sehr einfach, da die aktuellen Werte der mittleren Variablen in der ML gleich dem vertikalen Mittel sind:


Potentielle Temperatur: 
$$z_i \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i}$$

Impuls in x-Richtung: 
$$z_i \frac{d\bar{u}}{dt} = \overline{w'u'} \Big|_s - \overline{w'u'} \Big|_{z_i} - f(\bar{v}_g - \bar{v})z_i$$

Analog für Feuchte und Impuls in y-Richtung.

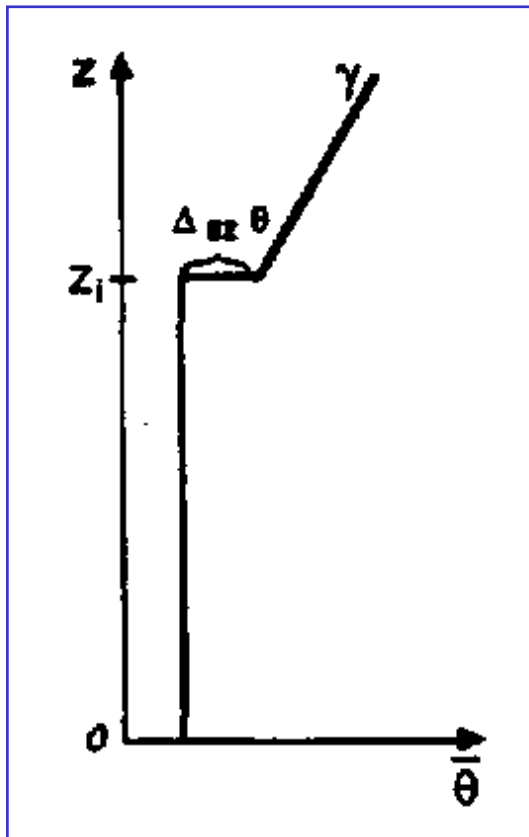
Dicke der ML: 
$$\frac{dz_i}{dt} = w_e + w_L$$

$$\overline{w'\theta'} \Big|_{z_i} = -w_e \Delta_{EZ} \bar{\theta}$$



$$\Delta_{EZ} \bar{\theta} = \bar{\theta}_{z_i^+} - \bar{\theta}_{ML}$$

- Betrachtet man die Geometrie des idealisierten Temperaturprofils, so erwartet man bei einer Erwärmung der ML, dass der Sprung kleiner wird; bzw. größer, wenn über das Entrainment  $z_i$  nach oben wandert:



$$z_i \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \overline{w'\theta'} \Big|_s - \overline{w'\theta'} \Big|_{z_i}$$

$$\frac{dz_i}{dt} = w_e + w_L$$

$$\overline{w'\theta'} \Big|_{z_i} = -w_e \Delta_{EZ} \bar{\theta}$$

$$\frac{d\Delta_{EZ} \bar{\theta}}{dt} = \gamma w_e - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}$$

Fünf  
Unbekannte

Festgelegt  
durch Rand-  
bedingungen



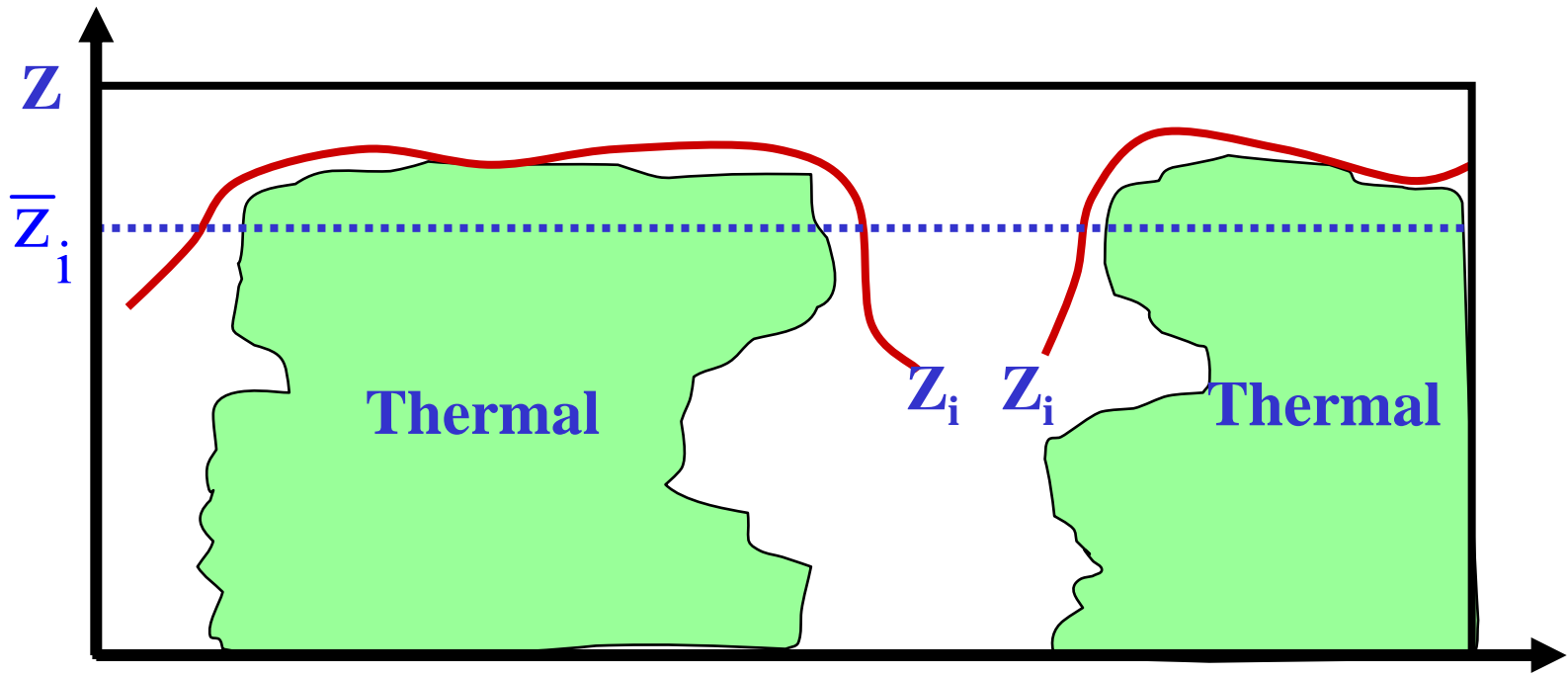
# Schließungsansatz

- Gefordert ist eine Schließungsannahme für eine der Unbekannten. Es gibt zwei Möglichkeiten:
  - Annahme für  $w_e$
  - Annahme für  $\overline{w'\theta'}|_{z_i}$
- Es handelt sich hierbei um eine Schließung 0.5-ter Ordnung, da die Form der Profile im Vorhinein festgelegt wurde und jeweils nur ein Wert für jede Variable der ML bestimmt wird.

# Lokale Schließungsmodelle höherer Ordnung

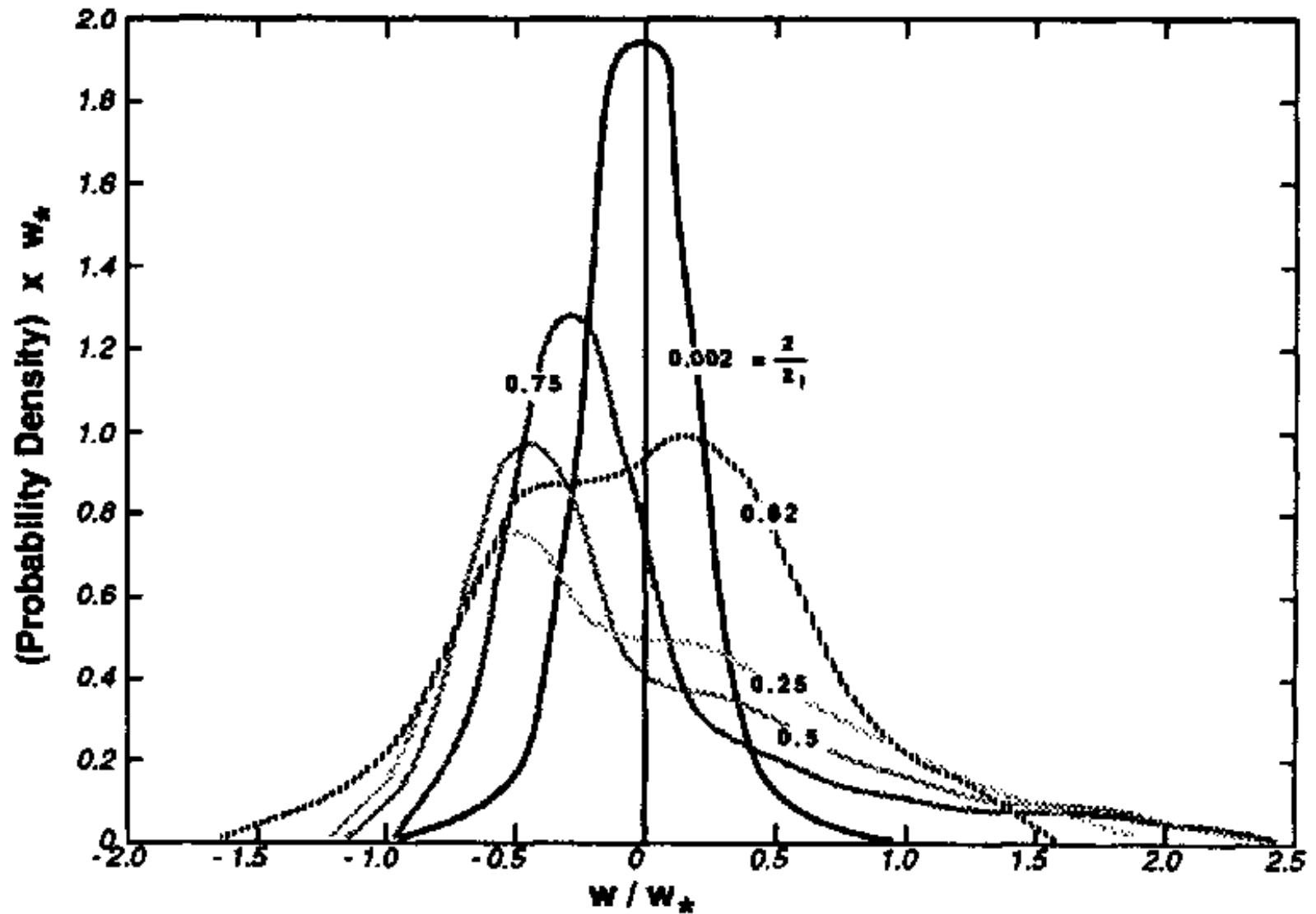
- Lokale Schließungsansätze höherer Ordnung (1.5 - 3) wurden erfolgreich angewendet (siehe oben).
- Vorteile:
  - Möglichkeit der Vorhersage (Bestimmung) der TKE, Varianzen und Flüsse (wenn man Modelle 2. oder höherer Ordnung verwendet).
- Diffusion (Konzept):
  - Die K-Theorie (lokale Schließung 1. Ordnung) hat Probleme in der ML (siehe oben).
  - Eine unendliche Eddy-Diffusivität ist gefordert, um Flüsse in Abwesenheit von mittleren Gradienten zu erhalten.
  - Man kann die Problemlösung mit einem Schließungsansatz 1. Ordnung versuchen und dann das nach oben bzw. unten gerichtete Mischen separat betrachten (siehe Stull, Seite 458-459).

# Thermals

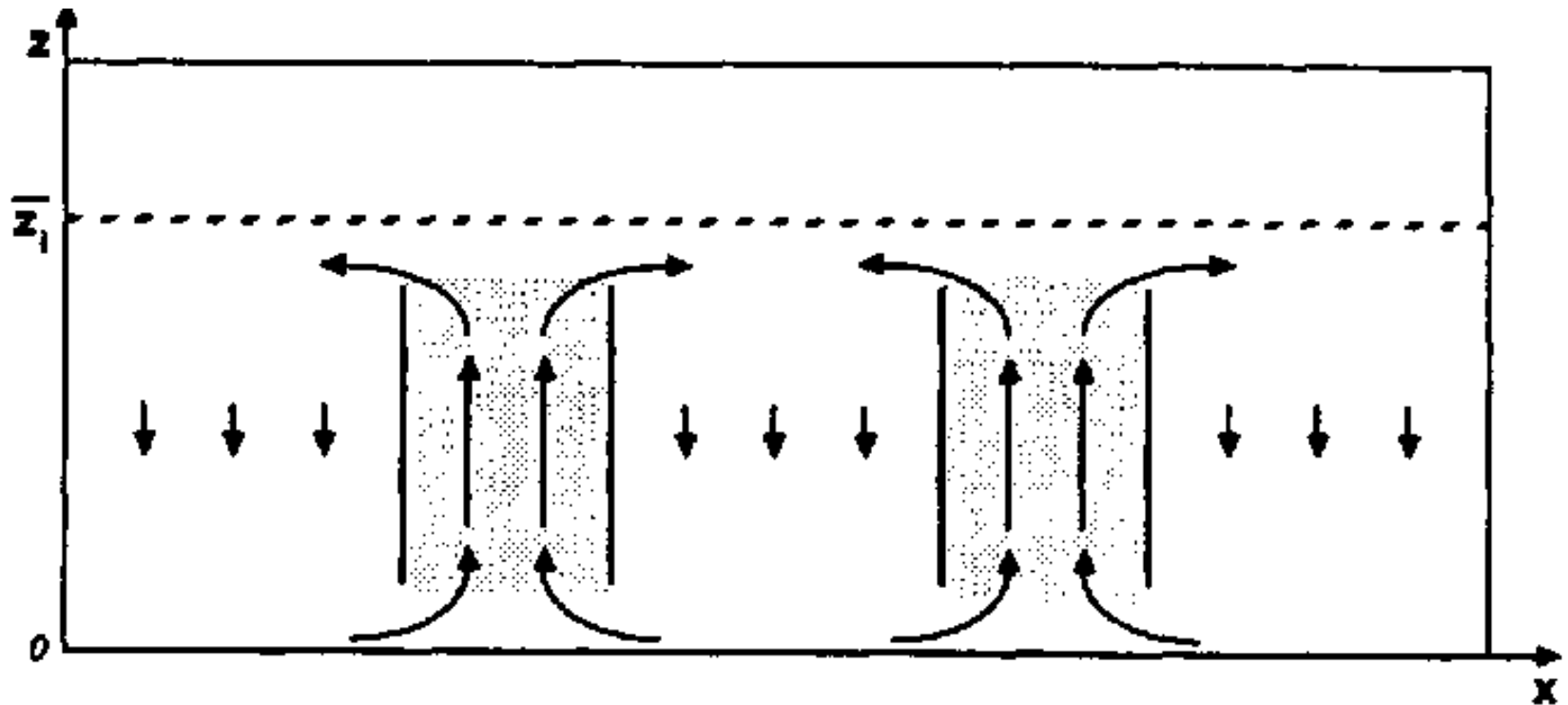


Idealisierte Schnitte durch Thermals:

Thermals sind Luftsäulen von kräftig aufsteigender Luft in einer konvektiv durchmischten Grenzschicht.



Wahrscheinlichkeitsverteilung der Vertikalgeschwindigkeit in einer konvektiv durchmischten Schicht in fünf verschiedenen Höhen.



Idealisierte Darstellung von Thermals mit starken Aufwindbereichen, die relativ kleine Bereiche überdecken und dazwischen liegenden Gebieten mit schwächeren, abwärtsgerichteten Winden (Flüssen).

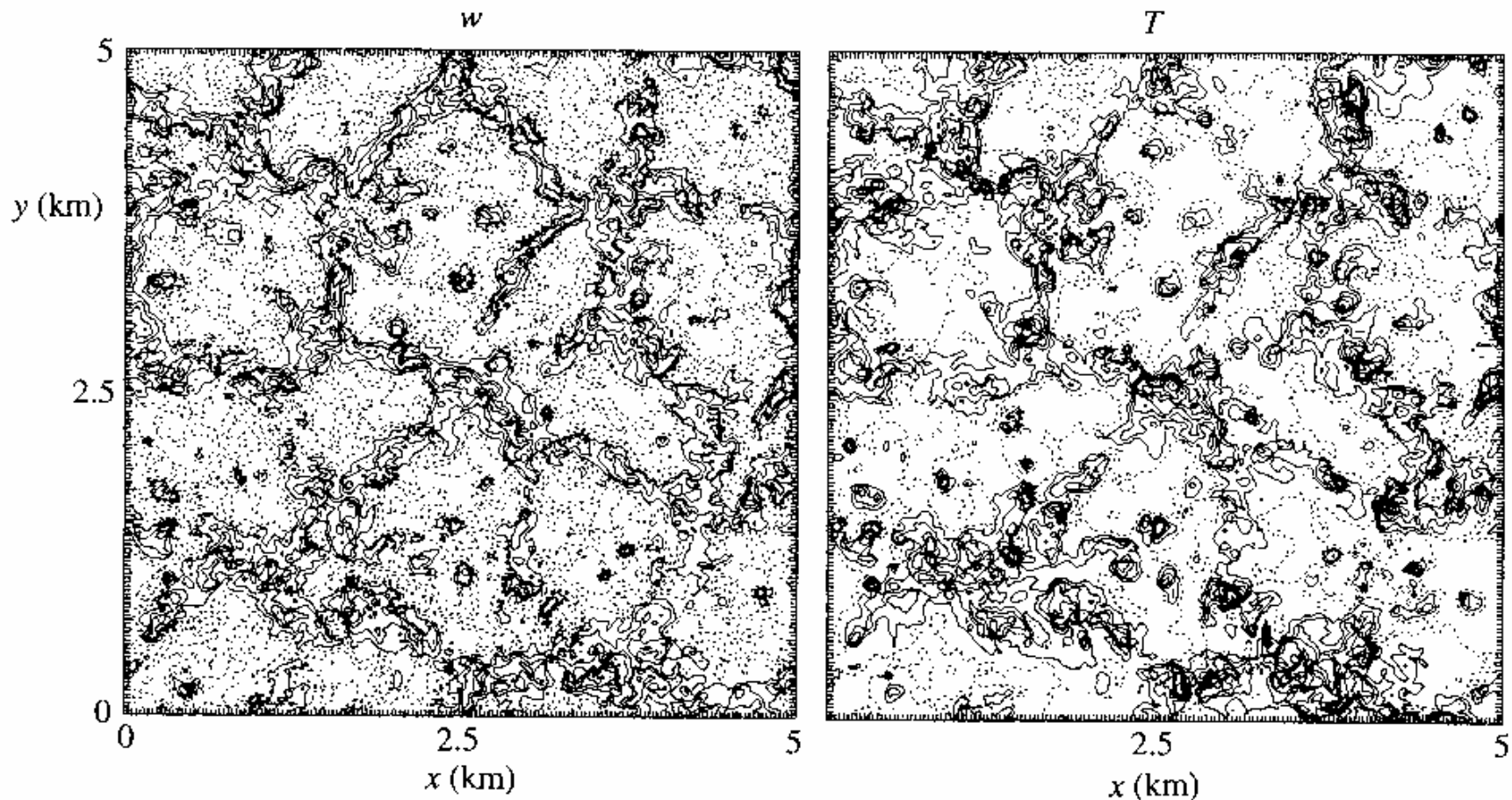
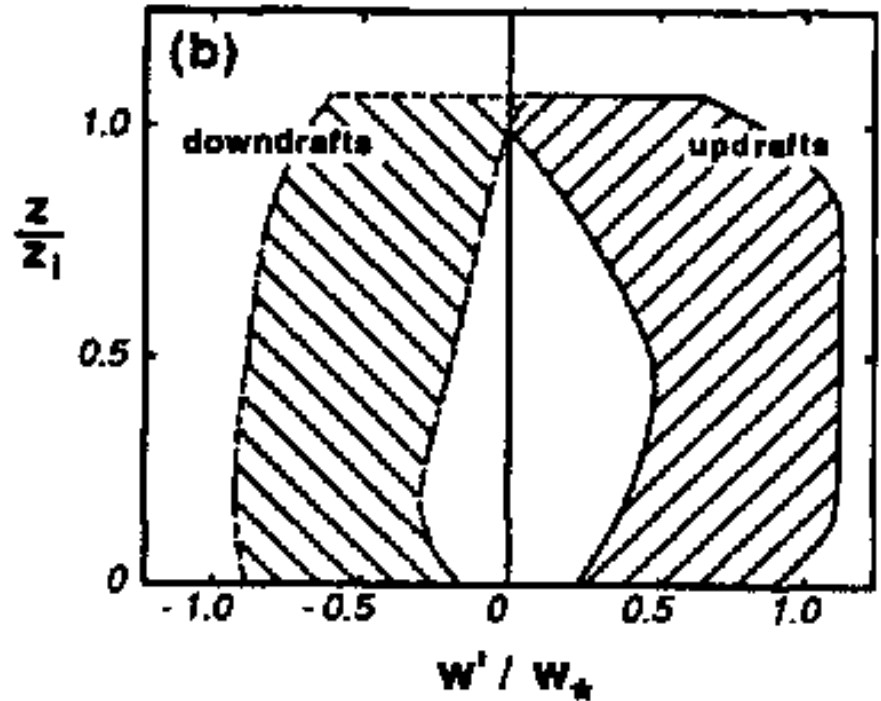
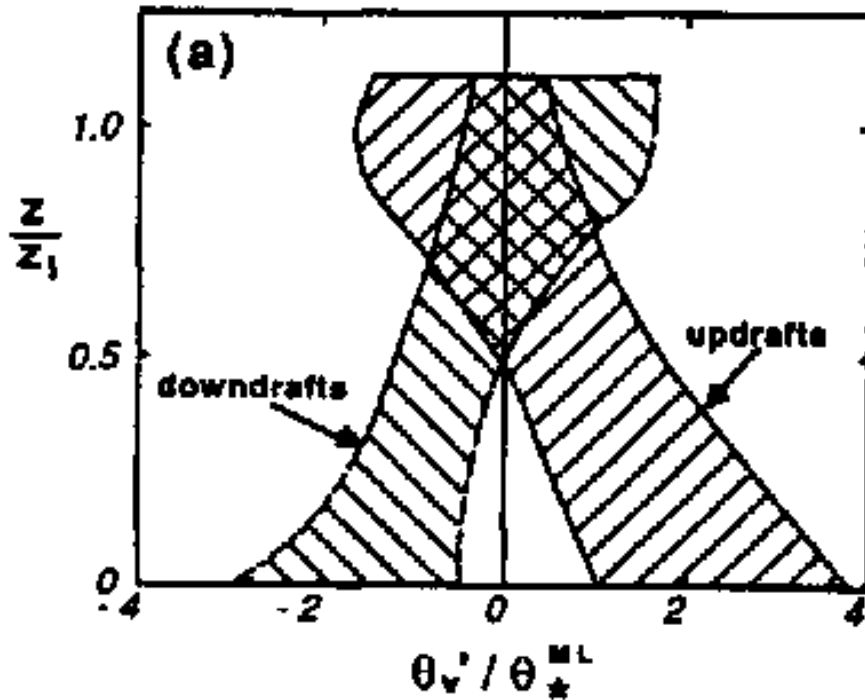


Fig. 6.5 Large-eddy model simulation of convection in the unstable ABL. The left and right panels show contour plots of normalized vertical velocity and normalized temperature fluctuations respectively. Each panel has a 5 km side, and the fields are shown for  $z/h = 0.25$ . The pecked curves correspond to negative contour values (i.e. cool, subsiding air). Thus, the patterns demonstrate an irregular polygon structure with warm, rising motion confined mostly to the “thin” walls of the 1–2 km-wide columns. From Schmidt and Schumann (1989).



Beispiele für mittlere Werte (Annahme gleicher Bedingungen) der Temperatur (a) und der Vertikalgeschwindigkeit (b) in Aufwind- (Thermals) und Abwindgebieten.

- Die Schwierigkeit in der Definition der Grenzen der Thermals besteht darin, dass sie im unteren Bereich der GS ihr Aufsteigen beginnen, wo sie wärmer sind als ihre Umgebung, sie aber im Bereich der Entrainmentzone kälter sind als ihre Umgebung.
- Einige Thermals erhalten einen Großteil ihres Auftriebs (ihrer Energie) aus ihrem Feuchtegehalt; dies ermöglicht, dass die obere Hälfte eines Thermals kälter sein kann als die Umgebung und das mittlere Drittel möglicherweise aber immer noch einen positiven Auftrieb (nach oben) erfährt (Verwendung der virtuellen potentiellen Temperatur).

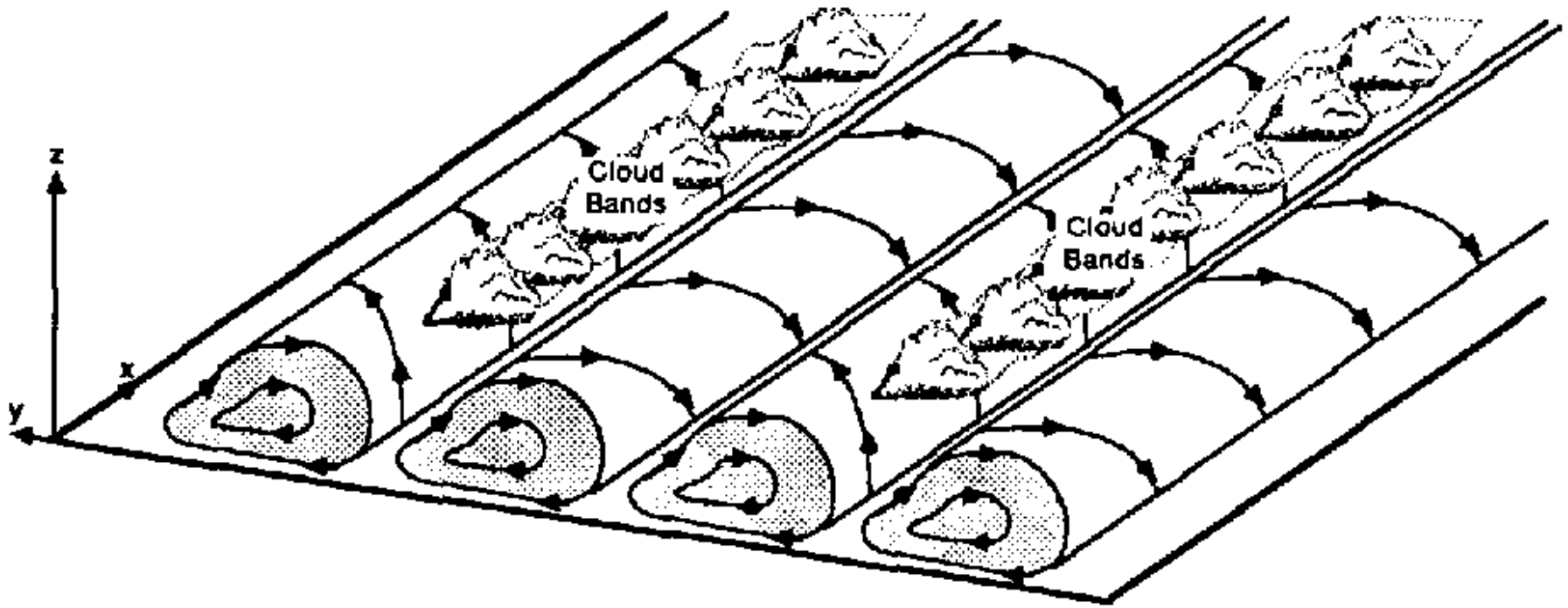


- Nahezu alle Beobachtungen zeigen, dass Thermals nicht wie Blasen aufsteigen, sondern mehr wie Säulen endlicher Länge für eine gewisse Zeit existieren.
- Reale Thermals sind keine perfekten Säulen aufsteigender Luft, sondern sie sind in der Horizontalen verdreht, sie mäandrieren und sie verzweigen sich und fließen wieder zusammen, wenn sie aufsteigen.
- Dennoch sind Thermals anisotrop, vor allem in vertikaler Richtung.

- Thermals bilden sich vor allem dort, wo am Erdboden sogenannte "hot spots" existieren.
- Segelflieger suchen nach diesen Regionen permanenter Aufwärtsbewegung.
- Über feuchten Gebieten bzw. Gebieten mit Vegetation sind Thermals meistens feuchter als ihre Umgebung. Meistens sind sie auch turbulenter.
- Thermals werden auch über Ozeanen beobachtet; dies deutet darauf hin, dass "hot spots" nicht als auslösender Mechanismus notwendig sind.
- In Abwesenheit von "hot spots" können Thermals linien- oder ringförmig als Folge mesoskaliger Bewegungen (Sekundärzirkulation) angeordnet sein.
- Diese Muster kann man z.B. in Satellitenaufnahmen erkennen (Wolkenstrassen, offene/geschlossene Zellen).

# Horizontale Wirbel (Rollen) und mesoskalige, zellenförmige Konvektion

- Bei einer Kombination von Heizung am Boden und starken Horizontalwinden, kann sich in der GS eine schwache, spiralförmige Zirkulation in horizontaler Richtung ausbilden.
- Diese Zirkulation nennt man horizontal rollende Wirbel (kurz Rollen); sie bestehen aus Spiralpaaren mit gegenläufiger Rotation (mit und gegen den Uhrzeigersinn); ihre Hauptachse ist nahezu parallel zur mittleren Windrichtung ausgerichtet.
- Es gibt einige Studien die andeuten, dass im Falle neutraler Bedingungen die Achse dieser Rollen um etwa  $18^\circ$  nach links relativ zur Richtung des geostrophischen Windes gedreht ist und dieser Winkel desto kleiner wird, je instabiler die ML wird.
- Die Dicke dieser Rollen entspricht in etwa der der ML; das Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Ausdehnung der Rollenpaare ist etwa 3:1.



Typische horizontale Rollenwirbel in der planetaren Grenzschicht.



- Rollen werden z.B. häufig dort beobachtet, wo kalte Luft über warme Wasserflächen advehiert wird; sie sind verbunden mit deutlichen Veränderungen der Luftmasse (z.B. Temperatur, Feuchtegehalt).
- Rollen entstehen oft auch vor herannahenden Kaltfronten; sie können auch zwischen Paaren von geschlossenen Isobaren von Antizyklonen in der warmen Jahreszeit vorkommen.

- Theorien für die Bildung von Rollen beinhalten thermische Instabilitäten und Trägheitsinstabilitäten.
- Aus thermischer Sicht würde man erwarten, dass auf aufsteigende Thermals weniger Reibung wirkt, wenn sie in Reihen angeordnet sind, da diese "Nachbarn" haben, die ebenfalls aufsteigen.
- Die Anordnung in Reihen kann, was den Auftrieb betrifft, effektiver sein, da dies einen Schutz vor der Windscherung in der Umgebung bietet.
- Andere Studien zeigen, dass eine Sekundärzirkulation (also Rollen) immer dann entstehen kann, wenn ein Wendepunkt im Profil des mittleren Windes auftritt.
- Beispiel: Die Lösung der Ekmanspirale hat immer einen Wendepunkt nahe an der Oberkante der Ekman-schicht.

- In einer Situation, in der kalte Luft über einen Ozean advehiert, gehen die Rollenmuster und Wolkenstrassen stromabwärts langsam in zellenförmige Muster über.
- Dieses (Honigwaben) Muster wird durch eine mesoskalige, zellenförmige Konvektion verursacht.
- Offene Zellen bestehen aus hexagonalen (sechsseitigen) Ringen, mit Bereichen, die durch Aufsteigen und Wolken charakterisiert sind. Sie umgeben einen klaren, zentralen Bereich mit Absinken.
- Geschlossene Zellen sind Ringe klarer, absteigender Luft um mesoskalige Wolkencluster herum, die durch Aufsteigen von Luft charakterisiert sind.
- Die Durchmesser der Zellen sind etwa 10 bis 100 km. Zellen haben eine Dicke von 2 bis 3 km; daraus ergibt sich ein Verhältnis von 10:1 bis 30:1.



# 1. Beispiel

Gegeben sei eine wolkenfreie ML mit konstantem  $w_e = 0.1 \text{ m s}^{-1}$ , und einer konstanten Divergenz von  $5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Ermittle die zeitliche Entwicklung der Dicke der ML. Zu Beginn gelte:  $z_i = 0$  und  $t = t_0 = 0$ .

Lösung: Integration der Kontinuitätsgleichung, um  $w_L$  in  $z_i$  zu bestimmen:

$$w_L|_{z_i} = -\text{Div} \cdot z_i \quad (\text{Div} = \nabla_h \cdot \mathbf{u})$$

$$\frac{dz_i}{dt} = w_e + w_L \quad \Rightarrow \quad \frac{dz_i}{dt} = w_e - \text{Div} \cdot z_i$$

Umschreiben ergibt:

$$\frac{dz_i}{w_e - \text{Div} \cdot z_i} = dt$$

Integration ergibt:

$$z_i = \frac{w_e}{\text{Div}} - \left( \frac{w_e}{\text{Div}} - z_i(t_0) \right) e^{-\text{Div}(t-t_0)}$$

Für die Dicke der ML (als Funktion der Zeit) ergibt sich:

t (h)	0	1	2	3	4	5	10	20
$z_i$ (m)	0	329	605	834	1026	1187	1669	1945

Diskussion:

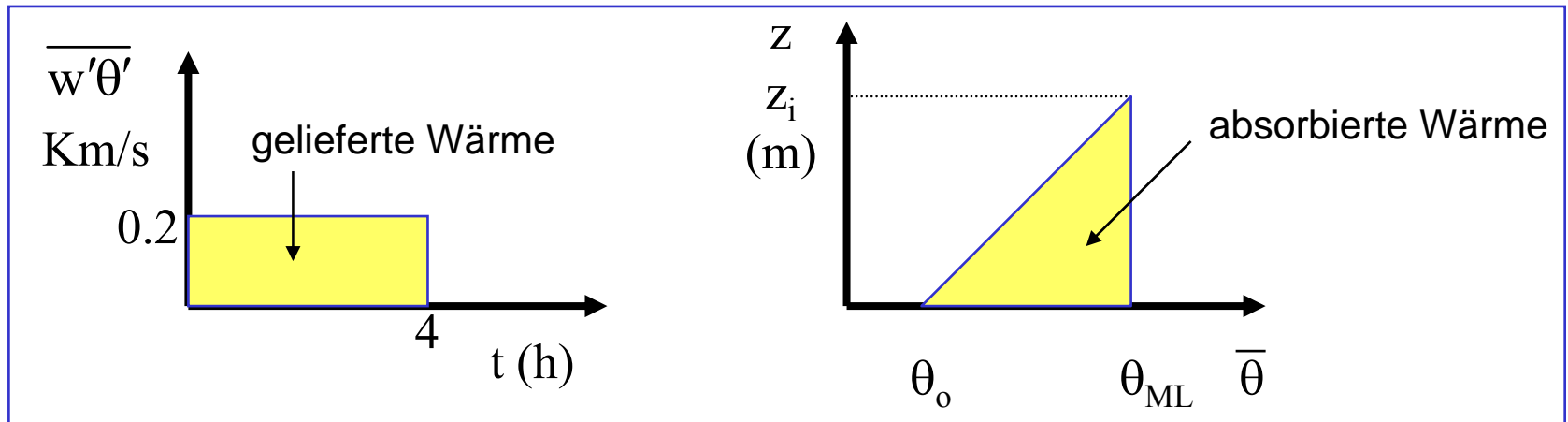
- $w_L$  wächst aufgrund der konstanten Divergenz in der ML mit der Höhe an.
- Die Oberkante der ML kann nicht höher sein als 2 km, da in dieser Höhe  $|w_L| > |w_e|$ . (D.h.: Das Absinken ist stark genug, um dem Entrainment vollständig entgegen zu wirken.)
- $|w_e|$  wird kleiner, wenn die Dicke der ML zunimmt.
- Diese beiden Faktoren limitieren die Dicke der ML.
- Es gibt allerdings auch beobachtete Fälle, in denen  $|w_L| > |w_e|$  und  $z_i$  mit der Zeit kleiner wird.

## 2. Beispiel

Angenommen, dass zu Beginn  $\theta = \theta_0 + \gamma z$  mit  $\theta_0 = 300 \text{ K}$  und  $\gamma = 0.01 \text{ K m}^{-1}$ . Weiterhin sein der Wärmefluss am Erdboden konstant mit der Zeit:  $\overline{w'\theta'}\Big|_s = 0.2 \text{ K m/s}$ .

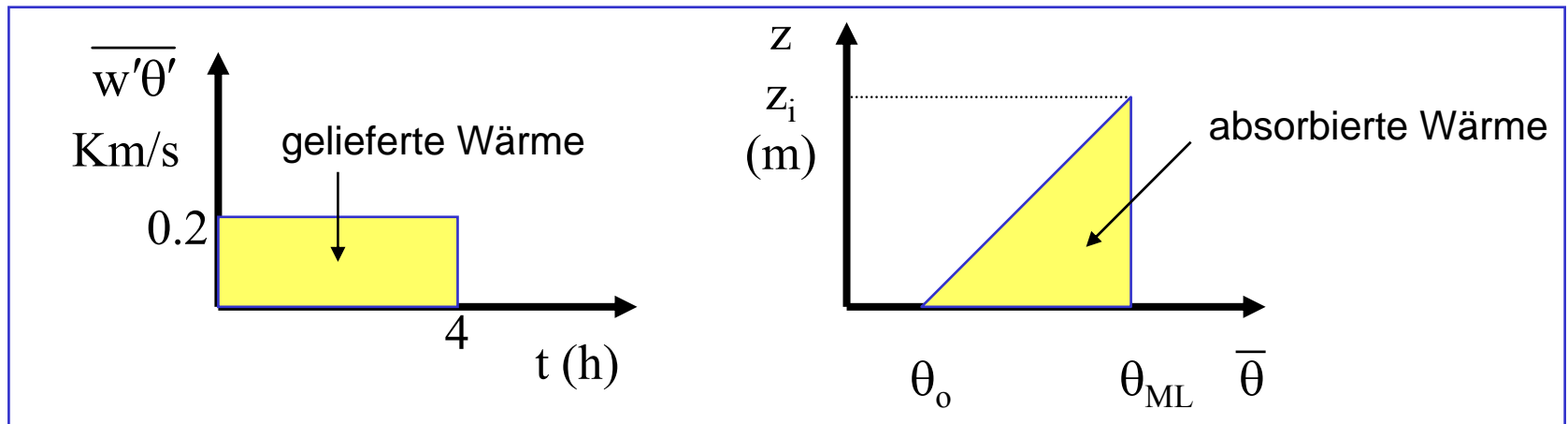
Wenn  $z_i = 0$  bei  $t = 0$ , verwende die thermodynamische Methode, um  $z_i$  und  $\theta_{ML}$  zum Zeitpunkt  $t = 4 \text{ h}$  zu bestimmen.

Das Problem kann grafisch gelöst werden:



$$\text{gelieferte Wärme} = 0.2 \text{ K m/s} \cdot 4 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h} = 2880 \text{ K m}$$

$$\text{absorbierte Wärme} = 0.5 \cdot \text{base} \cdot \text{height} = 0.5 (\theta_{ML} - \theta_0) \cdot z_i = 0.5 \gamma z_i^2$$



gelieferte Wärme =  $0.2 \text{ K m/s} \cdot 4 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h} = 2880 \text{ K m}$

absorbierte Wärme =  $0.5 \cdot \text{base} \cdot \text{height} = 0.5 (\theta_{ML} - \theta_o) \cdot z_i = 0.5\gamma z_i^2$

Gleichsetzen ergibt:

Dicke der ML:  $z_i = \sqrt{(2 \times 2880 / 0.01)} = 759 \text{ m}$ .

Potentielle Temperatur der ML:  $\theta_{ML} = \theta_o + \gamma z_i$   
 $= 300 + 0.01 \times 759 = 307.6 \text{ K}$

- In der Realität ist der Wärmefluss in der Regel abhängig von der Zeit und die anfängliche Beobachtung ist komplexer als hier angenommen.

# Entrainment Geschwindigkeit und ihre Parametrisierung

## Methode der Flussraten

- Für den Fall der freien Konvektion steht die Turbulenz, die Entrainment verursacht, in direktem Bezug zu dem Auftriebsfluss an der Oberfläche.
- Dies führt dazu, dass der Auftriebsfluss an der Oberkante der ML ein nahezu konstanter Teil des Flusses am Boden ist:

$$\frac{-\overline{w'\theta'_v}|_{z_i}}{\overline{w'\theta'_v}|_s} = A_R \quad \text{Entrainmentkoeffizient}$$

mit  $0.1 < A_R < 0.3$ .  $A_R = 0.2$  ist ein gebräuchlicher Wert.

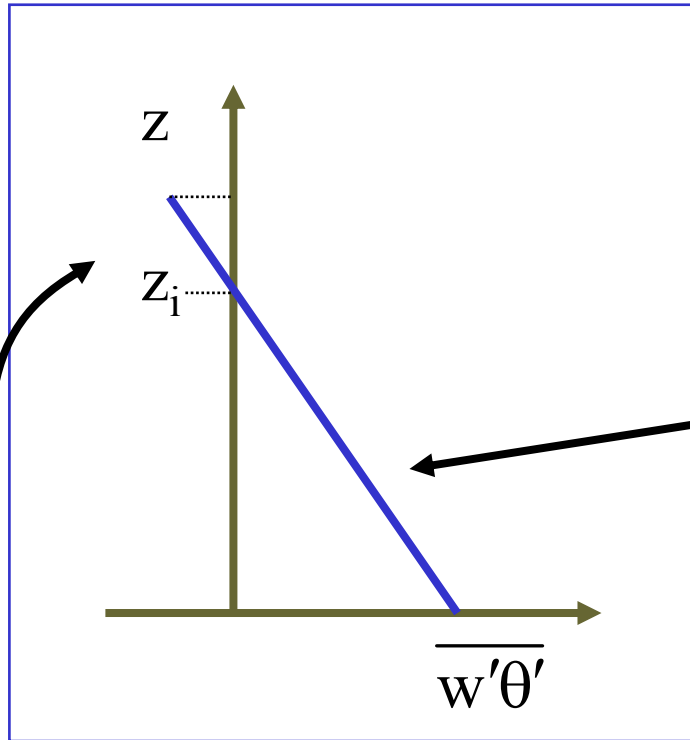
$$\overline{w'\theta'_v}|_{z_i} = -w_e \Delta_{EZ} \bar{\theta}_v \quad \longrightarrow \quad w_e = \frac{A_R \overline{w'\theta'_v}|_s}{\Delta_{EZ} \bar{\theta}_v}$$

## Energetische Methode

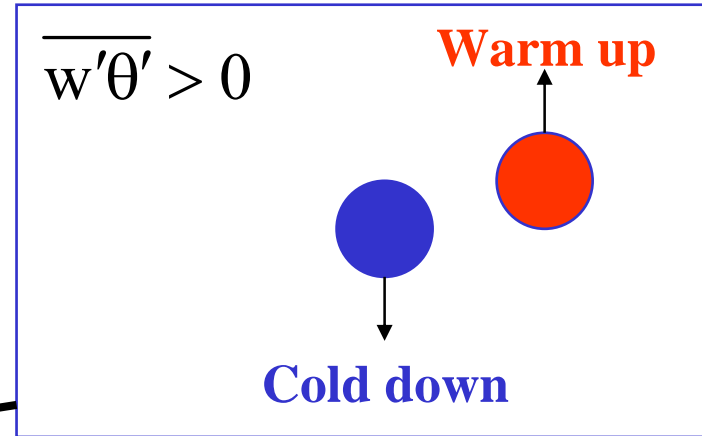
- Wenn Turbulenz durch Windscherung erzeugt wird, versagt die Methode der Flussraten.
- In einer anderen Klasse der Schließung für Behandlung von Entrainment wird die TKE Gleichung verwendet.
- Um warme Luft in die kühlere ML (von oben) einzubringen muss eine Kraft aufgewendet werden, die gegen die Schwerkraft wirkt, die als zurücktreibende (umverteilende) Kraft wirkt.
- Dadurch, dass der Bereich aufsteigender Luft abgesenkt wird, wächst die (verfügbare) Potentielle Energie (PE) in dem System ML/freie Atmosphäre an.
- Die zeitliche Änderungsrate der PE ist gleich dem Integral über die Höhe des negativen Anteils des Auftriebsbewegung. (Siehe Abbildung)



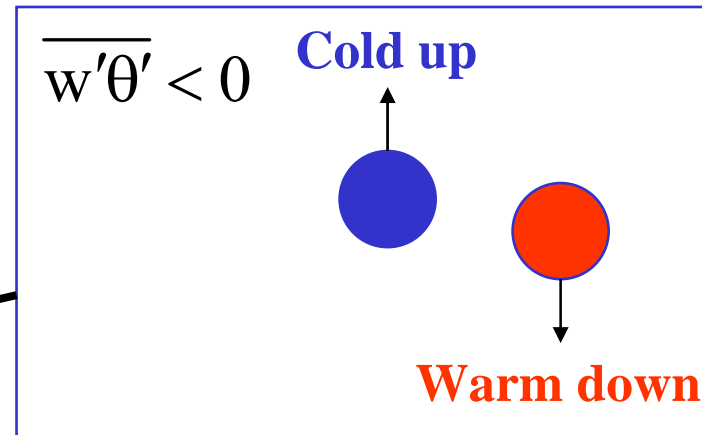
# Auftriebsbewegung und TKE Produktion



Auftriebsbewegung



produziert TKE



verbraucht TKE

## Energetische Methode

- Das Nettoergebnis ist, dass TKE und PE jeweils umgewandelt werden.
- Ein Teil der TKE in der ML wird dazu verwendet die Arbeit zu verrichten die notwendig ist, um die eindringende Luft nach unten zu verfrachten.
- Um die Entrainmentgeschwindigkeit aus diesem Ansatz zu erhalten, muss man mit der TKE-Gleichung (siehe Kap. 5) beginnen und diese über die gesamte Höhe der GS integrieren:



# Energetische Methode

- Die TKE Gleichung ist:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{w'e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \varepsilon$$

klein

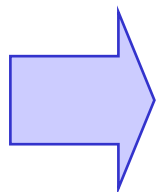
- Integration über die gesamte GS:

wird bei Integration = 0

$$\frac{d}{dt} \int \bar{e} dz = \frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} dz - \int \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{w'p'} \Big|_{z_i} - \int \varepsilon dz$$

wird in der Regel vernachlässigt

Schreibe  $\overline{w'\theta'_v} = \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{production}} + \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{consumption}}$



$$B = \frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{production}} dz + \frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{consumption}} dz$$

$B_P$

$B_N$

$$B = \frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{production}} dz + \frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{consumption}} dz$$

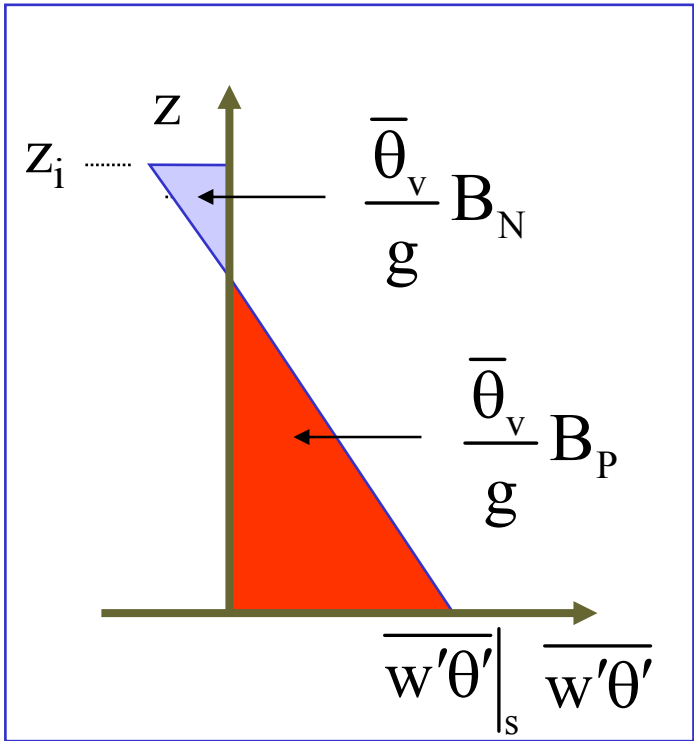
$B_P$  ist der durch Auftrieb verursachte TKE Produktionsterm.

$B_N$  ist der durch Auftrieb verursachte TKE Verbrauchsterm, der in PE umgewandelt wird.

- Wie man die Auftriebsprofile in die Komponenten der Produktion bzw. des Verbrauchs von TKE zerlegt, findet man in Stull (Kap. 11.4.3: Seiten 479-483).  
[Siehe auch: Randall, Buoyant production and consumption of turbulence kinetic energy in cloud-topped mixed layers, J. Atmos. Sci., ab Seite 402, 1984.]
- Um einen Ausdruck für die Entrainmentgeschwindigkeit zu erhalten, muss man weitere Annahmen treffen.
- Erster Annahme: Gleichgewicht!



$$\underbrace{-\frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{consumption}} dz}_{B_N} = \underbrace{\frac{g}{\theta_v} \int \overline{w'\theta'_v} \Big|_{\text{production}} dz}_{B_P}$$



$$- \int \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{w'p'} \Big|_{z_i} - \int \epsilon dz$$

MP  
↑

Schwerewellen  
klein  
Dis

Dieser Term wird parametrisiert durch die Bodenspannung  $u_*$ , oder die Scherung  $\Delta U$  an der Oberkante der ML.

Angenommen, Dis sei proportional zu der gesamten Produktionsrate  $\Rightarrow \propto B_P - MP$

(80% bis 99% der produzierten TKE wird dissipiert.)

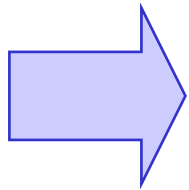


$$-B_N = B_P - MP - Dis$$

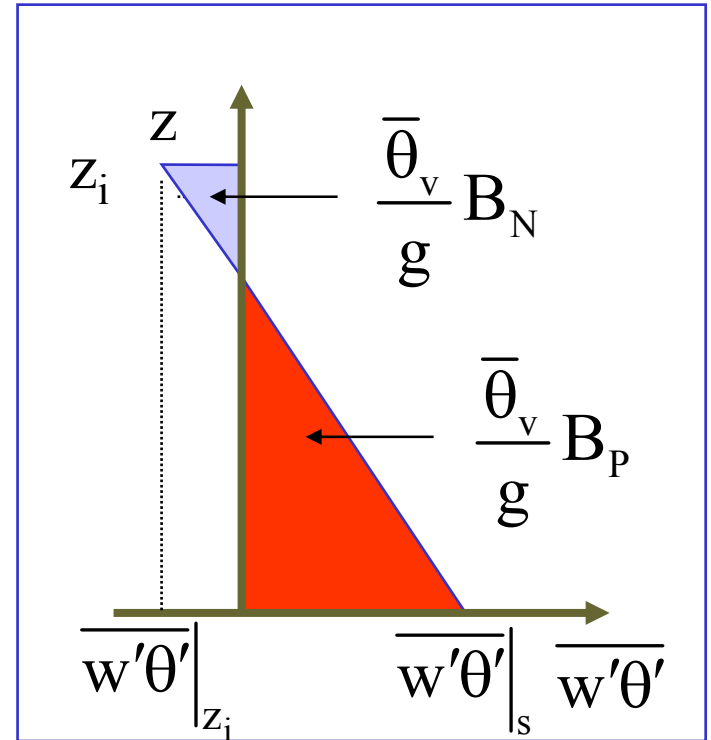


hängt zusammen mit

$$\overline{w'\theta'}\Big|_{z_i} = -w_e \Delta_{EZ} \bar{\theta}_v$$



$$w_e = -\frac{\overline{w'\theta'}\Big|_{z_i}}{\Delta_{EZ} \bar{\theta}_v}$$






- Der Vorteil dieses Produktions-/Verbrauchsansatzes ist, dass er für eine Vielzahl von Situationen verwendet werden kann: freie und angetriebene Konvektion, "gemischte" Konvektion, ML mit Wolken an der Oberkante.
- Wenn Wolken vorhanden sind, sollte die Produktion den Effekt der Strahlungsdivergenz einschließen.

- Beispiel: Wenn die energetische Methode auf eine wolkenfreie ML mit Scherung sowohl am Boden als auch an der Oberkante der ML angewendet wird, kann man folgende Beziehung herleiten (Stull, 1976):

$$w_e = \frac{2 \bar{\theta}_v}{g d_1 \Delta_{EZ} \bar{\theta}_v} \left[ \underbrace{c_1 w_*^3}_{\text{blue}} + \underbrace{c_2 u_*^3}_{\text{red}} + \underbrace{c_3 (\Delta_{EZ} \bar{U})^3}_{\text{olive}} \right]$$

mit  $c_1 = 0.0167$ ,  $c_2 = 0.5$  und  $c_3 = 0.0006$ .

-  Produktion durch Auftrieb,
-  mechanische Produktion am Boden,
-  mechanische Produktion an der Oberkante der ML.

$d_1 =$  Abstand zwischen der Oberkante der ML und der Höhe, in der der Wärmefluss Null ist.  $\Rightarrow$

$$\frac{d_1}{z_i} = \frac{-\overline{w'\theta'_{v z_i}}}{-\overline{w'\theta'_{v z_i}} + \overline{w'\theta'_{v s}}}$$

- Wenn, wie oben, die entsprechenden Annahmen gemacht werden (Spezialfall der freie Konvektion), kann man also recht einfach zeigen, dass sich die energetische Parametrisierung auf ein Verhältnis der verschiedenen Flüsse reduzieren lässt.

## Andere Methoden

- In der Literatur werden viele andere Methoden beschrieben. Die meisten sind von den eben beschriebenen Methoden abgeleitet.
- Die meisten Ansätze wurden mit Beobachtungsdaten ausgetestet; sie ergeben durchaus realistische Ergebnisse innerhalb der Unsicherheitsbereiche der Messungen.
- Das Absinken an der Oberkante der ML ist eine der größten Unsicherheiten; es ist nicht einfach zu messen; es kann die gleiche Größenordnung haben wie die Entrainmentgeschwindigkeit.

## Andere Methoden

- Es gibt eine Reihe von Beispielen für andere Methoden zur Bestimmung der Dicke der ML, die zwar auch getestet wurden, aber in der Anwendung doch nicht gut funktionieren.
- Eine Methode nahm zum Beispiel an, dass die Dicke der ML proportional zur Dicke der Ekman-schicht ist.
- Eine Andere nahm an, dass man die Bulk-Richardson-Zahl mittels der Wind- und Temperaturdifferenzen über die gesamte ML bestimmen kann.



# Beispiel

Gegeben:  $\overline{w'\theta_v'} = 0.2 \text{ K m/s}$ ,  $u_* = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $g/\overline{\theta_v} = 0.0333 \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ,  
 $z_i = 1 \text{ km}$ ,  $\Delta_{EZ}\overline{\theta_v} = 2 \text{ K}$ .

Finde  $w_e$  mittels der

- Methoden der Flussraten,
- energetische Methode (Spezialfall obiger Gleichung).

Lösung:

a)

$$w_e = A_R \frac{\overline{w'\theta_v' s}}{\Delta_{EZ}\overline{\theta_v}} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{2} = 0.0200 \text{ m/s}$$

b)

$$w_e = \frac{2}{(g/\overline{\theta_v}) d_1 \Delta_{EZ}\overline{\theta_v}} \left[ c_1 w_*^3 + c_2 u_*^3 \right] = \frac{30.03}{d_1} [0.1112 + 0.004] = \frac{3.46}{d_1}$$

## Beispiel (Fortsetzung)

Aber

$$d_1 = 1000 \left[ \frac{2 w_e}{0.2 + 2 w_e} \right]$$

Kombination dieser Gleichungen ergibt:

$$w_e^2 = 0.00173 [ 2 w_e + 0.2 ]$$

welche gelöst werden kann:  $w_e = 0.0204 \text{ m s}^{-1}$ .

**Discussion:** We see that the addition of small values of surface stress have little effect on the entrainment rate in a free convection situation, and that the flux ratio method gives essentially the same answer with much fewer computations. For forced convection, however, the flux ratio method fails completely, but the energetics method can be used in the form (neglecting shear at the ML top, and using  $d_1 = z_i$ ):

$$w_e = \frac{2 c_2 u_*^3}{(g/\overline{\theta_v}) z_i \Delta_{EZ} \overline{\theta_v}}$$

# Advektion

- Trotz der großen vertikalen Flüsse und der kraftvollen Turbulenz in einer konvektiv durchmischten Schicht, kann die horizontale Advektion von Luftmassen durch den mittleren Wind ähnlich große Effekte wie die Turbulenz haben. Bei der Advektion werden die Charakteristika (Zustand) der Luftmasse übertragen.
- Die Vernachlässigung der Advektion ist daher für die meisten Simulationen einer realistischen GS unberechtigt!
- Eine Maßzahl für die relative Bedeutung der Turbulenz gegenüber dem mittleren Wind ist die dimensionslose Größe des "konvektiven Abstandes"  $X^{ML}$  (Willis and Deardorff, 1976):

$$X^{ML} = \frac{X}{z_i} \frac{w_*}{U}$$

# Advektion

$$X^{ML} = \frac{x}{z_i} \frac{w_*}{\bar{U}}$$

wobei  $x$  die Entfernung bezeichnet, über die der Horizontalwind wirkt (engl. downwind distance).

- $X^{ML}$  kann aus dem Verhältnis der gemessenen horizontalen Distanz, die ein Luftpaket advehiert wird und der theoretisch ermittelten Entfernung bestimmt werden, die ein Luftvolumen während einer konvektiven Zirkulation (nach oben und nach unten) zurücklegt.
- Für große  $X^{ML}$  ( $\gg 1$ , d.h.  $\bar{U} \ll w_*$ ) dominiert die turbulente Mischung über die durch den horizontalen Wind verursachte Advektion, für kleine  $X^{ML}$  ( $\ll 1$ ) ist die turbulente Mischung weniger wichtig.

- Zusätzlich zur horizontalen Advektion von Impuls, Feuchte, Wärme und Spurengasen, muss man sich auch um die Advektion von  $z_i$  kümmern.
- Letzteres kann man als Maß für die Advektion eines Volumen innerhalb der ML betrachten.
- So kann zum Beispiel eine langsam wachsende, flache (dünne) ML über einer bewässerten Region sehr rasch anwachsen, wenn eine dickere ML in diesen Bereich advehiert wird.
- Die lokale Änderung von  $z_i$  wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = -\bar{u}_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} + w_e + w_L$$

- Die Neigung von  $z_i$  kann erheblich sein und ihre Vernachlässigung kann zu Fehlern bei der Bestimmung der Dicke der ML führen (Lenschow, 1973).
- Für starke Winde und bei abrupten Änderungen der Oberflächenbeschaffenheit, kann die Advektion dominieren und lokal das Wachstum der ML mit der Zeit verhindern.
- Die sich daraus ergebende thermische Struktur der GS, die eine Funktion von  $x$  (downwind distance) ist, wird von Stull ausführlich in Kap. 14 diskutiert (nicht in dieser Vorlesung).

# Absinken und Divergenz

- In einem Feldexperiment hat man zum Beispiel die mittlere Vertikalgeschwindigkeit gemessen; man erhielt Werte von  $-0.22 \text{ m s}^{-1}$  (Absinken) bis  $0.27 \text{ m s}^{-1}$  (aufwärts gerichtete Bewegung). (Vachalek et al., 1988)
- Diese Werte sind im Vergleich mit der Entrainmentgeschwindigkeit sehr groß; die großräumige Vertikalbewegung kann somit nicht vernachlässigt werden.
- Unglücklicherweise ist das Absinken am Oberrand der ML nur sehr schwer zu messen.
- So sind zum Beispiel die Fehlerwerte von Geschwindigkeitsmessungen vom Flugzeug aus oft größer, als die eigentlichen Werte, die das Absinken beschreiben.

# Absinken und Divergenz

- Oft sind die mittleren Werte der Vertikalgeschwindigkeit unterhalb des Auflösungsbereichs der Messgeräte (z.B. Fernerkundung mit Dopplersensoren zur Messung von Geschwindigkeitsdifferenzen).
- Das Absinken von Rauch, Feuchte oder stabilen Schichten kann zwar verfolgt werden; in der Regel wird diese Bewegung aber auch durch die horizontale Advektion beeinflusst, über die aber häufig nichts bekannt ist.
- Ebenso kann das Nachverfolgen von angehobenen Schichten eigentlich nur dann erfolgen, wenn diese Schichten in der freien Atmosphäre oberhalb der ML zu finden sind und sie nicht durch das Anwachsen der ML beeinflusst sind.



# Absinken und Divergenz

- Alternativ kann man die mittlere Vertikalbewegung in der Höhe  $z_i$  abschätzen, wenn die Divergenz als Funktion der Höhe in der ML kennt:

$$w_L(z_i) = - \int_0^{z_i} \nabla \cdot \mathbf{u} dz$$

- Für den Fall, dass die Divergenz mit der Höhe konstant ist, ergibt sich:

$$w_L(z_i) = -(\nabla \cdot \mathbf{u})z_i$$

- Dieser Ausdruck wird häufig verwendet, da keine besseren Informationen (Daten) vorhanden sind.
- Horizontale Divergenz ist nicht einfach zu messen.
- Theoretisch muss man die Geschwindigkeiten senkrecht zu einer bestimmten horizontalen Fläche messen und diese Messungen müssen im Prinzip an jedem Punkt innerhalb dieser Region durchgeführt werden. Wenn man ein Netzwerk von Stationen hat, die nicht zu weit auseinander liegen ("meso-network"), kann man die Divergenz nahe der Oberfläche abschätzen, vorausgesetzt, dass die Oberflächeneigenschaften die Windgeschwindigkeiten nicht all zu sehr beeinflussen.

- Je weiter die Stationen auseinander liegen, desto ungenauer wird die Bestimmung der Divergenz.
- Auf der anderen Seite kann ein zu dichtes Messnetz dazu führen, dass die Differenzen der Horizontalgeschwindigkeiten zu klein werden, um sie aufzulösen.

- Man kann auch ein Netzwerk von Radiosonden (an Ballonen) verwenden, um die Divergenz zu bestimmen (Bellamy Methode); hierbei kann zum einen die unterschiedliche Genauigkeit der Sonden, die Kalibration der Sonden untereinander und natürlich auch zu große Entfernungen der einzelnen Sonden die Divergenzberechnungen beeinflussen.
- So fanden zum Beispiel Vachalek et al. (1988), dass die Integration der aus den Radiosonden bestimmten Divergenzen über die Höhe der ML die besten Ergebnisse ergibt und zur Bestimmung der Divergenzen am Boden ein bodengestütztes Messnetz (meso-network) am besten geeignet ist.
- Fluktuationen der Divergenz verschiedener horizontaler und zeitlicher Skalen sind in der Regel einander überlagert.

- Divergenzfluktuationen auf kleineren räumlichen Skalen scheinen dabei größere Amplituden (bis zu einem Faktor 100) und kleinere Zeitskalen (kürzere Lebensdauer) zu haben, als Divergenzfluktuationen über größere Areale.
- Beispiel: Für eine Region mit einem Durchmesser von 5 km fand man Divergenzen in einer Größenordnung von  $10^{-4}$  bis  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , während für Regionen mit einem Durchmesser von 100 km Werte von  $10^{-5}$  bis  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$  ermittelt wurden.

(Siehe auch Abbildung 11.34 in Stull.)

- Kurzzeitige Ereignisse einer Divergenzänderung ( $\leq 1$  Stunde) sind etwa 10-mal häufiger als lang andauernde Divergenzänderungen. Etwa 95% aller "Divergenzereignisse" dauern weniger als 8 Stunden an.
- Dies bedeutet, dass Divergenzen und Absinken, die aus einem großskaligen Messnetz (= große Abstände zwischen den einzelnen Instrumenten) ermittelt wurden, keine kurzperiodischen Variationen mit großer Amplitude zeigen werden. Man kann daher auch mit ihnen kaum das Absinken oberhalb eines bestimmten Punktes zu einem bestimmten Zeitpunkt bestimmen.



**Ende Kapitel 11**

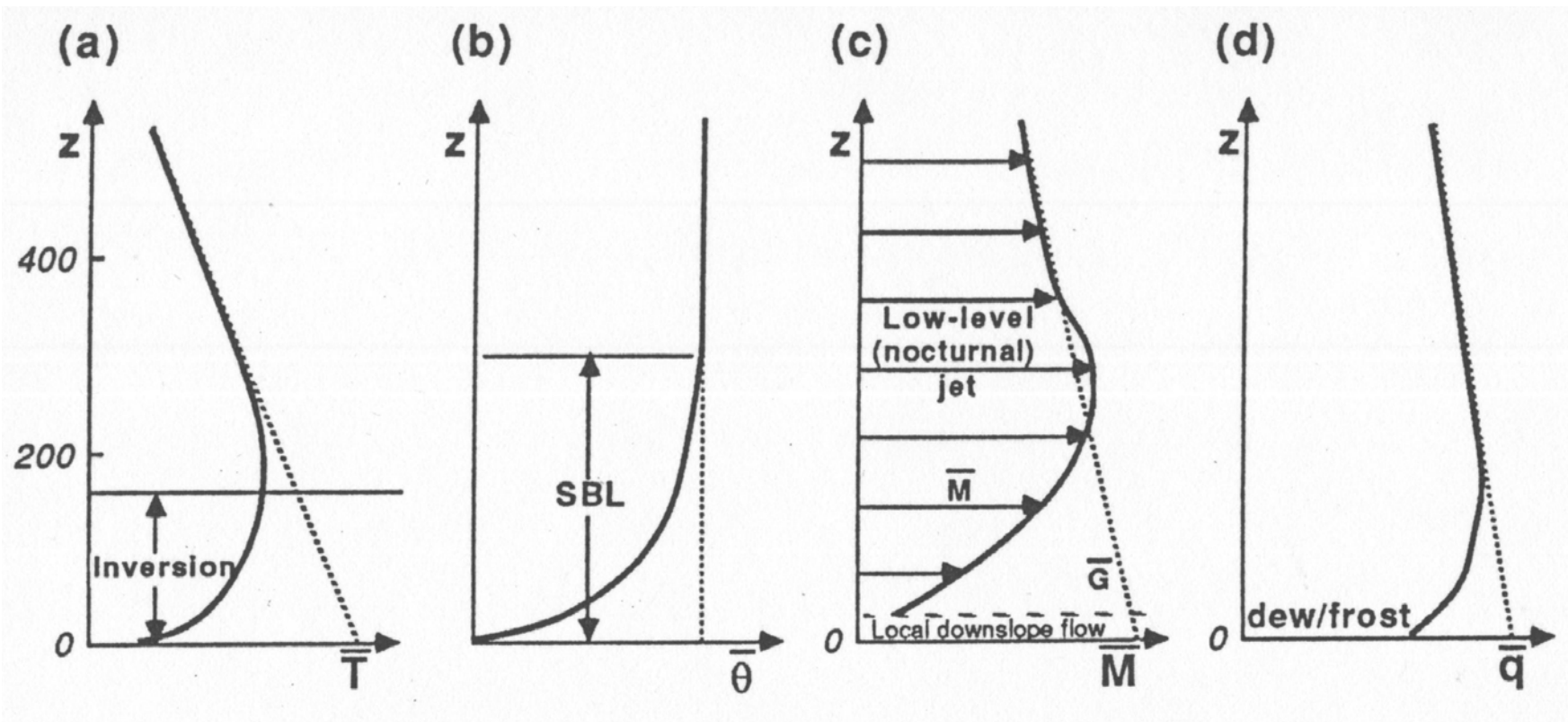
# Kapitel 12: Stabile Grenzschicht





# Stabile Grenzschicht

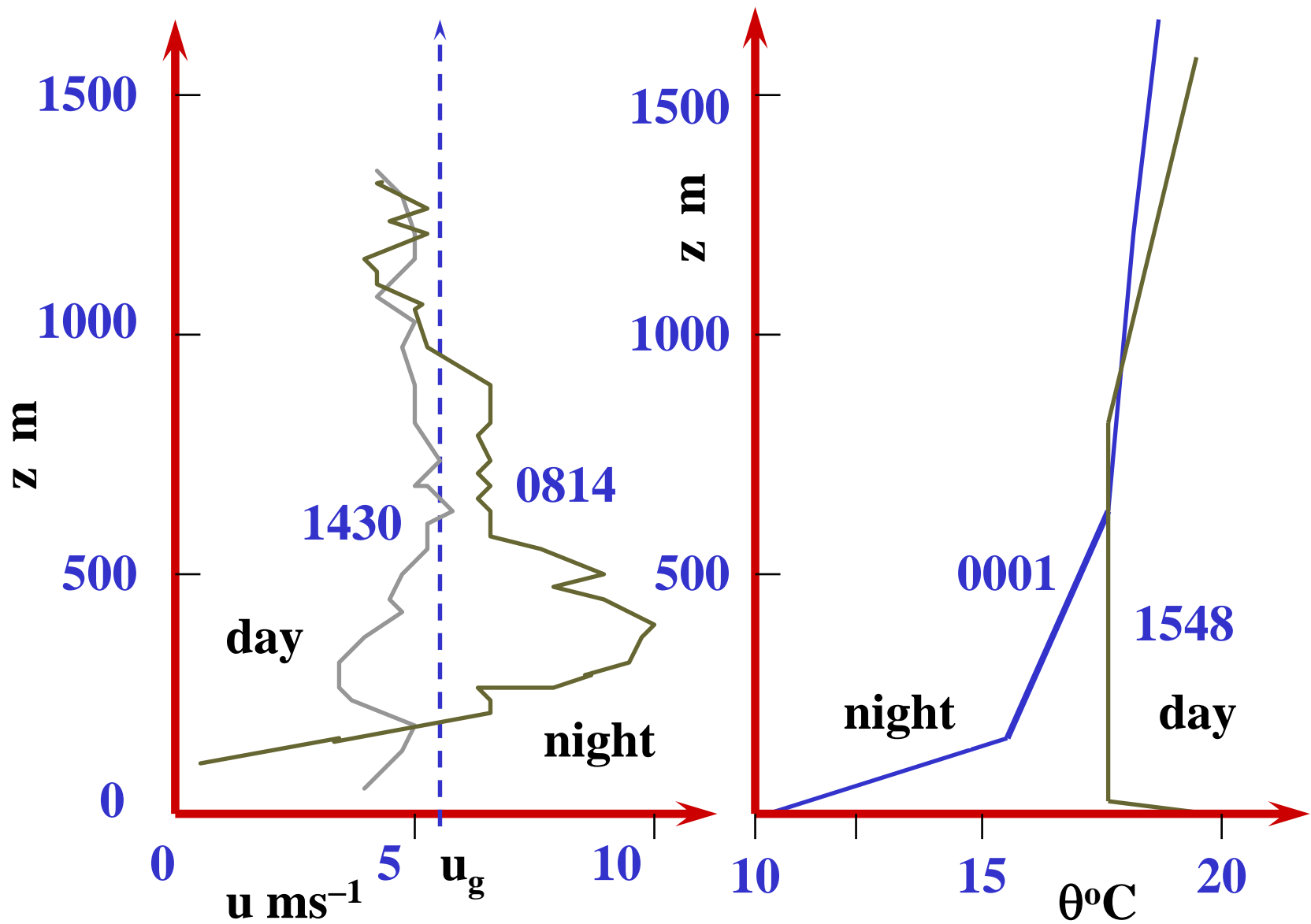
- Die Grenzschicht (GS) ist immer dann stabil geschichtet, wenn die Oberfläche kälter ist als die darüberliegende Luft.
- Die stabile Grenzschicht (engl. stable boundary layer, SBL) bildet sich oft in der Nacht über Landflächen ⇒ nächtliche Grenzschicht (engl. nocturnal boundary layer, NBL).
- Sie kann sich auch bilden durch die Advektion von wärmerer Luft über einen kälteren Boden.
- Das Gleichgewicht zwischen mechanischer Anregung von Turbulenz und Dämpfung variiert durch den Grad der Stabilität von Fall zu Fall. Dies führt dazu, dass eine stabile GS sowohl gut durchmischt (d.h. turbulent) als auch ruhig (d.h. nicht turbulent) sein kann.
- Deshalb ist in der stabilen GS das Auftreten von Turbulenz sporadisch und unregelmäßig.



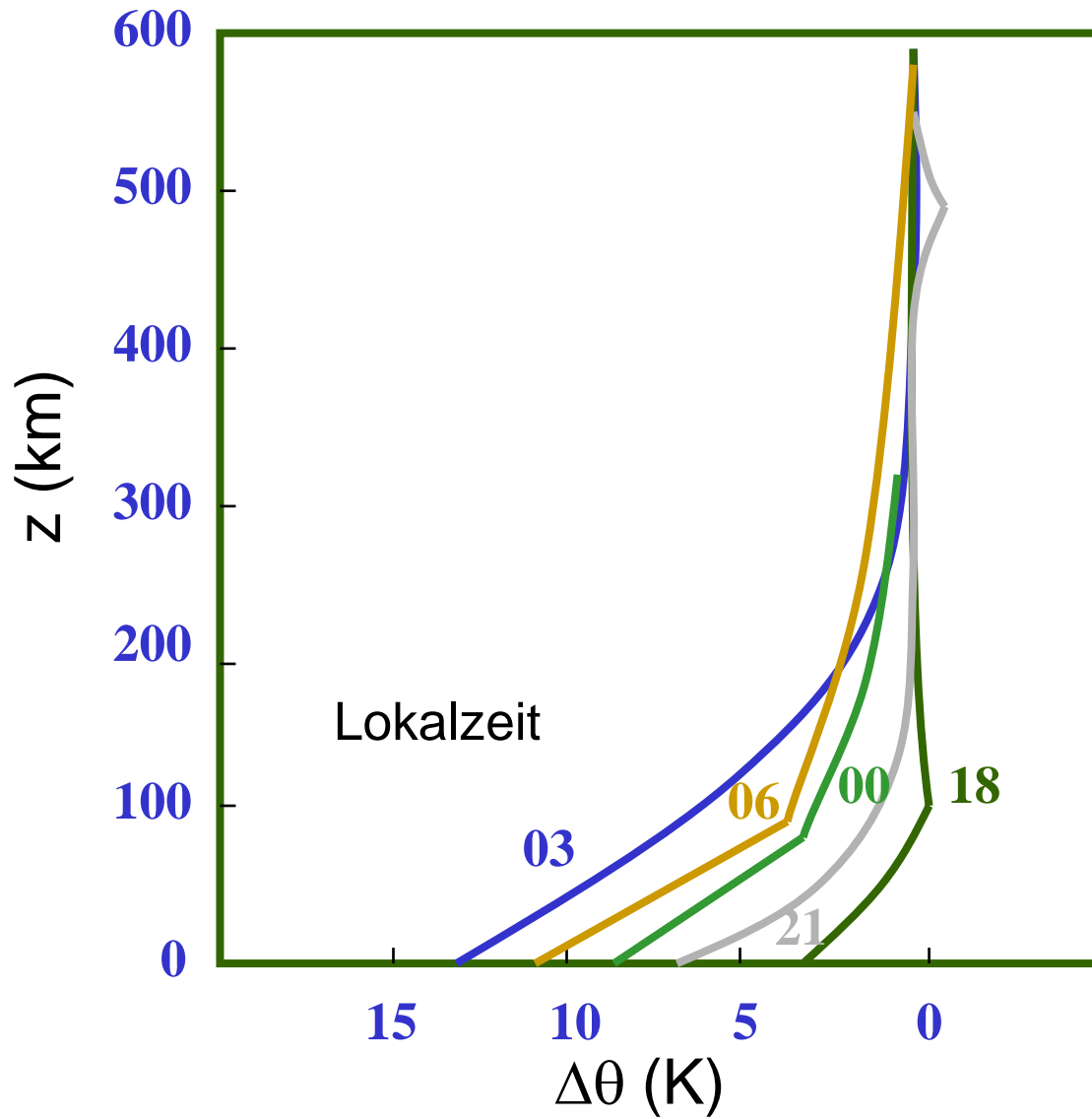
Diese Abbildung zeigt typische Profile von mittleren Variablen in der stabilen Grenzschicht für den Fall einer schwachen turbulenten Mischung. Größte statische Stabilität wird in Bodennähe gefunden; die statische Stabilität nimmt mit der Höhe ab, bis neutrale Stabilität erreicht wird (Oberkante der stabilen Grenzschicht).

# Nächtlicher Windjet in der SBL

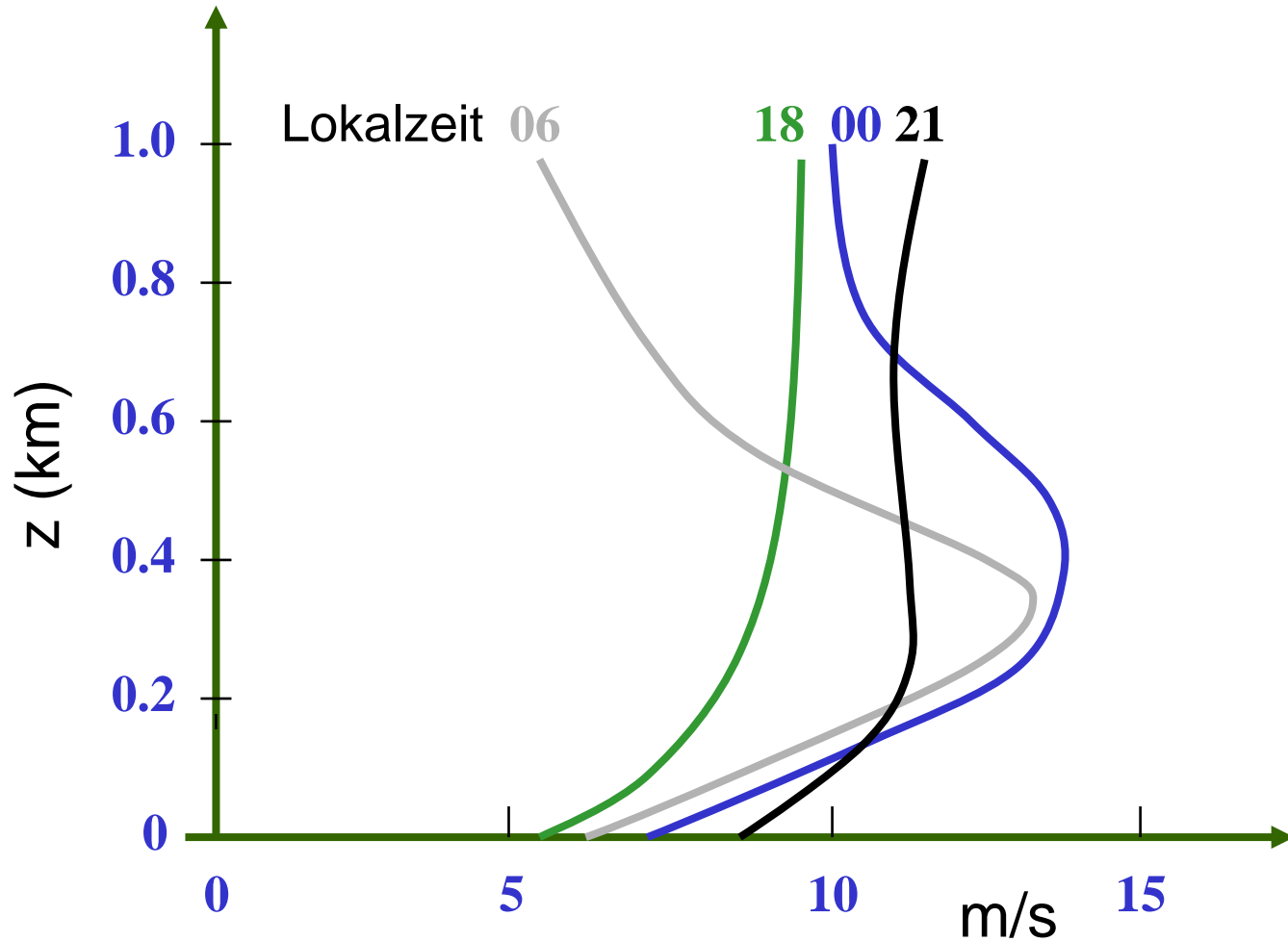
- Wie schon am Ende von Kapitel 1 beschrieben, existiert in der SBL ein nächtlicher Windjet (engl. the low-level jet, LLJ); in Höhen von 100 bis 300 m (bis 900 m) über Grund werden in einer dünnen Schicht maximale Windgeschwindigkeiten von 10 bis 20  $\text{ms}^{-1}$  (sogar bis 30  $\text{ms}^{-1}$ ) erreicht.
- Dieser LLJ kann eine Breite von einigen hundert Kilometern aufweisen und eine Länge von einigen tausend Kilometern.
- In den meisten Fällen bildet sich der LLJ während der Nacht und erreicht maximale Windgeschwindigkeiten in der Morgendämmerung.
- Der LLJ wird oft als "nächtlicher" (engl. nocturnal) Jet bezeichnet.



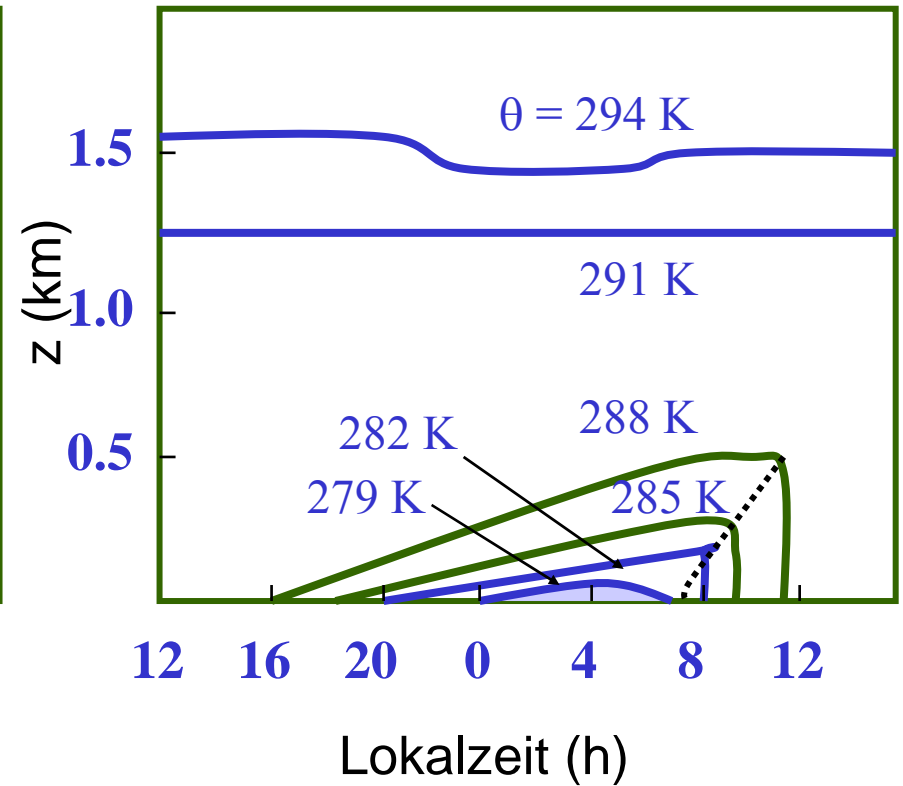
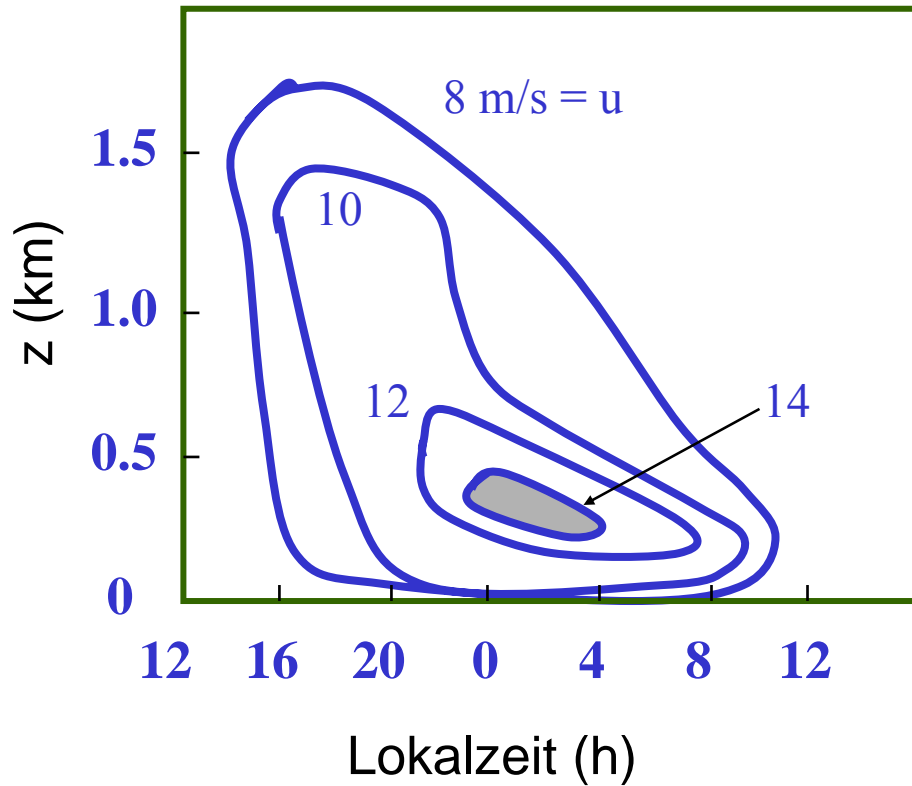
Windprofil ( $u$ ) in Richtung des geostrophischen Windes ( $u_g$ ); es zeigt sich deutlich ein LLJ in der Nacht, verglichen mit dem Profil am Vortag.



Beispiel für die Entwicklung einer stabilen nächtlichen Grenzschicht.



Beispiel für die Entwicklung eines nächtlichen Jets in der SBL.



Beispiel für die Entwicklung der nächtlichen SBL.

# Eine einfache Theorie für den nächtlichen LLJ

- Am Tage sind die Winde in der ML aufgrund der starken Reibungskräfte am Erdboden subgeostrophisch. Bei Sonnenuntergang, wenn die Turbulenz in der ML endet, tendieren die Druckgradienten dazu, den Wind auf geostrophische Werte zu beschleunigen. Aber die Corioliskraft induziert eine Trägheitsoszillation (engl. inertial oscillation\*) die dazu führt, dass im Verlaufe der Nacht die Winde auf supergeostrophische Werte beschleunigt werden.

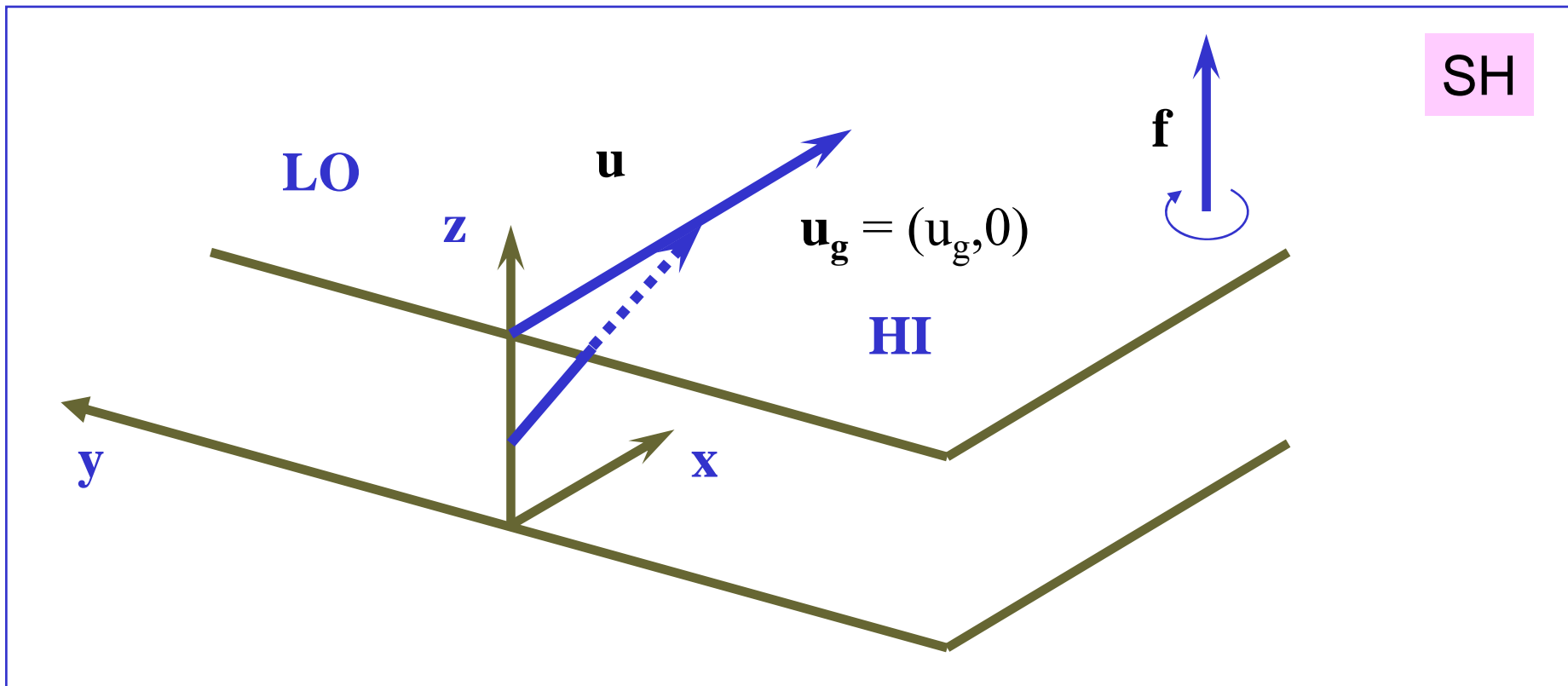
---

\* periodische Bewegung, bei der die Trägheit eines Fluids ausschließlich durch die Corioliskraft balanciert wird. Die Periode der Trägheitsoszillation ist  $2\pi/f$ , wobei  $f$  der Coriolisparameter ist.



# Eine einfache Theorie für den nächtlichen LLJ

- Diskussion dieser Oszillation: Betrachte eine homogene Schicht nicht-viskoser Fluide, begrenzt durch starre horizontale Ränder.



# Mathematische Formulierung

Der Startpunkt für die Analyse sind die Impulsgleichungen (Kap. 3) für die Grenzschicht. Der Einfachheit halber wird wieder angenommen, dass  $v_g = 0$  ist.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\mu u$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = fu_g - \mu v$$

$\mu$  ist die dynamische Viskosität.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\mu u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = fu_g - \mu v$$

Tag

Gleichgewicht  $\left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0$

$$-fv = -\mu u$$

$$fu = fu_g - \mu v$$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{f}$$

$$u = \frac{u_g}{1 + \varepsilon^2}, \quad v = \frac{\varepsilon u_g}{1 + \varepsilon^2}, \quad |u| = \frac{u_g}{1 + \varepsilon^2}$$

Nacht

Keine Reibung  $\mu = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -fu_g$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) (u, v) = f^2 (u_g, 0)$$

Tag

$$v = \varepsilon u$$

$$u = u_g - \varepsilon v$$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{f}$$

$$u = \frac{u_g}{1 + \varepsilon^2}, \quad v = \frac{\varepsilon u_g}{1 + \varepsilon^2}, \quad |u| = \frac{u_g}{1 + \varepsilon^2}$$

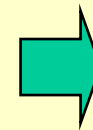
Nacht

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) (u, v) = f^2 (u_g, 0)$$

$$u = u_g + A \cos ft + B \sin ft$$

$$u = C \cos ft + D \sin ft$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0$$



$$B = C$$

$$D = -A$$

t = 0

$$u = \frac{u_g}{1 + \varepsilon^2}$$

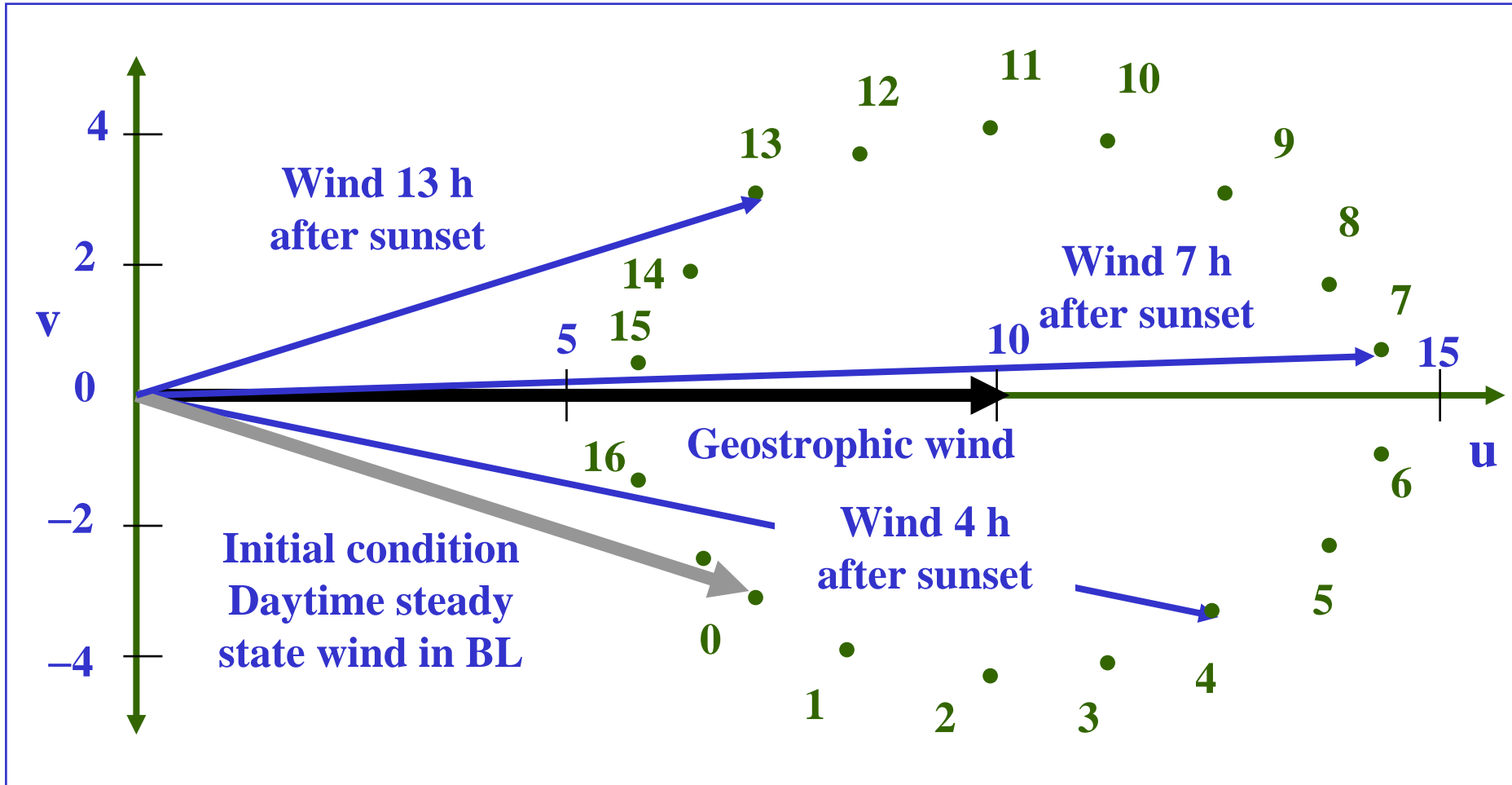
$$v = \frac{\varepsilon u_g}{1 + \varepsilon^2}$$



$$u = u_g + \frac{\varepsilon u_g}{1 + \varepsilon^2} (-\varepsilon \cos ft + \sin ft)$$

$$v = -\frac{\varepsilon u_g}{1 + \varepsilon^2} (\cos ft + \varepsilon \sin ft)$$

# Verhalten des LLJ



Südhemisphäre

Man erkennt, dass der aktuelle Wind um den Wert für den geostrophischen Wind herum oszilliert und nie (in diesem idealisierten Szenario) gegen den geostrophischen Wert konvergiert. Die Periode der Oszillation wird Trägheitsperiode (engl. inertial period; siehe oben) genannt.

*Q. J. R. Meteorol. Soc.* (1995), **121**, pp. 987–1003

## The Australian nocturnal jet and diurnal variations of boundary-layer winds over Mt. Isa in north-eastern Australia

By PETER T. MAY\*

*Bureau of Meteorology Research Centre, Australia*

(Received 28 October 1993; revised 28 October 1994)

### SUMMARY

An analysis of radiosonde data shows the nocturnal boundary-layer jet over Australia to be continental in scale. The detailed temporal development of the jet is described using two years of boundary-layer wind-profiler data from Mt. Isa in north-eastern Australia. A distinct isallobaric wind is found, which has a spectral peak near the inertial period. This is associated with the diurnal pressure-oscillation and developments in the heat low over central and western Australia. However, it is not important for the development of the nocturnal jet. The nocturnal jet begins as a shallow disturbance and grows through the night. Most of the year the wind maximum is at about 500 m above the ground and has a well-defined jet-profile. In the summer-monsoon season the vertical extent of the wind maximum increases, but has weaker vertical shear. The jet results from an inertial response, but is affected by other processes. The amplitude of the jet is less than would be expected from a straightforward response to the daytime ageostrophic flow and there is super-inertial rotation and damping of the wind vector late in the night.



**Ende Kapitel 12**



# Kapitel 13: Wolken in der Grenzschicht



# Wolken in der Grenzschicht

- Wolken können sich an der Oberkante der ML und an der Unterkante der stabilen GS bilden.
- Wichtig: Kurz- und langwellige Strahlungsflüsse (Größe und Verteilung) in der GS werden durch Wolken verändert! Somit haben Wolken einen großen Einfluss auf die Struktur der GS.
- Im Zusammenhang mit Klimaänderungsvorgängen ist dies ein wichtiger Einflussfaktor.

# Wolken in der Grenzschicht

- Es gibt drei Typen von GS-Wolken, die an der Oberkante der GS durch die Inversion (engl. capping inversion) entstehen (engl. cloud-topped boundary layer: CTBL):
  1. Schönwetter Cumulus (shallow cumulus).
  2. Stratocumulus.
  3. Stratus.
- Zusätzlich gibt es Nebel in den unteren Bereichen der GS.

# Nebel

- Nebel ist eine Wolke, die mit dem Boden Kontakt hat. (Hier schließen wir der Einfachheit halber Wolken aus, die im Kontakt mit Hügeln oder Bergen stehen.)
- In der Nacht kann sich Nebel als Konsequenz der strahlungsbedingten Auskühlung des Erdbodens bilden.
- Wärme geht strahlungsbedingt verloren und wird nach unten (Richtung Erdboden) durch windinduzierte Turbulenz diffundiert. Wenn die Luft nahe dem Boden unter den Taupunkt abgekühlt wird, kondensiert das Wasser zuerst in Bodennähe und dann in höheren Schichten.
- Deshalb ist der Nebel am Boden am dichtesten und der Wolkenwassergehalt nimmt mit der Höhe rapide ab.

# Nebel

- Wenn die Dicke der Nebelschicht bei Sonnenaufgang nur einige wenige Meter beträgt, wird diese erhalten bleiben, bis durch die Absorption von Sonnenlicht am Erdboden und in der Wolke (Nebel) die Temperatur ansteigt und die Wolke verdampft.
- Dünne Nebelschichten dieser Art sind nicht konvektiv, da die Kühlung von unten her geschieht.
- Wenn dagegen der Nebel optisch dick genug ist (Dicke der Nebelschicht von mehr als 5-10 Meter), entsteht ein gut definierter Übergangsbereich an der Oberkante der Nebelschicht: Es gibt eine größere Strahlungsflussdivergenz in der Nähe der Oberkante als an der Unterkante. Die Kühlung an der Oberkante generiert kalte Luftmassen die Absinken und es kommt zur konvektiven Durchmischung der Nebelschicht.

# Nebel

- Nebel absorbiert in der Regel infrarote (langwellige Wärme-) Strahlung in erheblichem Umfang.
- Eine Nebelbank mit einer Dicke von 100 m ist quasi lichtundurchlässig.
- Solche Wolken blockieren die infrarote Abstrahlung von der Oberfläche und verhindern die weitere Abkühlung des Bodens.
- Gleichzeitig führen starke Divergenzen der Infrarotstrahlungsflüsse an der Oberkante der Nebelschicht dort zu einer deutlichen Abkühlung, die die Nebelschicht ihrerseits destabilisieren.
- Der Nebel steigt auf und es bildet sich eine mit Wolken gefüllte ML ähnlich wie in einer trockenen konvektiv durchmischten GS.

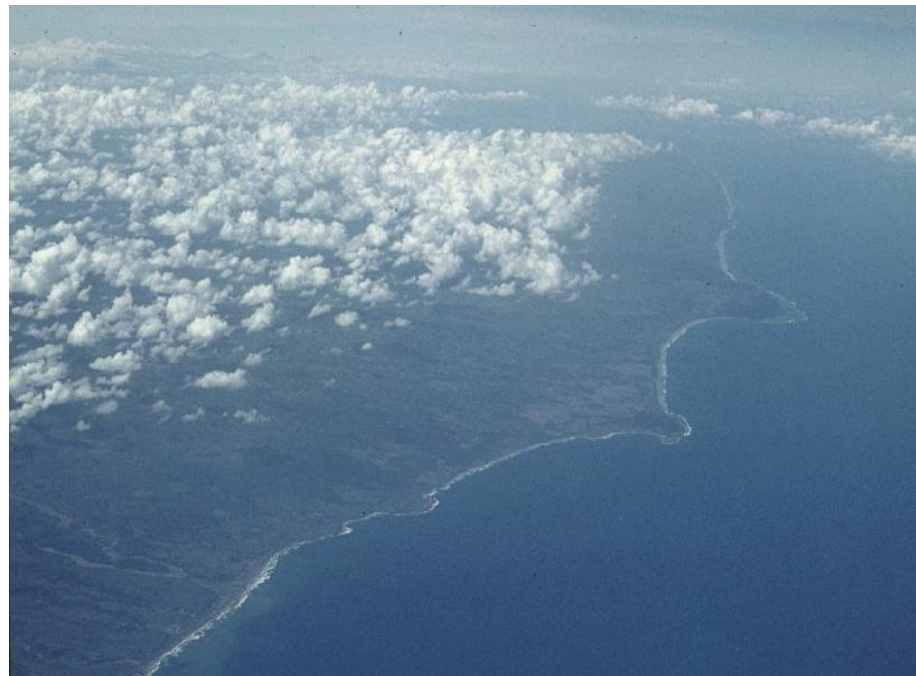
# Komplikationen durch Wolken in der GS

- Strahlungsflüsse und Phasenumwandlungen spielen eine sehr bedeutende Rolle. Viele der zuvor gezeigten "repräsentativen" mittleren, typischen Profile von Variablen in der GS ändern sich deutlich.
- In einer trockenen GS werden die turbulenten Strukturen, die mittleren Variablen sowie deren zeitliche Entwicklung durch großskalige, externe Bedingungen und die Bodenflüsse kontrolliert.
- In einer mit Wolken bedeckten GS können die Bodenflüsse wichtig sein, aber Strahlungsflüsse produzieren lokal Wärme- und Kältequellen im Inneren der GS, was die turbulenten Strukturen und die Dynamik der GS stark beeinflussen kann.

# Wolken in der Grenzschicht

- Der Gleichgewichtszustand der CTBL wird also durch konkurrierende Prozesse bestimmt: strahlungsbedingte Auskühlung, Eindringen von wärmerer und trockenerer Luft aus Höhen oberhalb der Wolke, großskalige Divergenz und turbulente Flüsse.
- Die CTBL kann als eine turbulente Region identifiziert werden, in der sich Ensemble von Stratus, Stratocumulus und Cumulus Wolken aufhalten
- Sie ist eine Region, die das Wetter der unteren Atmosphäre und auch das Klima in vielen Regionen der Erde bestimmt; sie ist eine sehr wichtige Komponente im Klimasystem.





# Stratocumulus





# Wolkenstrassen



# Wolkenstrassen



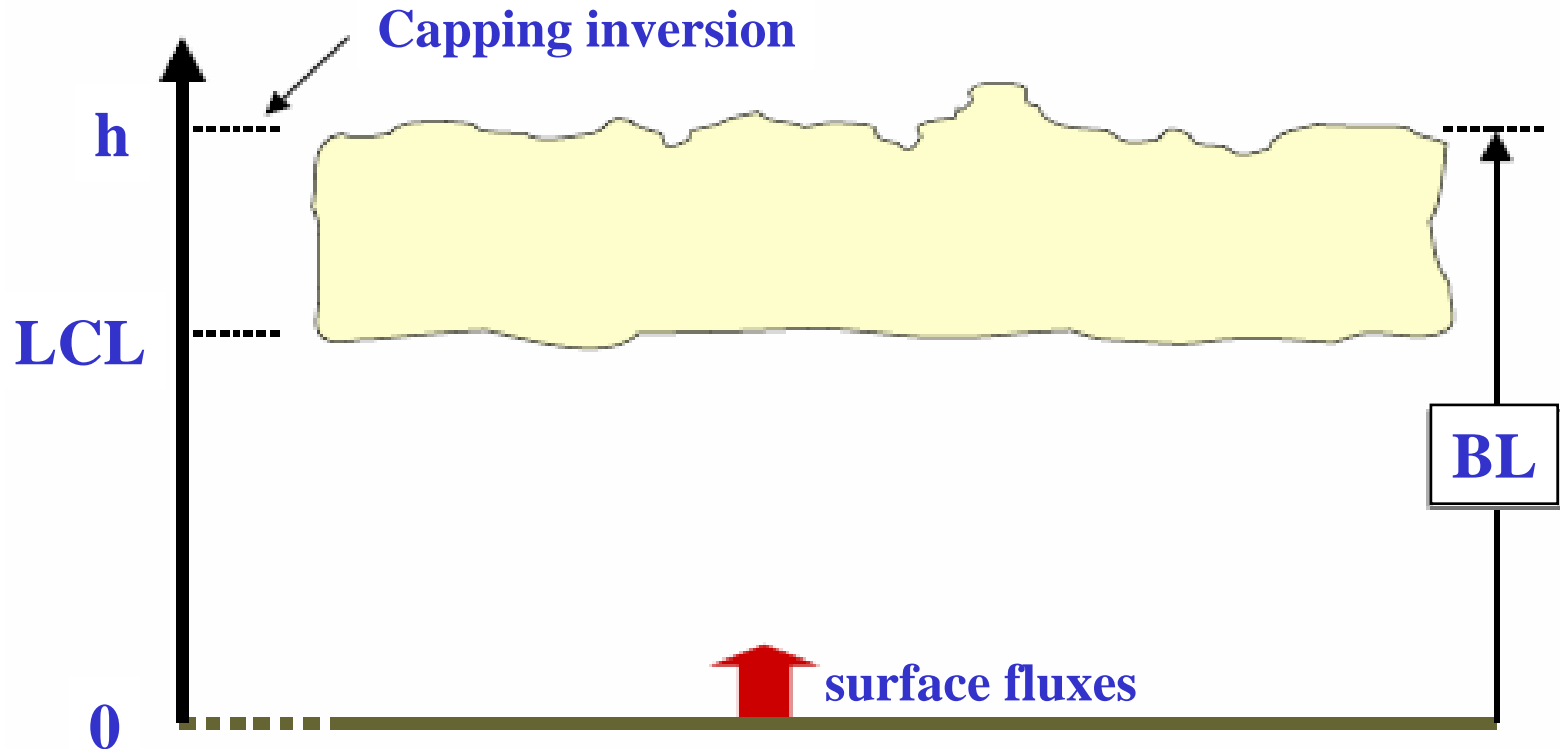
# Wolken in der Grenzschicht

- Stratuswolken (Stratus) treten in der Regel in tieferen Schichten der GS auf als Stratocumuluswolken.
- Die Bildung von Stratus kann als Nebel in tiefen Schichten beginnen, der sich dann stetig zu einer angehobenen Wolkenschicht (Hochnebel) entwickelt, mit einer Dicke von einigen zehn Metern bis zu einigen hundert Metern.
- Es handelt sich meistens um eine sehr "einheitliche" Wolkenschicht, die an der Oberkante einige Wellenbewegungen aufweist.
- Bei Stratocumulus handelt es sich meistens um angehobene Wolkenschichten nahe der Oberkante der GS.
- Die Dicke kann bis zu einigen hundert Metern betragen; sie haben eine ausgeprägte Zellenstruktur mit konvektiven Bewegungen innerhalb der Wolke.

# Wolken in der Grenzschicht

- Stratocumuluswolken sind konvektiv angetrieben, vor allem durch die Erzeugung von Abtrieb (neg. Auftrieb) durch strahlungsbedingte Abkühlung in der Nähe der Wolkenoberkante.
- Stratuswolken können auch durch Konvektion angetrieben werden (wie die Stratocumuluswolken) oder sie sind durch starke Winde bzw. große vertikale Windscherung verursacht.
- Es sind 3 grundverschiedene Situationen von Wolken in der Grenzschicht möglich:

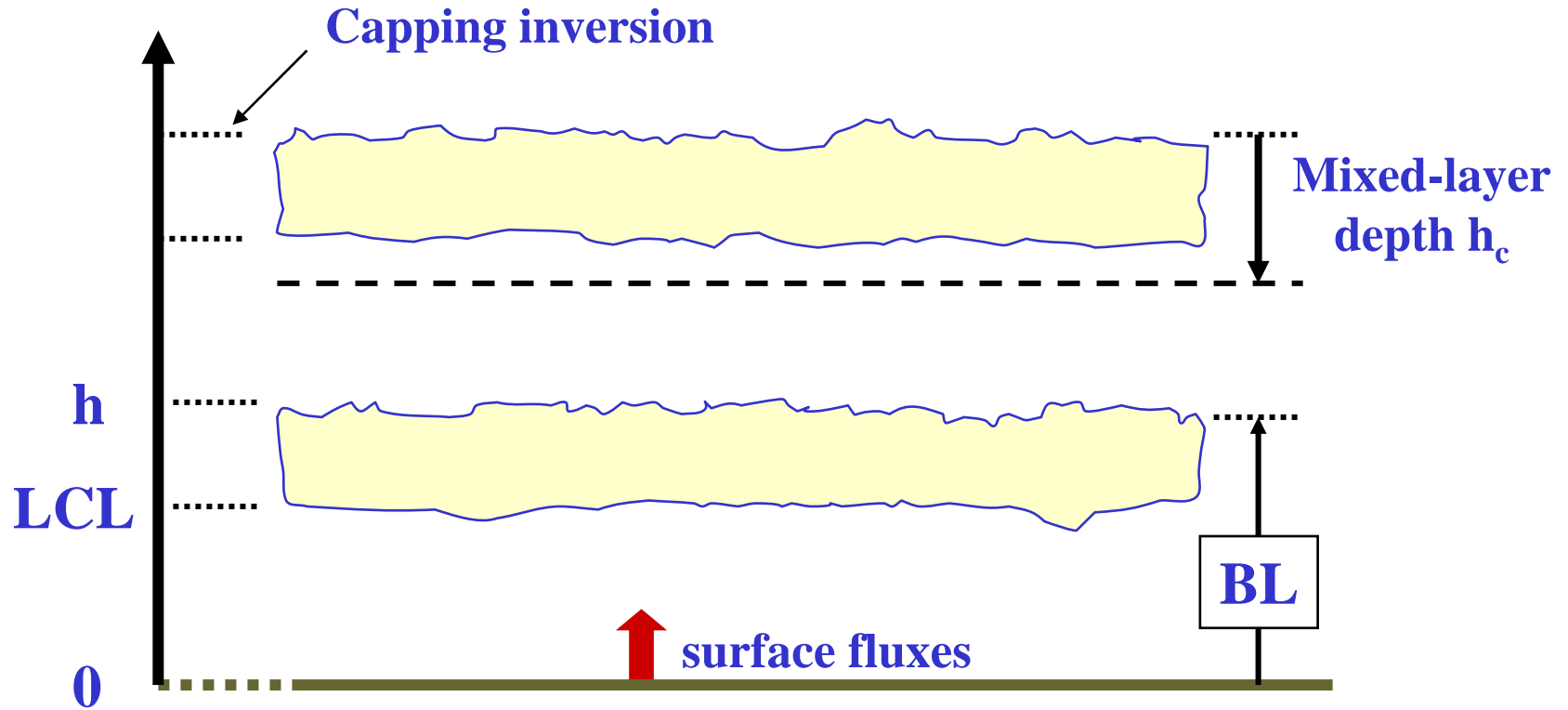
# 1. Wolke an der Oberkante der GS



Schematische Darstellung einer CTBL: Voll gekoppeltes System mit einer gut durchmischten Schicht vom Erdboden bis zur Wolkenoberkante.

(LCL: Lifting Condensation Level)

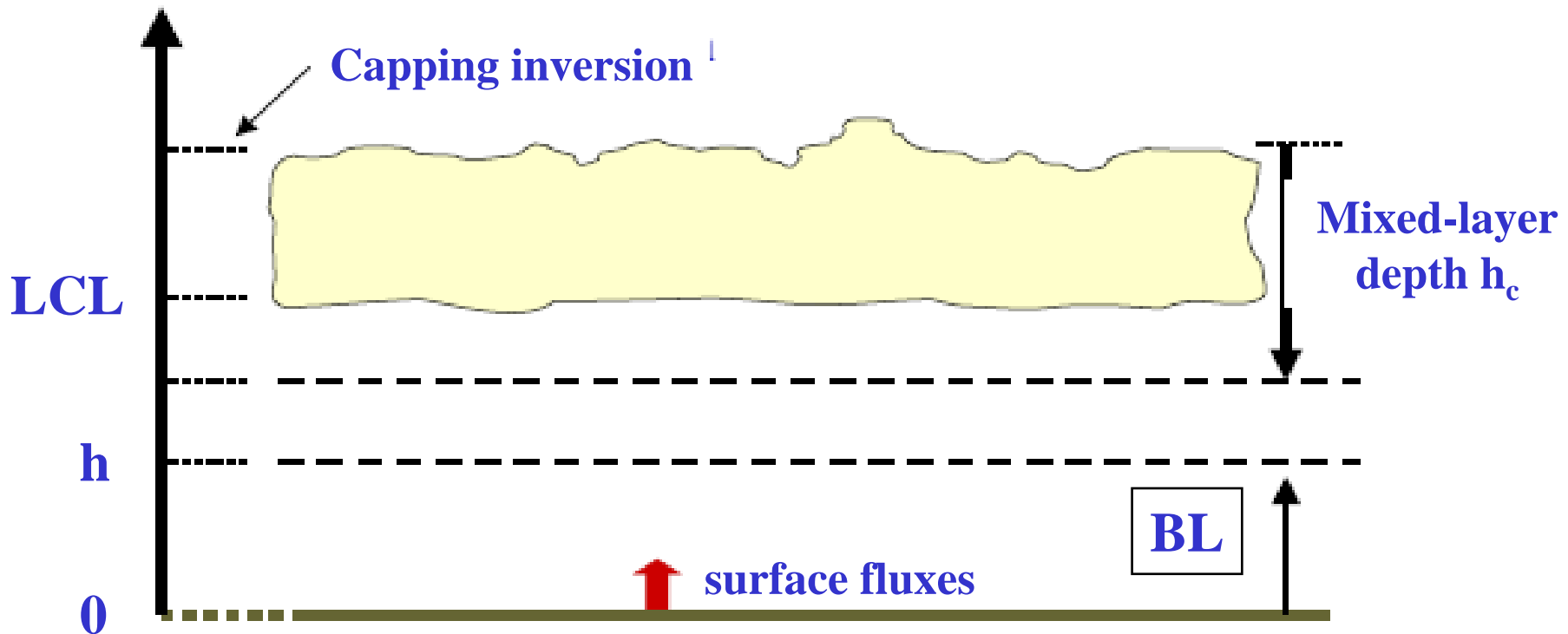
## 2. Weitere Wolke oberhalb der GS



Schematische Darstellung einer CTBL: Zwei Wolken­schichten unterhalb der Inversion, mit einer gut durchmischten Schicht der Höhe  $h$  und einer angehobenen Mischungsschicht der Höhe  $h_c$  (teilweise gekoppeltes System).



### 3. Wolke oberhalb einer wolkenfreien GS



Schematische Darstellung einer CTBL: Entkoppeltes System mit nur einer Wolkenschicht, mit schwachen Bodenflüssen und einer angehobenen Mischungsschicht der Höhe  $h_c$ .

# Derzeitiges Verständnis physikalischer Prozesse

- Sowohl Beobachtungen als auch Modellstudien legen nahe, dass für die Bildung, Erhaltung sowie Dissipation von Grenzschichtwolken eine Reihe von Prozessen wichtig sind.
- Die innere Struktur einer CTBL hängt stark von den dominierenden Mechanismen ab, die für die Erzeugung von Turbulenz verantwortlich sind:
- Möglichkeiten sind:
  - konvektiv, entweder durch strahlungsbedingte Kühlung an der Oberkante der Wolke oder Heizung am Boden;
  - mechanisch, durch Scherung (Spannung) am Boden oder an der Wolkenoberkante.

# Derzeitiges Verständnis physikalischer Prozesse

- Strahlungsflüsse werden durch Wolken verändert und produzieren so lokal Wärmequellen (Erwärmung) bzw. -senken (Abkühlung), was die turbulenten Strukturen in der GS beeinflusst.
- Generell wird angenommen, dass sich die Kühlung durch langwellige (Ab-) Strahlung (IR) in der Regel nur über die ersten 50 Meter unterhalb der Oberkante eines Stratocumulus erstreckt, die solare (kurzwellige) Heizung, sich aber tiefer in die Wolkenschicht erstreckt.
- Ein Haupteffekt der strahlungsbedingten Abkühlung ist die Erzeugung von einem nach oben gerichteten Fluss (Auftrieb) über die GS hinaus, der seinerseits zu einem "Entrainment" an der Oberkante der Wolke führt.

# Derzeitiges Verständnis physikalischer Prozesse

- Dieser "Eintrag" von oben bringt wärmere und trockenere Luft in die GS (und in die Wolke!), was im Weiteren die Verdunstung von Wolkentröpfchen und damit eine Abkühlung fördert.
- Unter bestimmten Umständen kann dieses Abkühlen (durch Verdunstung) zu Instabilitäten führen, bei dem die Wolkenteilchen weiter abkühlen, einen "negativen Auftrieb" erfahren und durch die Wolken hindurch absinken. Dies kann den Eintrag von Luftmassen aus Bereichen oberhalb der GS erhöhen und somit zu dem Zerfall einer sonst stabilen Wolkendecke führen.

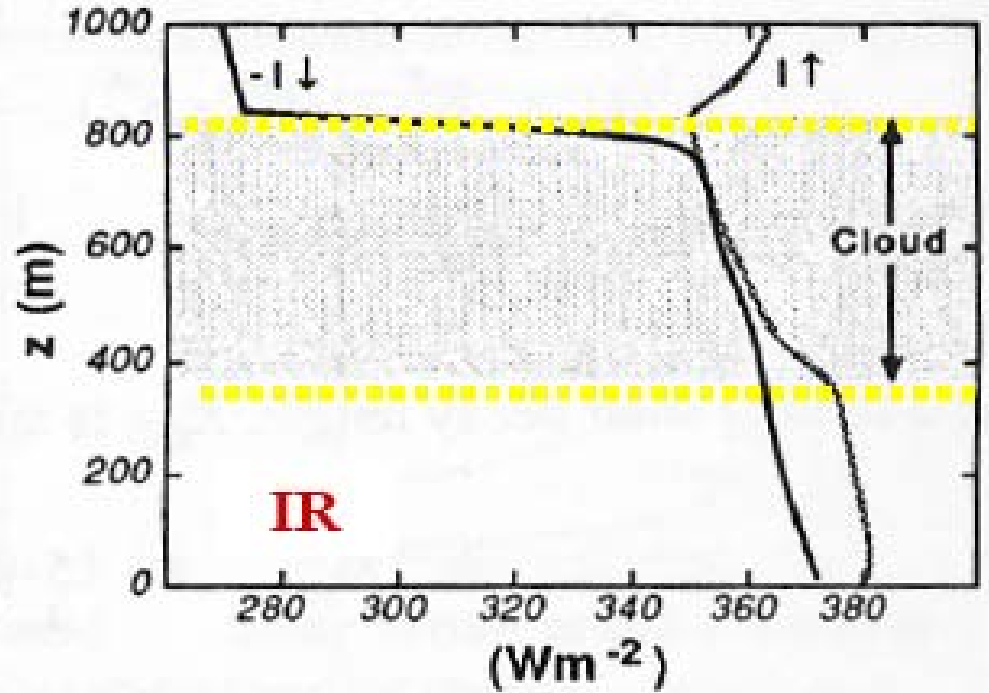
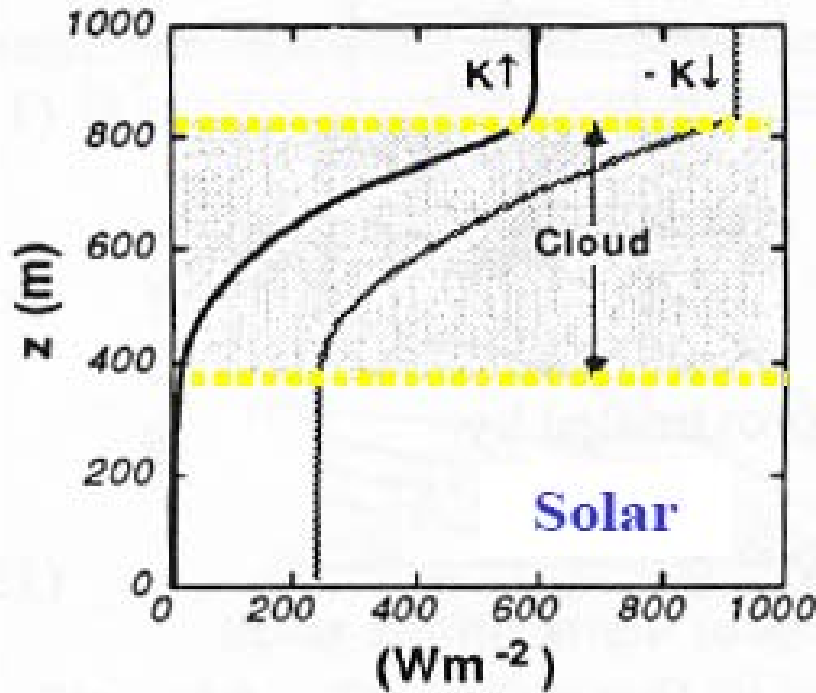
# Strahlung

- Die für die Strahlung relevante Physik innerhalb einer Wolke und zwischen Wolken erfordert die Kenntnis von:
  - Flüssigwassergehalt,
  - Größenverteilung der Wolkentropfen,
  - Wolkentemperatur,
  - Struktur der Wolkenunterkante,
  - Bedeckungsgrad,
  - Sonnenzenitwinkel,
  - ... und vieles mehr! Es handelt sich um ein ausgesprochen komplexes Problem.

# Strahlung

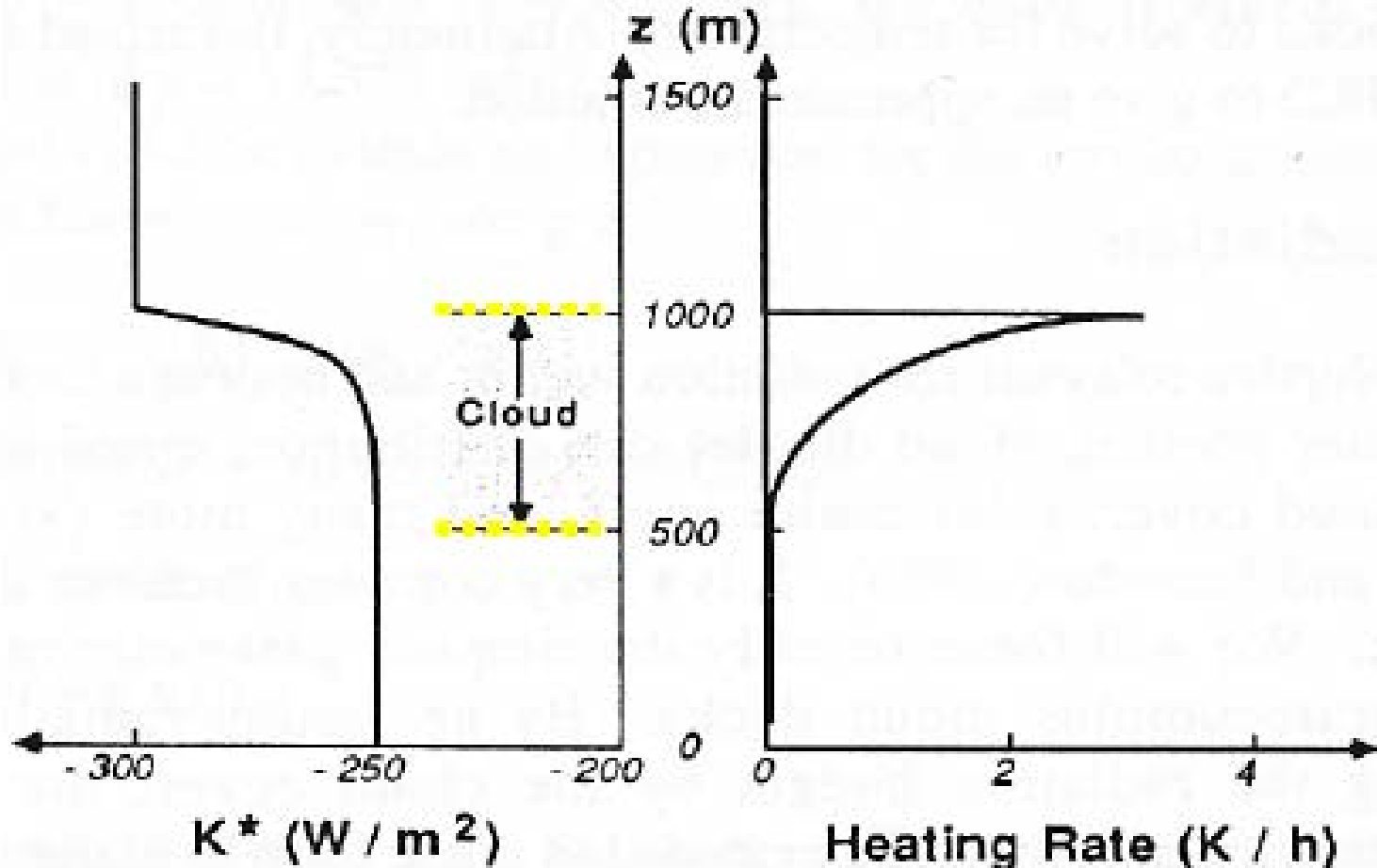
- Vereinfachungen sind möglich zum Beispiel durch die Vernachlässigung der Strahlung von den Wolkenseiten, d.h. man betrachtet nur die Strahlung senkrecht von oben und von unten. Ferner wägt man das Strahlungsbudget mittels des Bedeckungsgrades ab.
- Im Folgenden werden nur einige sehr einfache Parametrisierungsansätze für eine kontinuierlich andauernde Stratus bzw. Stratocumulus Bedeckung kurz vorgestellt.
- Mit diesen oder ähnlichen Vereinfachungen kann man zum Beispiel die Strahlungsparametrisierung für einen Stratocumulus durchaus auch für vereinzelt auftretende Cumuluswolken anwenden.

# Strahlungsflüsse in Wolken



Mittlerer solarer und IR Strahlungsfluss in einem Stratocumulus.

# Solare (kurzwellige) Strahlung



Vertikale Profile des Netto ( $K^* = K_{\downarrow} + K_{\uparrow}$ ) kurzwelligen (solaren) Strahlungsflusses und der entsprechenden Heizraten in einem idealisierten Stratocumulus.



# Parametrisierung der Absorption solarer Strahlung

Hanson und Derr schlugen 1987 folgende Vereinfachungen für die Absorption solarer Strahlung unter der Annahme vor, dass die Wolkenoberkante ( $z_T$ ) und -basis ( $z_B$ ) bekannt sind:

$$K^*(z) = K_T^* - (K_T^* - K_B^*) \frac{1 - \exp[-(z_T - z)/\lambda_{sol}]}{1 - \exp[-(z_T - z_B)/\lambda_{sol}]}$$

mit  $\lambda_{sol} = 15 W_p^{0.335}$  (typischerweise im Bereich von 50 bis 150 m) wobei der Flüssigwasserpfad  $W_p$  gegeben ist durch:

$$W_p = \int_{z_B}^{z_T} \rho_{air} r_L dz \cong \frac{(z_T - z_B)^2}{880} \quad \text{g/m}^2$$

mit  $r_L$  = Mischungsverhältnis von Flüssigwasser (Flüssigwassergehalt). Typische Werte für  $W_p$ : 10 - 1000 g/m<sup>2</sup>.

# Albedo

Die gesamte Rückstreuung (engl. bulk cloud albedo)  $a_c$  und Absorption einer Wolke  $b_c$  wird genutzt, um den (Netto) kurzwelligen Strahlungsfluss an der Ober- und Unterkante der Wolke zu bestimmen:

$$K_T^* = (1 - a_c)K \downarrow$$

$$K_B^* = (1 - a_c - b_c)K \downarrow$$

Die untere Gleichung beschreibt die Transmission der einfallenden solaren Strahlung durch die Wolke.

# Albedo

$$\downarrow \underline{K \downarrow < 0} \qquad \uparrow \underline{-a_c K \downarrow > 0}$$

$$\downarrow K_T^* = (1 - a_c)K \downarrow$$

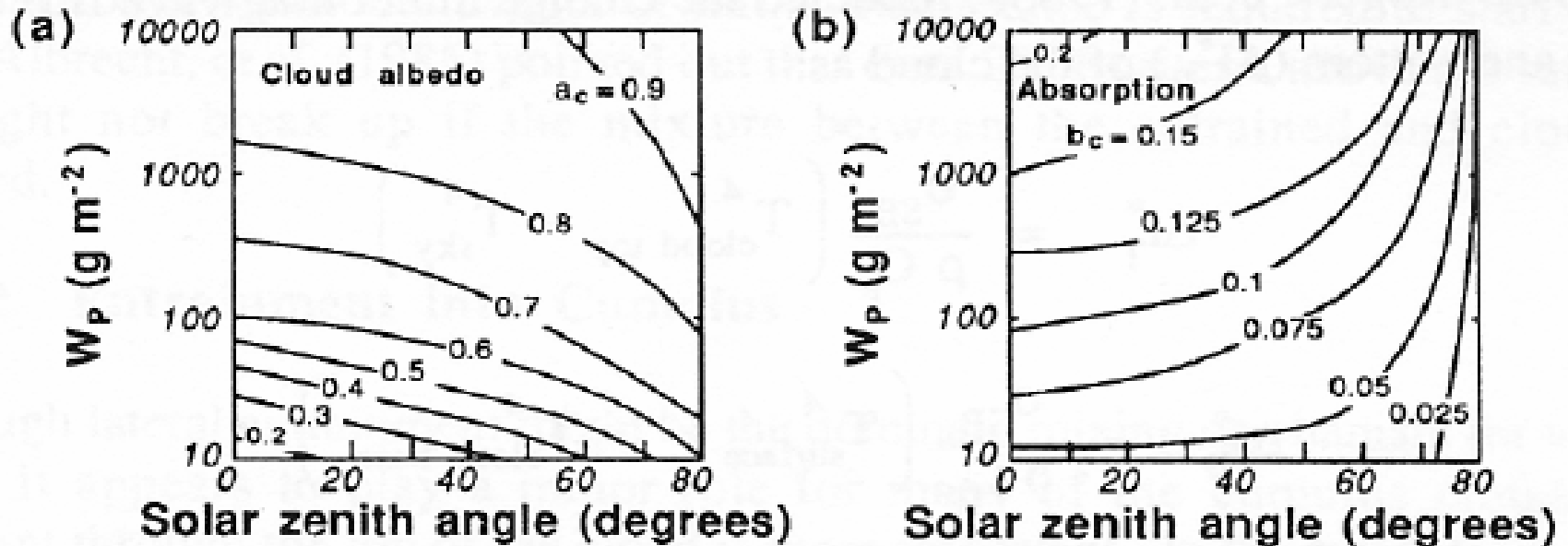
$$\downarrow K_B^* = (1 - a_c - b_c)K \downarrow$$

---

Der abwärtsgerichtete solare Fluss an der Oberkante der Wolkendecke ist immer negativ! (Definition, siehe Kap. 7.)

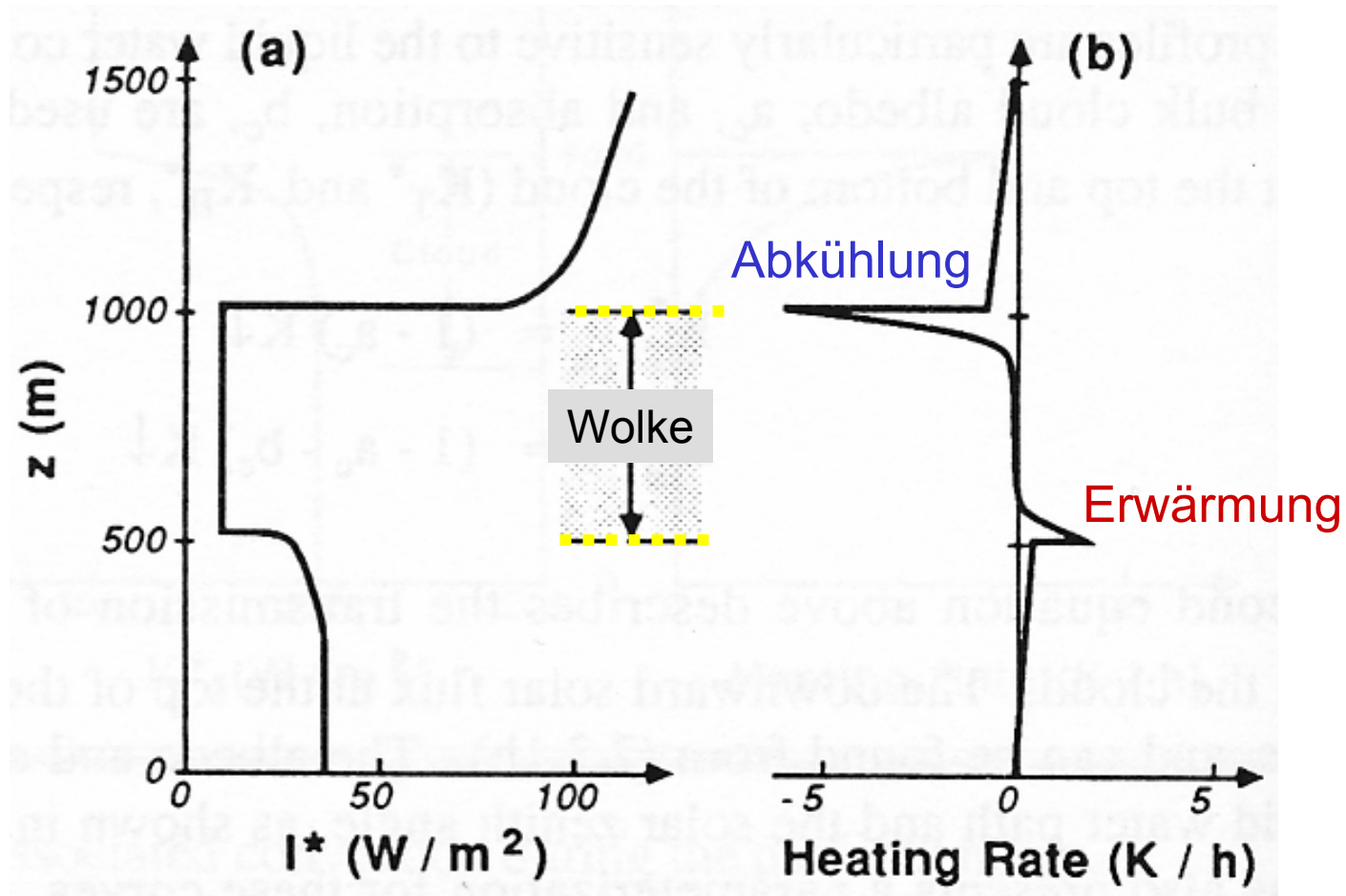
Entspricht der zurück gestreuten solaren Strahlung.

# Albedo



Variabilität der Wolkenalbedo (a) und der kurzwelligen Absorption (b), so wie sie durch ein theoretisches Modell als Funktion des SZA und Flüssigwassergehalts bestimmt wurden. Bodenalbedo wurde mit Null angenommen, ein tropisches Feuchteprofil vorgegeben. Die Konturen bezeichnen den Anteil des einfallenden, abwärtsgerichteten Flusses and der Wolkenoberkante der reflektiert oder absorbiert wird. Diese Kurven kann man parametrisieren! Achtung: Summe darf nicht größer 1 werden.

# Infrarote (langwellige) Strahlung

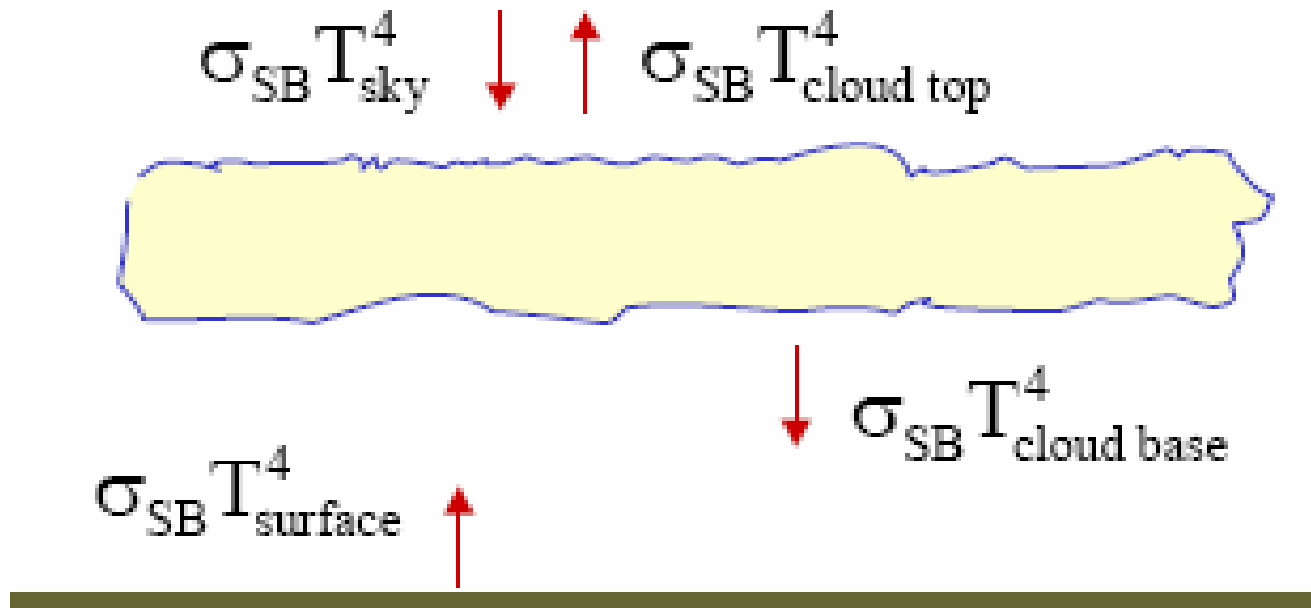


Profile des netto-langwelligeren Strahlungsflusses ( $I^* = I_{\downarrow} + I_{\uparrow}$ ) sowie der entsprechenden Heizraten in einem idealisierten Stratocumulus.

# Parametrisierung infraroter (IR) Strahlung

Beispiel für eine Parametrisierung der Änderung der netto-langwelligenen Flüsse durch die Wolkenoberkante ( $\Delta I^*_T$ ) und Wolkenbasis ( $\Delta I^*_B$ ) [Rogers et al., 1985]:

$$\Delta I^*_T = \frac{\sigma_{SB}}{\rho c_p} (T_{\text{cloud top}}^4 - T_{\text{sky}}^4) \quad \Delta I^*_B = \frac{\sigma_{SB}}{\rho c_p} (T_{\text{surface}}^4 - T_{\text{cloud base}}^4)$$



# Der Mechanismus des "Wolkenentrainments"

Instabilität in einem Stratocumulus durch "Entrainment"  
(Einmischen von Luft) an der Wolkenoberkante

- Lilly (1968) schlug als erster vor, dass warme Luft, die von oben in einen Stratocumulus eingemischt wird, sich abkühlt und sinkt, wenn sie anfänglich trocken genug ist, um eine erhebliche Kühlung durch Verdampfen der benachbarten Wolkentropfen zu begünstigen.
- Starkes Absinken als Folge der eingemischten Luft produziert zusätzliche TKE, was die Vermischung und auch das Einmischen vergrößern kann.
- Dann kann die eingemischte Luft instabil werden und auch absinken, was wiederum zu einer Erhöhung der TKE und dem Einmischen führen kann  $\Rightarrow$  positive Rückkopplung!

# Der Mechanismus des "Wolkenentrainments"

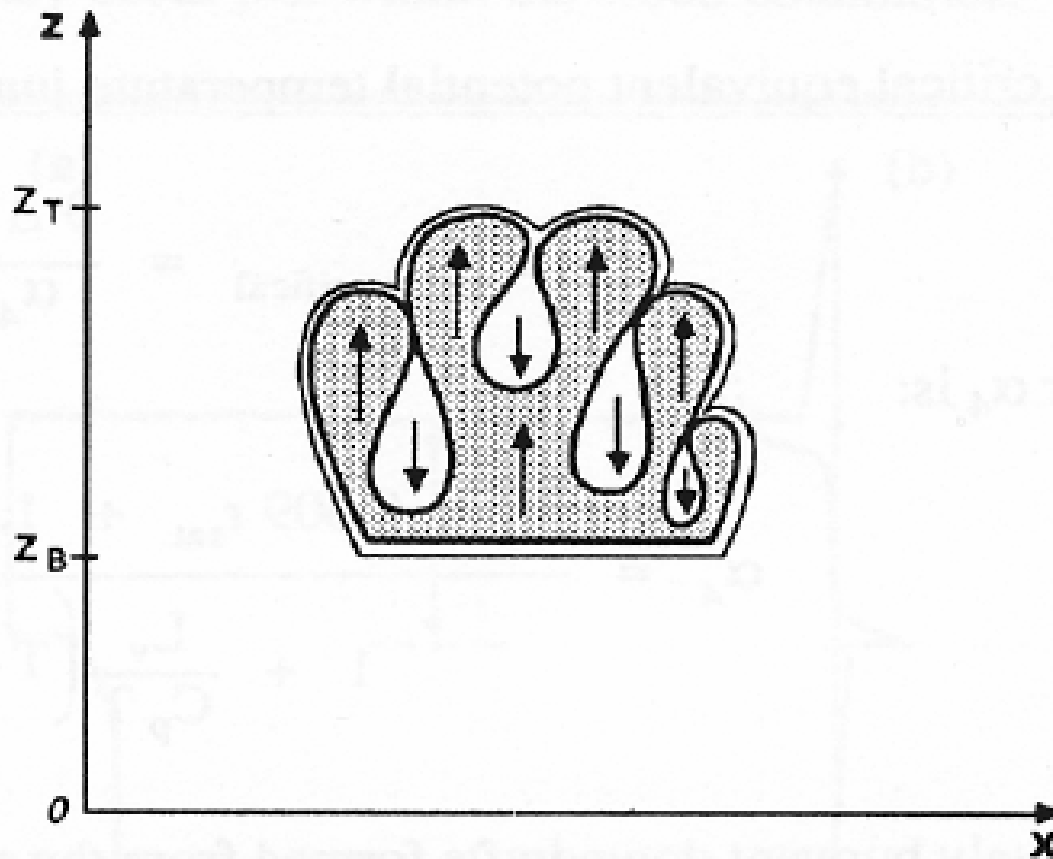
- Dieser positive Feedback kann dazu führen, dass große Mengen von trockener Luft durch einen Stratocumulus eingemischt werden; dies wiederum führt zu einem schnellen Auflösen bzw. Verdampfen der Wolke.

## Einmischen in eine Cumuluswolke

- Seitliches Einmischen von Luft scheint in einem Cumulus eine zu vernachlässigende Rolle zu spielen - Einmischen durch die (an der) Oberkante ist viel wichtiger.
- Eingemischte Luft an der Wolkenoberkante vermischt sich teilweise mit der Luft in der Wolke und auch das Verdampfen von einigen Tropfen verursacht eine Vermischung, genau wie oben für den Fall des Einmischens in einen Stratocumulus beschrieben.

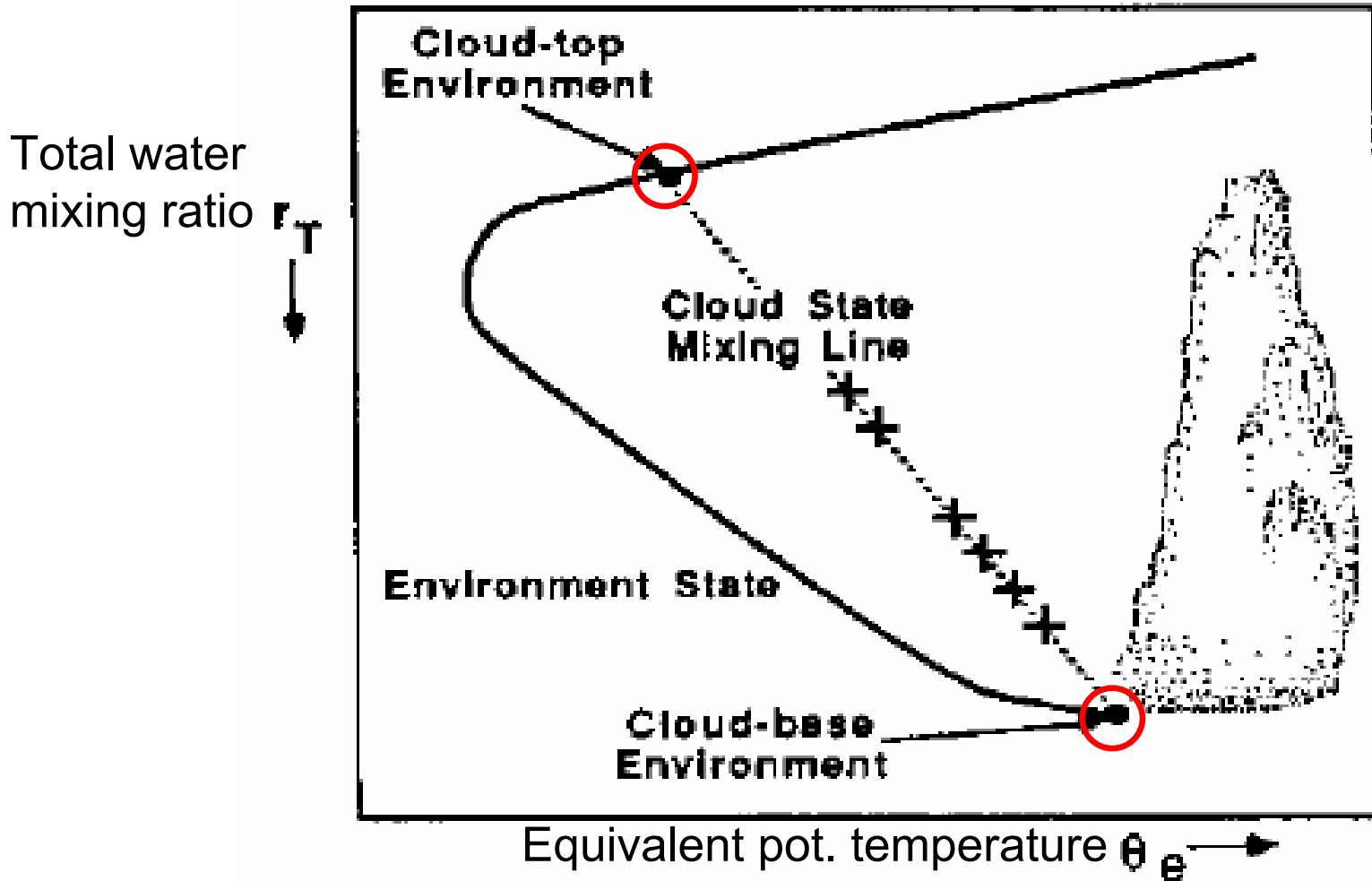


# Einmischen in eine Cumuluswolke



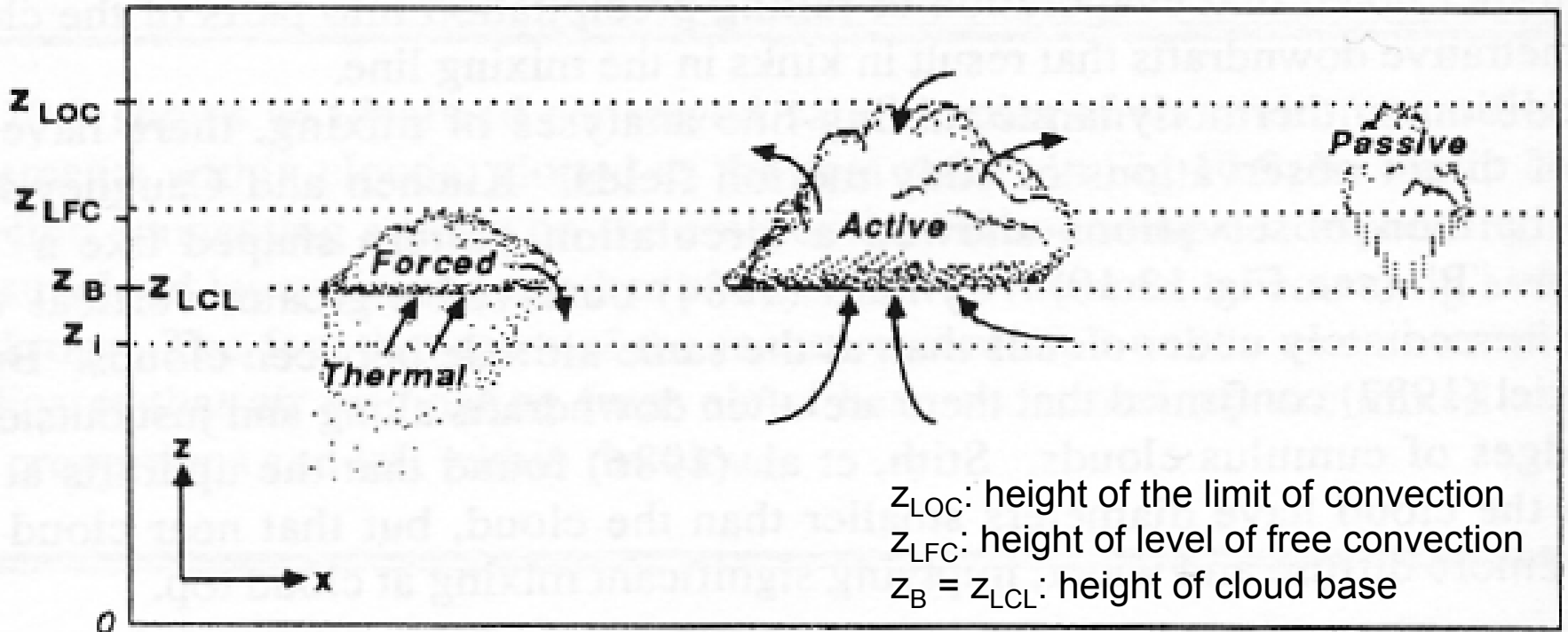
Schematische Darstellung von Einmischen und Vermischen in einer Cumuluswolke: Luft von oberhalb der Wolke wird eingemischt, sinkt nach unten und vermischt sich dabei mit der Luft im Inneren der Wolke.

# Einmischen von Luft an der Wolkenoberkante



Idealisierte Messdaten aus einer Wolke (+) liegen auf einer (Mischungs-) Linie, die Punkte miteinander verbindet, die den Zustand an der Wolkenbasis und -oberkante beschreiben.

# Schönwetter Cumulus



Cumulus Wolken können in drei Klassen eingeteilt werden, je nach ihrer Dynamik:

- Forced (= kontinuierlich angetrieben);
- Active (= dynamisch aktiv);
- Passive (=dynamisch passiv).

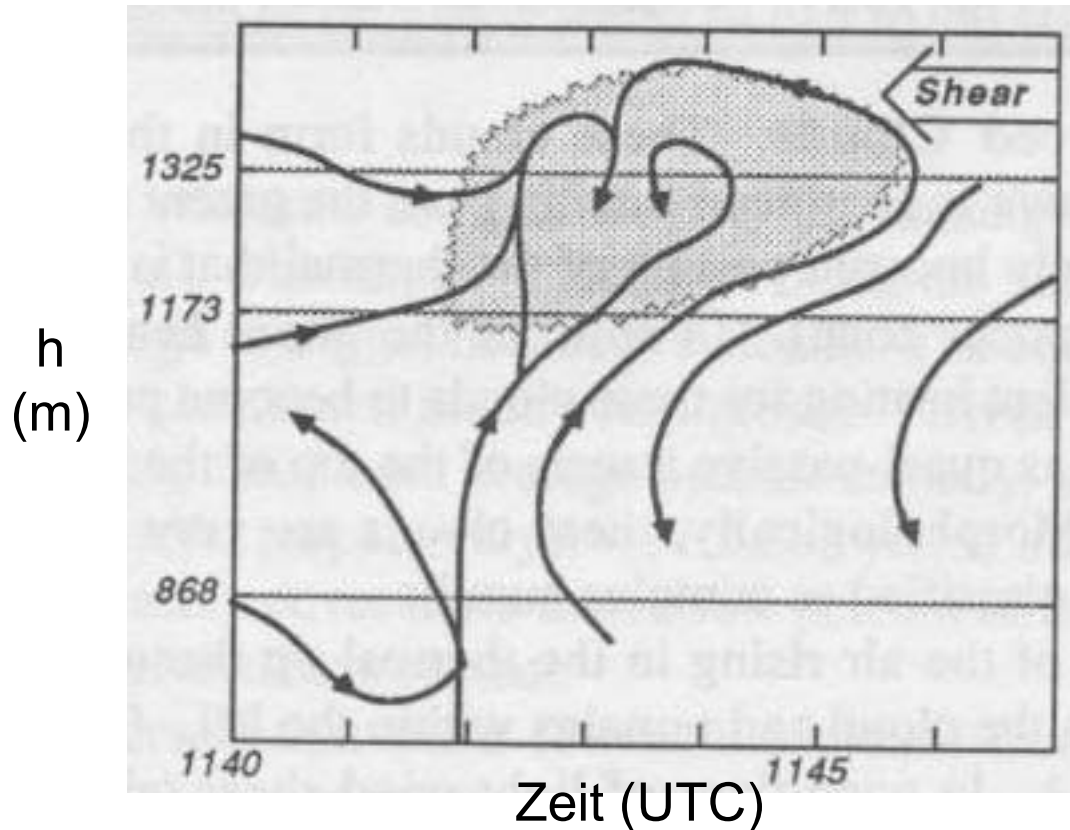
# Angetriebene ('forced') Wolken

- Diese Wolken bilden sich im oberen Bereich von Thermals in der Mischungsschicht und existieren nur dann, wenn es einen kontinuierlichen Antrieb von unten (aus dem Thermal) gibt.
- Oft bilden sich diese Wolken in dem Teil des Thermals, der in die "capping" Inversion (Entrainment Zone) eindringt und in dem Abwärtsbewegung vorherrscht.



Abbildung

# Angetriebene ('forced') Wolken



Die Abbildung zeigt Flussvektoren, die aus  $u$ -,  $v$ - und  $w$ -Komponenten bestimmt wurden (beliebiges Beispiel). Das Bewegungsmuster zeigt einen geneigten Auftrieb und ein überschlagen an der Wolkenoberkante in Richtung der Windscherung.

# Angetriebene ('forced') Wolken

- Trotz der Freisetzung von latenter Wärme während der Kondensation gibt es nicht genügend Wärme, damit die Wolke insgesamt einen Auftrieb erfährt.
- Dadurch verhalten sich diese Wolken quasi wie ein passiver Tracer der Oberkante des Thermals: Die Wolkenoberkante erreicht nie das Höhenniveau der freien Konvektion.

# Angetriebene ('forced') Wolken

- Diese Wolken sind meistens sehr flach (Cumulus Humilis).
- Die gesamte Luft, die in einem Thermal nach oben zur Wolkenbasis aufsteigt, zirkuliert in der Wolke und verbleibt in der ML, d.h. es geht keine Luft aus der ML heraus.
- Unter Bedingungen einer schwachen Windscherung divergiert die Luft in der Wolke vom Inneren zu den Seitenrändern der Wolke, wo absteigender Fluss in die ML assoziiert ist mit der Verdampfung von Wolkentropfen.
- Bei starken Windscherungen erscheinen die Wolken oft wie eine brechende Welle, mit Aufwinden im oberen Bereich der Scherung und einer gegenläufigen Zirkulation (d.h. nach unten gerichteten Winden) im unteren Bereich der Scherung.

# Dynamisch aktive Wolken

- Diese Wolken bilden sich auch im Zusammenhang mit Thermals in der ML, jedoch erreicht hier zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Teil des Aufwindes das Niveau der freien Konvektion ( $z_{LFC}$ ) und die Wolke erfährt einen Auftrieb.
- Dieser aufsteigende Wind verursacht in der Folge seine eigene Druckstörungen, die seine weitere Entwicklung beeinflusst und mehr Luft durch die Wolkenbasis hinein saugt.
- Die Lebenszeit dieser Wolken ist durch die Wolkendynamik und die Wechselwirkung mit der Umgebung kontrolliert. Es besteht die Möglichkeit, dass die Lebenszeit über die des Thermals, der ja die Wolkenbildung selbst ausgelöst hat, hinaus geht.



# Dynamisch aktive Wolken

- Durch diese Wolken kann Luft aus der ML in die freie Atmosphäre entweichen.
- Die Dimension dieser Wolken ist häufig so, dass die vertikale und die horizontale Ausdehnung von der gleichen Größenordnung sind, manchmal ist die vertikale Erstreckung etwas größer als die horizontale Ausdehnung (Cumulus Mediocris).

# Dynamisch passive Wolken

- Wenn aktive Wolken keine Luftmassen mehr aus der ML entziehen, werden sie als (dynamisch) passiv klassifiziert.
- Im Bereich der Oberkante einer passiven Wolke ist unter Umständen nach wie vor ein positiver Auftrieb zu beobachten und die Wolke "wächst" weiter, aber sie entnimmt keine weitere Luft aus der ML.
- Die Unterkante dieser Wolken ist diffus, da hier Wolken-tröpfchen verdampfen und sich mit der Umgebungsluft vermischen.
- Das Ergebnis ist, dass die ursprüngliche Wolkenunterkante verschwindet und der Rest der Wolke nur noch oberhalb der ML und der Vermischungszone verbleibt, wo sie dynamisch nicht mit der ML wechselwirkt.

# Strahlungsrückkopplung durch Wolken

- Alle Klassen von Grenzschichtwolken beschatten die Erdoberfläche.
- Über Land führt dies zu einer negativen Rückkopplung: Geringere solare Heizung der Oberfläche führt zu weniger und schwächeren Thermals. Dies führt zu einem langsameren Anwachsen der Grenzschicht mit weniger neuen Cumuluswolken.



**Ende Kapitel 13**